This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

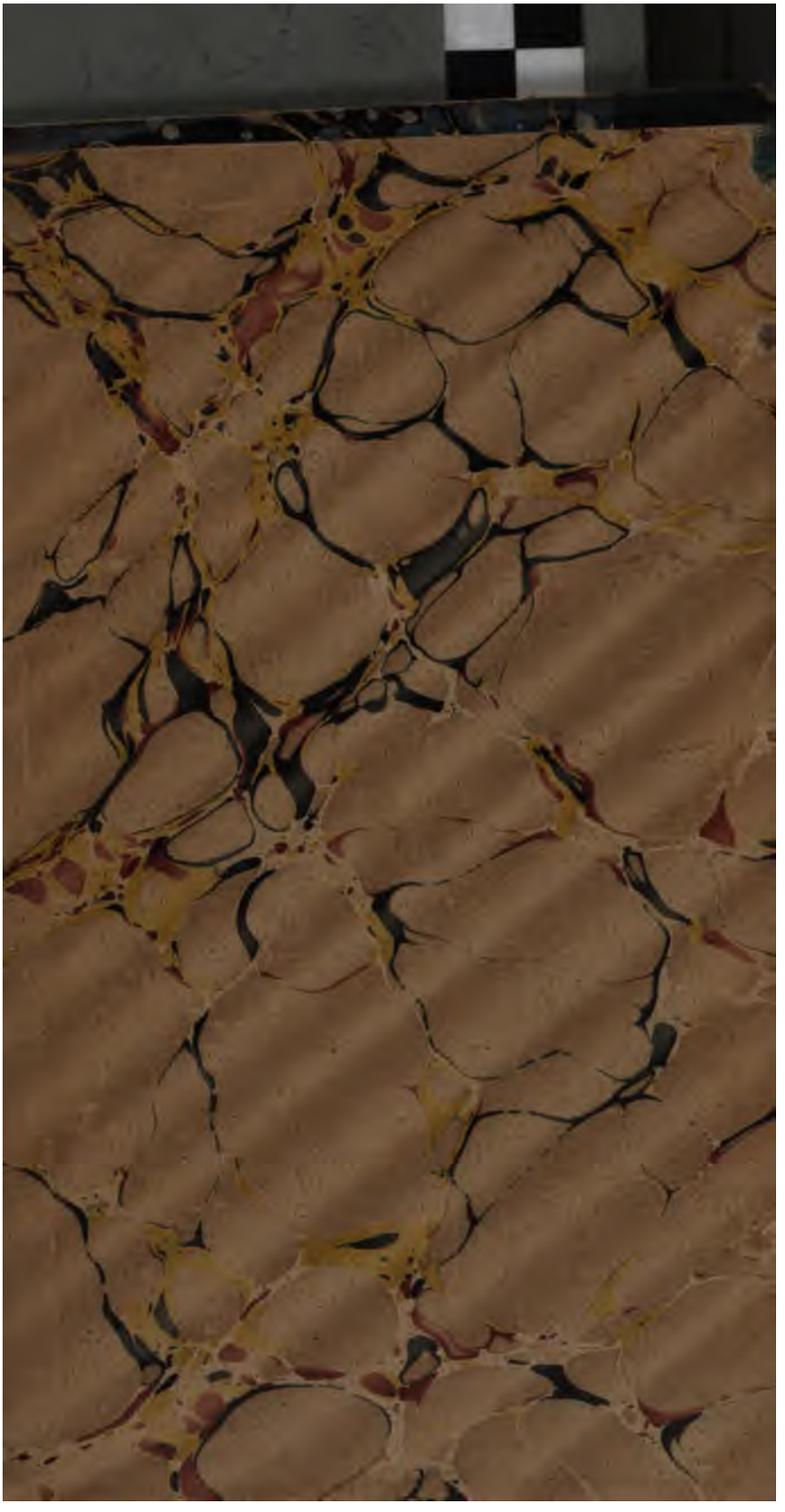
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

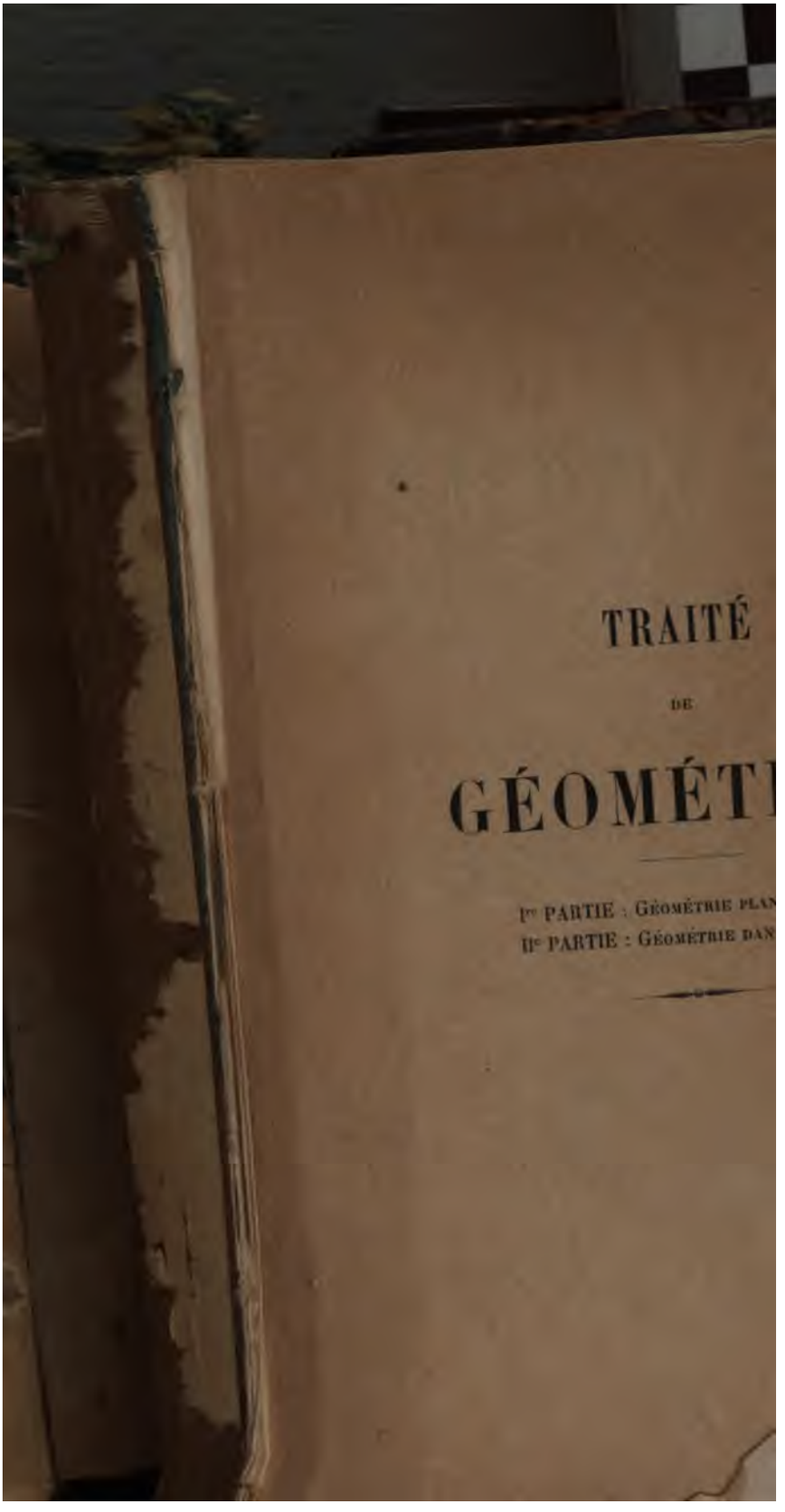
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`





TRAITÉ

DE

GÉOMÉTR

Ire PARTIE : Géométrie plan

IIe PARTIE : Géométrie dan

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE

PAR

EUGÈNE ROUCHÉ,

PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET METIERS.
EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

CH. DE COMBEROUSSE,

PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS,
ET A L'ÉCOLE CENTRALE.

CONFORME AUX PROGRAMMES OFFICIELS.
RENFERMANT UN TRÈS GRAND NOMBRE D'EXERCICES ET PLUSIEURS APPENDICES CONSACRÉS
A L'EXPOSITION DES PRINCIPALES MÉTHODES DE LA GÉOMÉTRIE MODERNE.

SIXIÈME ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE.

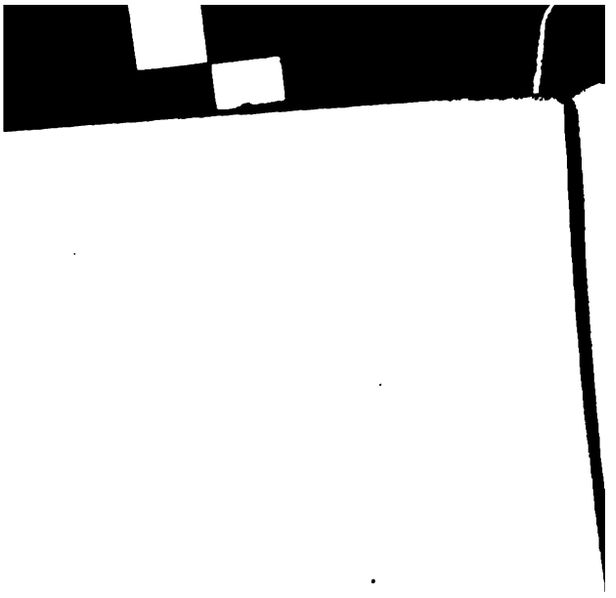
PREMIÈRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE PLANE.

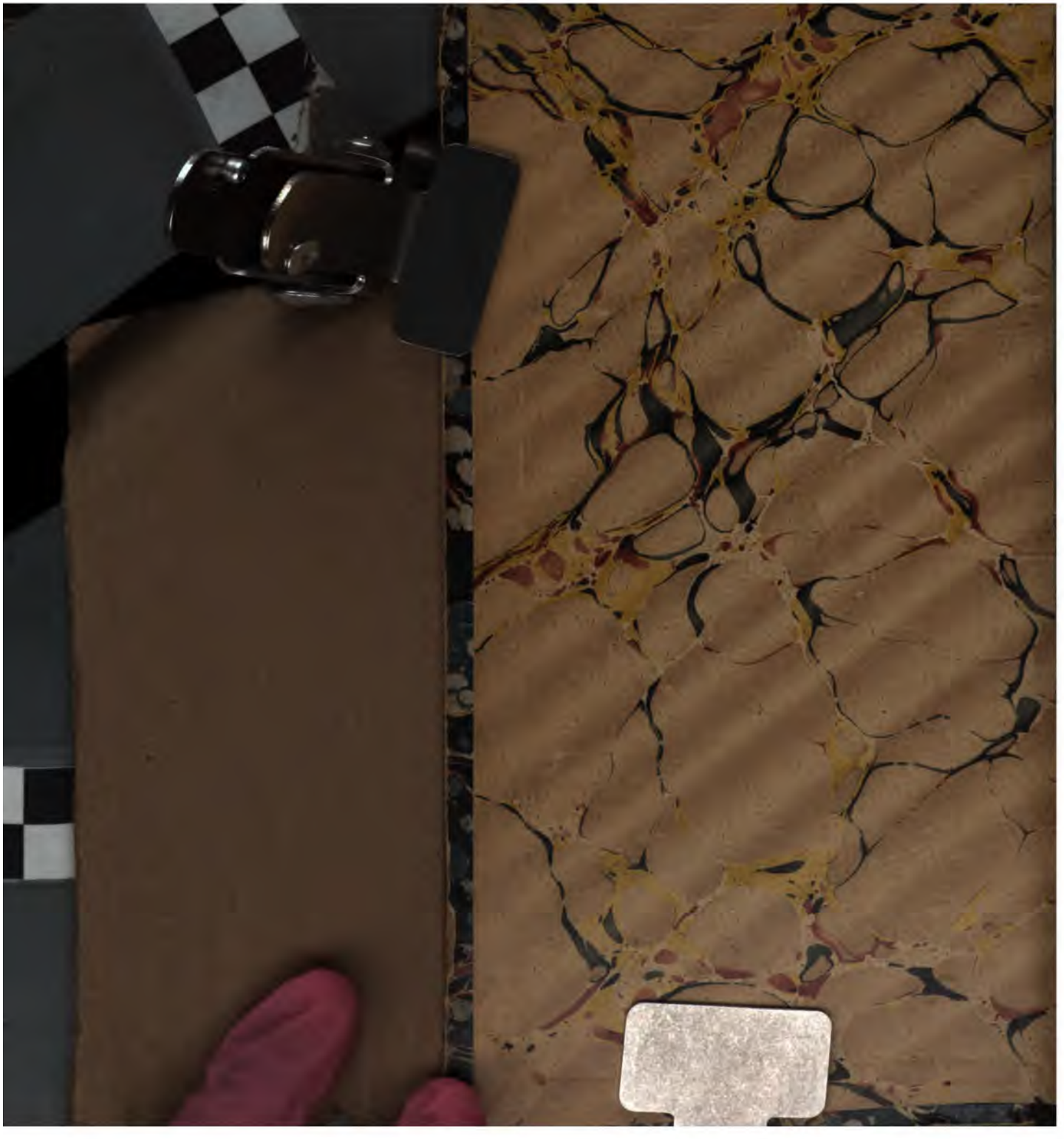
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES
Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

(Tous droits réservés.)



LELAND STANFORD JUNIOR
LIBRARY
UNIVERSITY.
A10616



Pages.
Égalité des parallèles comprises entre parallèles 34
Relations entre les angles dont les côtés sont parallèles ou perpendiculaires. 35

§ V. — Somme des angles d'un polygone.

Somme des angles d'un triangle..... 38
Égalité des angles de deux triangles dont les côtés sont parallèles ou perpendiculaires..... 39
Somme des angles d'un polygone..... 39

§ VI. — Du parallélogramme.

Propriétés des côtés, des angles et des diagonales du parallélogramme.. 41
Caractères auxquels on reconnaît qu'un quadrilatère est un parallélogramme..... 42
Propriétés du rectangle, du losange et du carré..... 44
Centre d'un parallélogramme. — Symétrie par rapport à un point..... 45

LIVRE II.

LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

§ I. — Des arcs et des cordes.

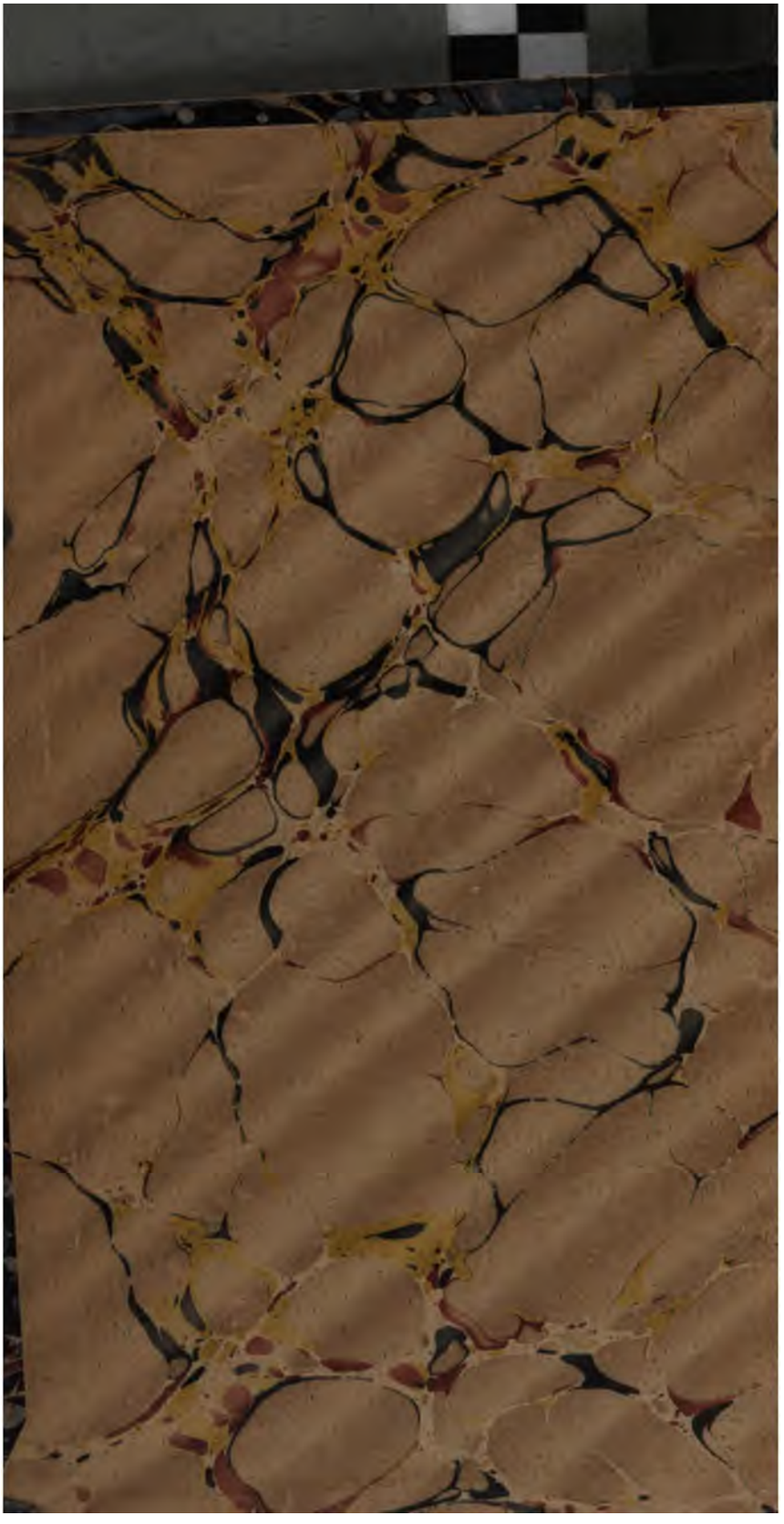
Propriétés des diamètres..... 48
Dépendance mutuelle entre les longueurs des arcs et des cordes..... 49
Propriétés du rayon perpendiculaire à une corde..... 50
Dépendance mutuelle entre la longueur d'une corde et sa distance au centre..... 51

§ II. Tangente au cercle. — Positions mutuelles de deux circonférences.

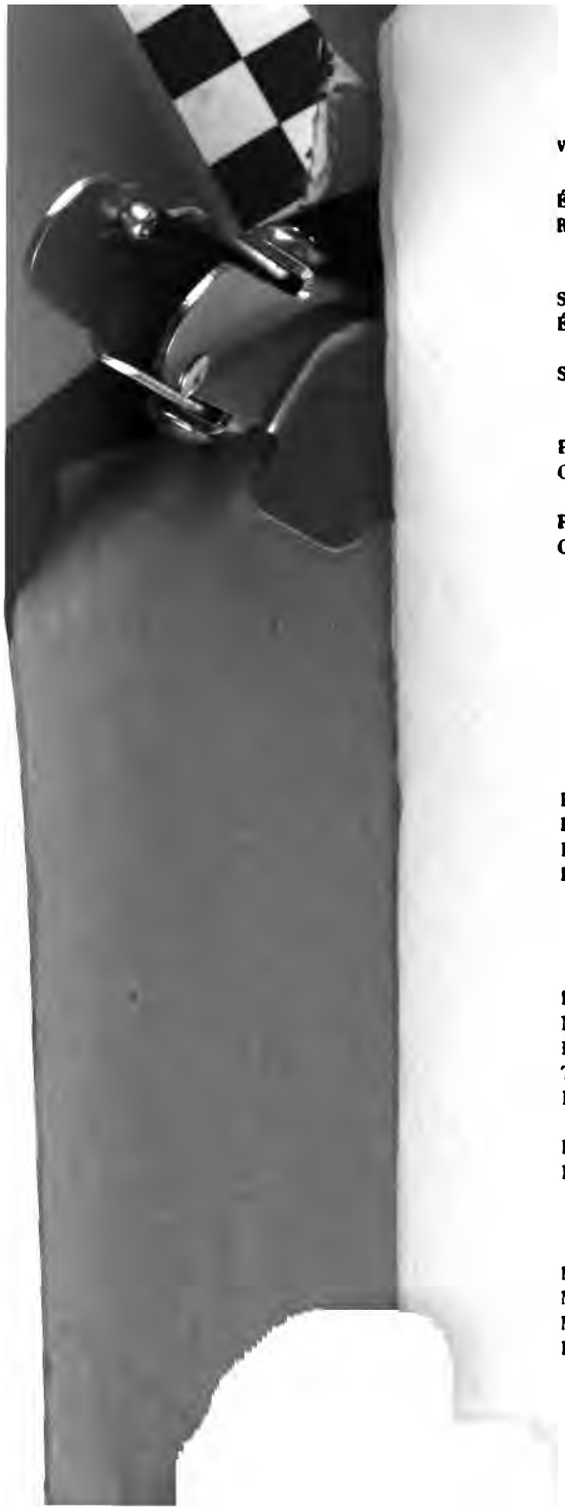
Propriété de la tangente au cercle..... 53
Normales et obliques..... 54
Égalité des arcs compris entre deux parallèles..... 55
Trois points non en ligne droite déterminent un cercle..... 57
Point de concours des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle et point de concours des hauteurs..... 58
Intersection, contact et angle de deux circonférences..... 58
Positions relatives de deux cercles; relations correspondantes entre la distance des centres et les rayons..... 59

§ III. — Mesure des angles.

Mesure des angles au centre..... 6
Mesure des angles inscrits; segment capable..... 6
Mesure des angles dont le sommet est intérieur ou extérieur au cercle.. 6
Lieu des points d'où l'on voit une droite sous un angle donné..... 6



LELAND STANFORD JUNIOR
LIBRARY
UNIVERSITY.
A10616



Pages.

Égalité des parallèles comprises entre parallèles 34
Relations entre les angles dont les côtés sont parallèles ou perpendiculaires. 35

§ V. — Somme des angles d'un polygone.

Somme des angles d'un triangle..... 38
Égalité des angles de deux triangles dont les côtés sont parallèles ou perpendiculaires..... 39
Somme des angles d'un polygone..... 39

§ VI. — Du parallélogramme.

Propriétés des côtés, des angles et des diagonales du parallélogramme.. 41
Caractères auxquels on reconnaît qu'un quadrilatère est un parallélogramme..... 42
Propriétés du rectangle, du losange et du carré..... 44
Centre d'un parallélogramme. — Symétrie par rapport à un point..... 45

LIVRE II.

LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

§ I. — Des arcs et des cordes.

Propriétés des diamètres..... 48
Dépendance mutuelle entre les longueurs des arcs et des cordes..... 49
Propriétés du rayon perpendiculaire à une corde..... 50
Dépendance mutuelle entre la longueur d'une corde et sa distance au centre..... 51

§ II. Tangente au cercle. — Positions mutuelles de deux circonférences.

Propriété de la tangente au cercle..... 53
Normales et obliques..... 54
Égalité des arcs compris entre deux parallèles..... 55
Trois points non en ligne droite déterminent un cercle..... 57
Point de concours des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle et point de concours des hauteurs..... 58
Intersection, contact et angle de deux circonférences..... 58
Positions relatives de deux cercles; relations correspondantes entre la distance des centres et les rayons..... 59

§ III. — Mesure des angles.

Mesure des angles au centre..... 62
Mesure des angles inscrits; segment capable..... 64
Mesure des angles dont le sommet est intérieur ou extérieur au cercle.. 66
Lieu des points d'où l'on voit une droite sous un angle donné..... 67

Pages

Proportionnalité des segments interceptés sur deux droites quelconques par une série de parallèles 111
Rapport des segments déterminés sur un côté d'un triangle par la bissectrice intérieure ou extérieure de l'angle opposé 114
Lieu des points dont les distances à deux points fixes sont dans un rapport donné 115

§ II. — Lignes proportionnelles dans le cercle.

Propriétés des droits anti-parallèles par rapport à un angle 117
Constance du produit des segments interceptés par un cercle sur les transversales issues d'un point fixe; tangente, moyenne proportionnelle entre la sécante entière issue du même point et sa partie extérieure; puissance d'un point par rapport à un cercle 119

§ III. — Similitude des polygones.

Cas de similitude des triangles 123
Point de concours des médianes d'un triangle 126
Décomposition des polygones semblables en triangles semblables 127
Rapport des droites homologues de deux polygones semblables; rapport de leurs périmètres 130
Proportionnalité des segments interceptés sur deux parallèles par des droites concourantes 131
Lieu des points dont les distances à deux droites fixes sont dans un rapport donné 133

§ IV. — Relations métriques entre les différentes parties d'un triangle.

Relations entre les côtés d'un triangle rectangle, la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit, et les segments de l'hypoténuse 135
Carré du côté opposé à un angle aigu ou obtus dans un triangle quelconque. — Hauteurs en fonction des côtés 137
Somme des carrés de deux côtés d'un triangle. — Somme des carrés des côtés d'un quadrilatère. — Lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux points fixes est constante. — Médianes d'un triangle en fonction des côtés 141
Différence des carrés des côtés d'un triangle. — Lieu des points dont la différence des carrés des distances à deux points fixes est constante ... 143
Produit de deux côtés d'un triangle en fonction de la bissectrice de leur angle ou de la hauteur correspondant au troisième côté. — Bissectrices et rayon du cercle circonscrit en fonction des côtés 144
Propriétés du quadrilatère inscriptible. — Construire le quadrilatère connaissant les quatre côtés. — Diagonales en fonction des côtés. — Calcul de la corde de la somme de deux arcs 146

§ V. — Problèmes relatifs aux lignes proportionnelles.

Division d'une droite en parties dont les rapports sont donnés 150
Quatrième proportionnelle à trois droites données 151

Pages.

Moyenne proportionnelle entre deux droites données; limite supérieure de la différence entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de deux longueurs 151
Construction des expressions rationnelles du premier degré 153
Construction des expressions irrationnelles du premier degré, lorsque l'indice du radical est une puissance de 2 155
Rétablissement de l'Homogénéité dans les formules 156
Construction d'un polygone semblable à un polygone donné 157
Construire deux droites dont on a le produit et la somme ou la différence; construction des racines de l'équation du second degré et de l'équation bicarrée 159
Division d'une droite en moyenne et extrême raison 162
Tangentes communes à deux cercles; centres de similitude de deux cercles 164
Cercle passant par deux points et tangent à une droite ou à un cercle. 168
Détermination d'un cercle astreint à trois conditions. — Cercle tangent à trois cercles donnés 169

§ VI. — Polygones réguliers.

Tout polygone régulier est inscriptible et circonscriptible 171
Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables, et leur rapport de similitude est égal au rapport de leurs rayons ou de leurs apothèmes 174
Nombre des polygones réguliers convexes ou étoilés de m côtés 175

§ VII. — Problèmes sur les polygones réguliers.

Inscription du carré 176
Inscription de l'hexagone régulier et du triangle équilatéral 177
Inscription des deux décagones réguliers et des deux pentagones 178
Inscription des quatre pentédécagones réguliers 180
Problèmes divers sur les polygones réguliers 182

§ VIII. — Mesure de la circonférence.

Définition de la longueur d'une ligne courbe; la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre; le rapport d'un arc de courbe à sa corde a pour limite l'unité 189
Le rapport π de la circonférence au diamètre est constant; calcul de la longueur d'un arc de cercle; arcs semblables 193
Unités employées dans la mesure des angles 195
Calcul de π. — Méthode des isopérimètres; méthode simple; méthode perfectionnée; degré de l'approximation. — La méthode des périmètres conduit aux mêmes calculs 197

APPENDICE DU TROISIÈME LIVRE.

Principe des signes. — Des segments rectilignes et des angles; formules pour le changement d'origine 204

Pages.

Théorie des Projections; généralisation de la formule fondamentale de la Trigonométrie rectiligne 207

Transversales dans le triangle. — Théorèmes de Menélaüs et de Jean de Céva. — Applications; relations trigonométriques 210

Propriétés du quadrilatère complet 215

Rapport anharmonique de quatre points en ligne droite; il est projectif; son expression trigonométrique 216

Rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites, de quatre points ou de quatre tangentes d'un cercle 219

Propriétés fondamentales relatives à deux faisceaux qui ont un rayon homologue commun et un rapport anharmonique égal, ou à deux séries rectilignes de quatre points qui ont un rapport anharmonique égal et un point homologue commun 221

Triangles homologiques 222

Hexagones de Pascal et de Brianchon 223

Divisions et faisceaux harmoniques, propriétés et formules fondamentales; moyenne harmonique; polaire par rapport à un angle 225

Pôle et polaire dans le cercle; triangle autopolaire 229

Méthode des polaires réciproques; transformation des propriétés descriptives et des propriétés métriques; applications aux polygones inscrits et circonscrits 233

Homothétie. — Propriétés des figures homothétiques. — Centres et axes d'homothétie de trois figures homothétiques deux à deux et, en particulier, de trois cercles 240

Définition générale de la similitude. — Pôle double de deux figures semblables 245

Méthode des figures semblables et méthode par renversement; inscrire dans un quadrilatère un quadrilatère semblable à un quadrilatère donné; combinaison de la méthode par rotation avec la construction d'une figure homothétique; problème de la *section de raison* 248

Puissance d'un point par rapport à un cercle. — Axe radical de deux cercles; centre radical de trois cercles; axe radical commun à trois cercles, autres propriétés du quadrilatère complet. — Points antihomologues du système de deux cercles, propriétés des systèmes de deux cercles touchés par un troisième 254

Notions sur l'Involution; points doubles, dispositions de la figure suivant que les points doubles existent ou n'existent pas. — Condition pour que trois couples de points en ligne droite forment une involution; propriétés involutives du quadrilatère 261

Faisceaux de cercles; points limites d'un faisceau du premier genre; points fondamentaux d'un faisceau du second genre; faisceaux conjugués; nouvelle expression de la puissance d'un point par rapport à un cercle. — Cercles orthogonaux; cercles coupés diamétralement 265

Inversion. — Propriétés des figures inverses; conservation des angles; figure inverse d'une droite ou d'un cercle; tout faisceau de cercles du premier genre *ou* du second genre peut être transformé, par inversion, en un système de cercles concentriques *ou* en un faisceau de

Pages.

droites; propriétés des cercles inverses de deux cercles tangents; le rapport de la tangente commune à la moyenne géométrique des rayons est le même pour le système de deux cercles et pour la figure inverse. 269

Méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques. — Relation qui lie les longueurs des tangentes communes, lorsqu'un cercle en touche quatre autres. 278

Examen de quelques problèmes remarquables. — Problème d'Apollonius ou cercle tangent à trois cercles donnés, solution générale; cas particuliers de ce problème; ce que deviennent les pôles, polaires, axes radicaux, centres de similitude dans les cas limites; autres propriétés. 281

Cercle coupant trois cercles donnés sous des angles donnés : cas particuliers, solution générale. 288

Cercle des neuf points ou cercle d'Euler; son contact avec les cercles inscrit et ex-inscrits ou théorème de Feuerbach. 290

Inverseurs de Peaucellier et de Hart. 293

Problème de Castillon. 294

Problème de Malfatti. 295

Transformation par semi-droites réciproques, propriétés des semi-droites et des cycles. — Applications de cette méthode employée seule ou combinée avec la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques. 298

LIVRE IV.

LES AIRES.

§ I. — Mesure des aires des polygones.

Proportionnalité entre l'aire du rectangle et chacune de ses dimensions. 310

Aire du rectangle. 311

Aire du parallélogramme. 312

Aire du triangle. — Calcul de cette aire et des rayons des cercles circonscrit, inscrit et ex-inscrits en fonction des côtés du triangle. 313

Aire du trapèze. — Mesure de l'aire d'un polygone quelconque. 317

§ II. — Comparaison des aires.

Rapport des aires de deux polygones semblables. 319

Rapport des aires de deux triangles qui ont un angle égal ou supplémentaire. 321

Propriétés des carrés construits sur les côtés d'un triangle rectangle. 322

§ III. — Aires du polygone régulier et du cercle.

Aire d'un polygone régulier. — Rapport des aires de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés. — Aire d'un secteur polygonal régulier. 326

Pages.

Aire du cercle. — Rapport des aires de deux cercles..... 328
Aire du secteur circulaire. — Rapport des aires des secteurs semblables..... 330
Aire du segment circulaire. — Rapport des aires de deux segments semblables..... 332

§ IV. — Problèmes sur les aires.

Transformer un polygone en un triangle ou en un carré équivalent.... 333
Transformer un polygone en un autre de même aire et semblable à un polygone donné..... 336
Deux figures semblables étant données, construire une figure semblable égale à leur somme ou à leur différence..... 337
Construire un polygone semblable à un polygone donné et dont l'aire ait un rapport donné avec celle de ce polygone..... 338

APPENDICE DU QUATRIÈME LIVRE.

Evaluation approchée de l'aire d'une figure à contour curviligne. — Formule de Simpson. — Formule de Poncelet..... 341
Limite supérieure de la différence entre la longueur d'un arc de cercle et celle de sa corde..... 345
Maximums et minimums des figures planes. — Maximum de l'aire d'un triangle dans lequel on connaît la base et le périmètre, ou les longueurs de deux côtés, ou la somme de deux côtés..... 347
Entre toutes les figures planes isopérimètres, le cercle est un maximum. — Maximum d'une figure composée d'une droite et d'une ligne de forme arbitraire. — Maximum d'un polygone de côtés donnés, ou d'un polygone dont on donne le périmètre et le nombre des côtés. — Application aux polygones réguliers..... 349

QUESTIONS PROPOSÉES SUR LA GÉOMÉTRIE PLANE.

EXERCICES CONCERNANT LES DIVERS PARAGRAPHES :
Du premier Livre (1 à 67)..... 353
Du deuxième Livre (68 à 155)..... 360
Du troisième Livre (156 à 372)..... 369
Du quatrième Livre (373 à 481)..... 392
QUESTIONS DIVERSES DE GÉOMÉTRIE PLANE (482 à 530)..... 403

NOTES.

NOTE I.

Mesure des grandeurs.

Pages.
Mesure d'une grandeur commensurable avec l'unité 411
Mesure d'une grandeur incommensurable avec l'unité 412
Calcul des nombres incommensurables 413
Rapport des deux grandeurs 416
Conditions pour que deux grandeurs varient proportionnellement; grandeur proportionnelle à plusieurs autres 417

NOTE II.

Sur l'impossibilité de la quadrature du cercle.

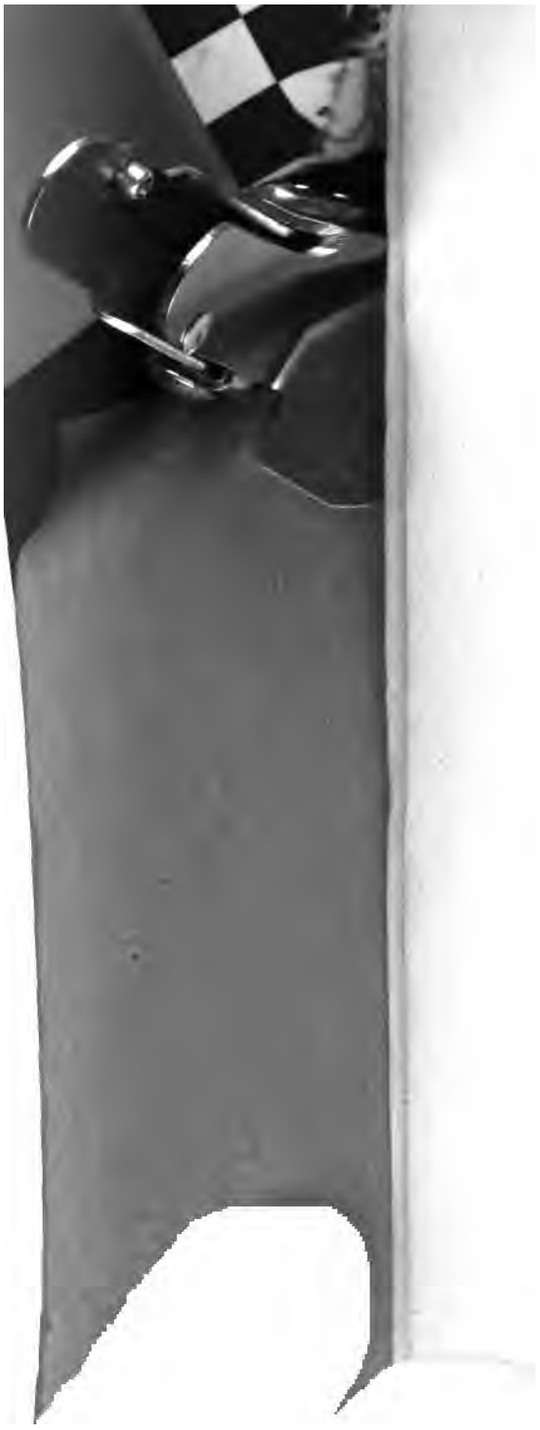
Formules de M. Hermite 421
Théorèmes de M. Lindemann 424

NOTE III.

Sur la géométrie récente du triangle.

Définition des coordonnées d'un point et d'une droite; coordonnées normales et coordonnées barycentriques 429
Points complémentaires et anticomplémentaires; triangle complémentaire et triangle anticomplémentaire du triangle de référence; orthocentre, triangle orthique, droite d'Euler 431
Droite et points harmoniquement associés à un point donné; axe orthique d'un triangle 433
Points et transversales réciproques 436
Points inverses, droites isogonales, triangle podaire et triangle antipodaire. 437
Triangles orthologiques. — Propriétés des quadrangles métapolaires 440
Métapôles de deux triangles; expressions des coordonnées des métapôles. — Points jumeaux 442
Triangles métaharmoniques par rapport à un point; propriétés du triangle métaharmonique et du triangle podaire d'un triangle par rapport à un même point. — Centres métaharmoniques de deux triangles; trouver dans le plan d'un triangle un point dont les distances aux trois sommets soient proportionnelles à des nombres donnés; points tripolairement associés 447

QA
445
R62



Pages.

Symédianes; centre des symédianes ou point de Lemoine, droite de Lemoine; coordonnées normales et coordonnées barycentriques du centre des symédianes; ces dernières coordonnées sont les mêmes dans le triangle donné et dans son triangle orthique; trouver dans le plan d'un triangle un point dont la somme des carrés des distances aux côtés du triangle soit un minimum; autres propriétés..... 453

Centres isogones et centres isodynamiques; propriétés et détermination; cercles d'Apollonius 457

Cercle de Brocard; premier et second triangle de Brocard du triangle donné; angle de Brocard du même triangle; axes et angles de Steiner. — Propriétés et formules correspondantes. — Points de Brocard, leurs coordonnées barycentriques et leurs coordonnées normales. — Autres propriétés relatives au cercle de Brocard..... 459

Cercles tangents aux trois côtés d'un triangle; point de Gergonne; point de Nagel..... 468

Des figures semblablement variables; propriétés et formules diverses... 470

Sur quelques cercles remarquables. — Construire un triangle qui soit homothétique à un triangle donné et tel, que les six points de rencontre des côtés non homologues des deux triangles soient situés sur une même circonférence; conséquences. — Les projections respectives des pieds des hauteurs d'un triangle donné sur les deux autres côtés, sont six points situés sur une même circonférence; etc..... 478

QUESTIONS PROPOSÉES *sur la Géométrie du triangle* (1 à 56)..... 487

PRÉFACE.

« Nous voyons par expérience qu'entre esprits égaux et toutes choses pareilles, celui qui a de la Géométrie l'emporte, et acquiert une vigueur toute nouvelle. » PASCAL.

Les idées d'étendue, de situation et de forme sont aussi anciennes que l'homme. On attribue aux Égyptiens et aux Chaldéens le premier essai de coordination de ces idées. Hérodote explique comme il suit la naissance de la Géométrie en Égypte.

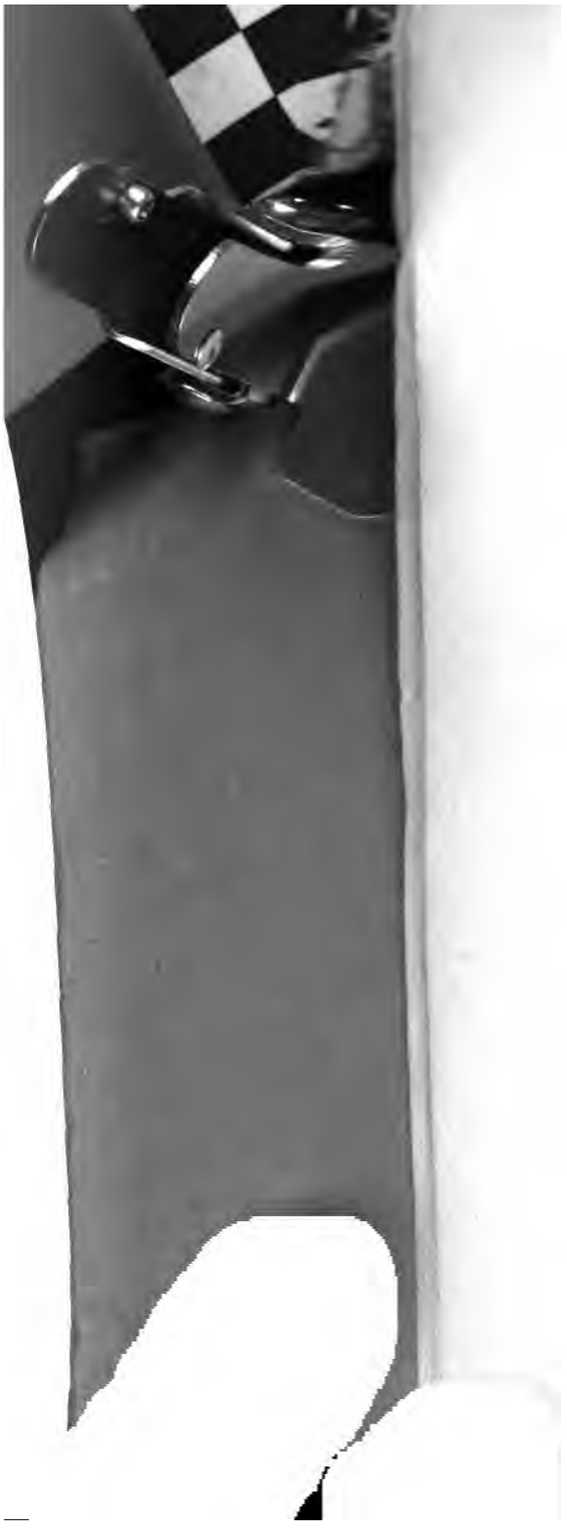
« Les prêtres me dirent encore que Sésostris fit le partage des terres, assignant à chaque Égyptien une portion égale et quarrée, qu'on tirait au sort, à la charge néanmoins de lui payer tous les ans une certaine redevance qui composait le revenu royal. Si une crue du Nil enlevait à quelqu'un une portion de son lot, il allait trouver Sésostris pour lui exposer l'accident, et le Roi envoyait sur les lieux des Arpenteurs pour mesurer de combien l'héritage était diminué, afin de ne faire payer la redevance convenue qu'à proportion du fonds qui restait. Voilà, je crois, l'origine de la Géométrie qui a passé de ce pays à la Grèce (1). »

Il est possible que Sésostris ait appliqué, le premier, l'Arpentage des terres à la juste répartition des impôts; mais cela même prouve que les principes de la Géométrie étaient connus sans doute longtemps avant lui.

Quoi qu'il en soit, cette Science fut introduite chez les Grecs par le Phénicien Thalès (639-548 av. J.-C.). Instruit en Égypte,

(1) HERODOTE, Livre II, § CIX.

RBSI
QA
445
R62



il apprit, dit-on, à ses maîtres à mesurer la hauteur des pyramides de Memphis par l'étendue de leurs ombres, et revint fonder à Milet l'École ionienne, pépinière de philosophes et de savants. On lui attribue l'emploi de la circonférence de cercle pour la mesure des angles, et c'est à lui qu'on fait remonter la théorie des Triangles semblables. Il répandit d'ailleurs le premier en Grèce les connaissances astronomiques qu'il avait sans doute puisées en Égypte.

Thalès eut pour disciple Pythagore de Samos (58o av. J.-C.), qui, après avoir voyagé en Égypte et dans les Indes, vint fonder en Italie l'École célèbre qui porte son nom.

Pythagore restera immortel, surtout par la proposition du carré de l'hypoténuse. Il en tira la conséquence relative à l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré, et lui ou ses élèves en déduisirent plusieurs propriétés générales des lignes incommensurables entre elles. Parmi les résultats qui semblent dus à Pythagore, on peut encore citer la propriété du cercle ou de la sphère d'être maximum parmi les figures de même périmètre ou de même aire, et la première théorie des corps réguliers qui devaient jouer un si grand rôle dans les rêveries cosmogoniques de l'antiquité et du moyen âge.

Remarquons que, dans la longue suite des philosophes grecs, qui s'étend depuis Thalès et Pythagore jusqu'à la fin de l'École d'Alexandrie (638 ap. J.-C.), presque tous ont cultivé à la fois l'Astronomie et la Géométrie qu'ils regardaient comme la Science primordiale, fondement de toutes les autres. C'est à eux qu'on doit ainsi la création à peu près entière de ce que nous appelons actuellement la *Géométrie élémentaire*. A cette époque, on ne séparait pas la Science de la Philosophie et, après un trop long intervalle, on revient aujourd'hui de plus en plus à cette alliance nécessaire.

L'essor de la Géométrie en Grèce date surtout de Platon (430-347 avant J.-C.). Ce grand homme alla d'abord s'instruire près des prêtres égyptiens; puis, en Italie, auprès des Pythagoriciens. De retour à Athènes, il introduisit dans la Science la méthode analytique, la théorie des sections coniques et la doctrine si féconde des lieux géométriques. C'était créer une Géométrie nouvelle, à laquelle on donna à cette époque le nom de *Géométrie transcendante*. Telle fut, en Mathématiques, l'œuvre magnifique de l'illustre Philosophe, chef du Lycée, qui inscrivit sur la porte de son École : « Que nul n'entre ici, s'il n'est géomètre. »

La doctrine des lieux géométriques fut appliquée dès ce temps, avec une très grande ingéniosité, aux problèmes fameux de la duplication du cube, des deux moyennes proportionnelles et de la trisection de l'angle. La difficulté de ces questions tenait à ce qu'on ne voulait les résoudre qu'à l'aide de la règle et du compas. On fut obligé d'y renoncer et de se servir d'autres lignes que la ligne droite et le cercle.

Les successeurs de Platon et de ses disciples étudièrent avec ardeur les sections coniques, dont Platon avait trouvé plusieurs propriétés. Ces célèbres courbes, qui devaient, deux mille ans plus tard, tenir tant de place dans la Philosophie naturelle, lors des superbes découvertes astronomiques de Képler et de Newton, furent donc complètement connues des Grecs.

De même que Platon avait rencontré les coniques, courbes du deuxième degré, en examinant les sections d'un cône par un plan, Perseus forma ses lignes *spiriques*, courbes du quatrième degré, en coupant un tore par un plan. Nous devons regretter la perte des écrits de Perseus à ce sujet, traité par lui géométriquement et qui exige encore aujourd'hui, au point de vue analytique, un calcul assez complexe. Nous ne mentionnons ici les spiriques que pour montrer que les an-

ciens ont pénétré, beaucoup plus avant qu'on ne pourrait le croire au premier abord, dans l'étude de la Géométrie.

En rassemblant les découvertes de ses devanciers et les siennes propres, Euclide (285 av. J.-C.) prépara celles de ses successeurs. Ce géomètre, qui établit le lien entre l'École Platonicienne et l'École d'Alexandrie, est surtout connu par ses *Éléments* où l'on voit apparaître, pour la première fois, la méthode de réduction à l'absurde. Toutefois, il avait écrit d'autres Ouvrages qui ne nous sont point parvenus et dont le plus profond était sans doute ce fameux *Traité des Porismes,* dont la divination, après avoir exercé vainement la sagacité des meilleurs esprits des siècles derniers, a été si heureusement accomplie par M. Chasles, d'après un passage obscur et quelques lemmes de Pappus.

Jamais aucun livre de science n'a eu une aussi longue influence que les *Éléments d'Euclide.* Ils ont été traduits et commentés dans toutes les langues, enseignés exclusivement pendant des siècles dans toutes les Écoles de Mathématiques : on les suit encore en Angleterre. Ils sont divisés en treize Livres, dont les six premiers et les trois derniers appartiennent à la Géométrie; les quatre autres se rapportent au calcul des grandeurs. On ne trouve pas dans les *Éléments* la mesure de la circonférence de cercle : cette découverte capitale était réservée à Archimède.

Les anciens géomètres cherchaient à mettre une extrême rigueur dans leurs démonstrations. Par cela même, celles d'Euclide sont quelquefois longues, indirectes et compliquées pour les commençants. Aussi, Ptolémée Philadelphe, roi d'Égypte, dont il fut le maître, lui demanda-t-il un jour d'aplanir un peu en sa faveur les difficultés de la route. « Seigneur, lui répondit Euclide, il n'y a pas en Géométrie de chemin particulier pour les rois. »

Immédiatement après Euclide, Archimède et Apollonius marquèrent l'apogée de la Géométrie chez les anciens. Toutes les branches des Mathématiques conservent les traces ineffaçables de leurs sublimes conceptions.

Les travaux d'Archimède (287-212 av. J.-C.), le plus grand mathématicien de l'antiquité, se rapportent spécialement à la Géométrie de la mesure.

En trouvant le rapport de la circonférence au diamètre et en effectuant de deux manières différentes la quadrature de la parabole, le géomètre de Syracuse donna les premiers exemples d'un problème résolu *par approximation* et de l'évaluation rigoureuse d'une aire à contour curviligne.

Le Traité des spirales, la proportion de la sphère et du cylindre circonscrit, la cubature des sphéroïdes (ellipsoïdes de révolution) et des conoïdes (paraboloïdes et hyperboloïdes de révolution), sans oublier dans un autre domaine le principe du levier, la notion du centre de gravité et l'équilibre des corps flottants ou plongés dans les liquides, sont autant d'inventions ou de découvertes capitales de ce génie créateur, auquel la Statique doit autant que la Géométrie.

La marche suivie par Archimède, pour démontrer des vérités mathématiques si nouvelles, constitue la *Méthode d'exhaustion* dans laquelle la *Méthode des limites* se trouve en germe.

Veut-il, par exemple, chercher l'aire enfermée par une courbe, il regarde cette courbe comme la *limite* dont s'approchent de plus en plus des polygones inscrits et circonscrits, quand on multiplie par bissection le nombre de leurs côtés, de manière que la différence tombe au-dessous de toute quantité donnée. Il *épuise*, pour ainsi dire, cette différence, d'où est venu le nom de la méthode. Une fois le résultat obtenu par voie de rapprochements successifs et par induction finale, Ar-

chimède revient à la méthode par l'absurde, pour l'établir en toute rigueur.

Le tombeau de ce prodigieux génie, oublié par les descendants de ceux qu'il avait si merveilleusement défendus contre les Romains, fut retrouvé deux cents ans après sa mort, caché sous les ronces, dans une campagne voisine de Syracuse : il portait gravés, selon le vœu du géomètre, le dessin de la sphère inscrite au cylindre et six vers grecs qui rappelaient sa découverte. Ces vestiges permirent à Cicéron, alors questeur en Sicile, de le retrouver après bien des recherches, et de ramener *une seconde fois*, comme il le dit, *Archimède à la lumière*.

Les écrits d'Apollonius (247 av. J.-C.) sont surtout relatifs à la Géométrie de la forme. Le principal semble le grand *Traité des Coniques*, qui valut à son auteur le surnom de *Géomètre par excellence*, et où l'on trouve les propriétés des asymptotes, des foyers, des diamètres conjugués, des normales, un théorème sur la polaire, la première idée des développées, et de belles questions de maximum et de minimum qui renferment tout ce que les méthodes analytiques actuelles nous enseignent sur ce sujet.

On attribue encore à Apollonius la célèbre théorie des épicycles, qui servaient à expliquer les mouvements apparents des planètes.

Le grand *Traité des Coniques* était divisé en huit Livres. Les quatre premiers sont arrivés jusqu'à nous en grec, c'est-à-dire dans le texte original ; nous ne connaissons les trois suivants que par une traduction arabe qui date du milieu du treizième siècle et qui fut elle-même mise en latin vers 1650 ; le huitième Livre est perdu. Le célèbre astronome Halley, par un effort de divination, a *restitué* ce huitième Livre d'après le plan d'Apollonius, et a publié à Oxford, en 1710, une magnifique édition du

Traité ainsi complété. C'est dans le septième Livre qu'Apollonius démontre les théorèmes importants qui portent son nom et qui lient les diamètres conjugués aux axes dans l'ellipse et dans l'hyperbole.

Ajoutons que ce fut lui qui, le premier, considéra les coniques sur un cône oblique à base circulaire, le plan sécant étant perpendiculaire au plan déterminé par l'axe et la hauteur du cône. On ne les avait étudiées jusque-là que sur le cône de révolution, et encore, en supposant le plan sécant perpendiculaire à l'une des génératrices du cône : on était ainsi obligé de prendre trois cônes d'angle différent pour obtenir les trois sections coniques, qui ne reçurent les noms sous lesquels nous les désignons aujourd'hui que dans l'Ouvrage de l'émule d'Archimède.

Les successeurs de ces deux hommes de génie dirigèrent leurs méditations vers l'Astronomie et vers les parties de la Géométrie qui se rattachent à cette Science. Nous nous contenterons de mentionner les principaux.

Hipparque (150 av. J.-C.), le plus grand astronome de l'antiquité, fut le véritable fondateur de l'Astronomie mathématique, l'inventeur de la Trigonométrie rectiligne et sphérique. C'est à lui qu'on doit très probablement faire remonter la découverte de la projection stéréographique, ainsi que celle des propriétés des transversales dans les triangles rectilignes ou sphériques, qu'on attribue parfois à Ptolémée, bien qu'on les trouve déjà dans Ménélaüs.

Le Traité des *Sphériques* de Théodose (100 av. J.-C.), où ce géomètre étudie diverses propriétés des grands cercles tracés sur la sphère, a eu beaucoup de réputation et peut être regardé comme une sorte d'introduction à la Trigonométrie sphérique.

Ménélaüs (80 ap. J.-C.), géomètre et astronome, publia aussi un Ouvrage portant le même titre que celui de Théodose,

mais allant plus loin puisqu'il traite spécialement des propriétés des triangles sphériques.

La plus importante proposition des *Sphériques* de Ménélaüs est celle qui concerne les six segments déterminés sur les trois côtés d'un triangle sphérique par un arc de grand cercle quelconque. Ménélaüs emploie comme lemme, pour sa démonstration, le théorème analogue de Géométrie plane dont Carnot a fait, de nos jours, le fondement de sa théorie des transversales.

Ptolémée (125 ap. J.-C.), astronome et géomètre du plus grand savoir, nous a laissé, dans son *Almageste*, le seul Traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique que nous aient légué les Grecs, puisque les écrits d'Hipparque sur ce sujet ont été perdus. Il établit sa Trigonométrie sphérique sur le théorème des six segments, qu'il donne comme Ménélaüs. On trouve, entre autres, dans l'*Almageste*, la belle propriété du quadrilatère inscrit dans le cercle, par laquelle le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.

Citons encore, de Ptolémée, son *Optique* et un Traité *des trois dimensions des corps*, où, le premier sans doute, il parle des trois axes rectangulaires auxquels la Géométrie analytique rapporte aujourd'hui le plus souvent la position d'un point quelconque dans l'espace.

Nous devons nommer avec honneur Pappus (385 ap. J.-C.), le plus célèbre commentateur des Ouvrages de l'École grecque qui s'était développée à Alexandrie, esprit original et profond dont Descartes faisait grand cas.

Ses précieuses *Collections mathématiques* représentent à peu près l'état de la Science à cette époque. Elles étaient divisées en huit Livres : les deux premiers ne sont pas parvenus jusqu'à nous; les autres renferment surtout des questions de Géométrie, mais l'Astronomie et la Mécanique n'y sont pas

oubliées. On y trouve la fameuse règle connue sous le nom de *Théorème de Guldin*, qui fait intervenir le centre de gravité d'une ligne ou d'une surface dans la mesure de l'aire ou du volume de révolution correspondant. Cette proposition, retrouvée par Guldin au commencement du XVIIe siècle, semble appartenir à Pappus. La préface du septième Livre renferme une définition précise de l'*analyse* et de la *synthèse*, et le géomètre alexandrin donne ensuite des exemples de ces deux méthodes appliquées tour à tour à une même question. On voit, par les problèmes qu'il résout, que les anciens s'étaient livrés d'une manière assez approfondie à l'étude des surfaces courbes et des lignes à double courbure tracées sur ces surfaces. Enfin, on rencontre dans les *Collections* la propriété fondamentale du rapport anharmonique, le germe de la théorie de l'involution, un cas particulier de la belle propriété de l'hexagone inscrit dans une conique et la notion de la directrice dans ces courbes, qui avait échappé à Apollonius.

La Géométrie dite moderne a donc ses racines dans l'antiquité, et ses progrès eussent été bien plus rapides sans l'arrêt imposé aux sciences par les bouleversements et les transformations qui suivirent la décadence et la chute de l'empire romain.

L'École d'Alexandrie, après Pappus, fut encore prolongée par Serenus; par Dioclès, inventeur de la cissoïde; par Proclus, philosophe célèbre, qui cultiva les Mathématiques et dont nous avons un commentaire curieux sur le premier Livre d'Euclide. Mais elle avait déjà perdu tout son éclat lors de la conquête arabe (638 ap. J.-C.). Au VIIIe siècle, et surtout au IXe, l'école de Bagdad compta quelques commentateurs habiles des Ouvrages grecs échappés aux désastres successifs de la bibliothèque d'Alexandrie; mais, en Europe, mille ans s'écoulèrent dans une profonde stagnation, et ce n'est que vers le

milieu du XVIe siècle que la Géométrie, suivant le mouvement général des Lettres, des Sciences et des Arts, se ranima.

Pour être juste envers les Arabes, il faut cependant reconnaître que la Trigonométrie leur doit la forme simple et commode sous laquelle nous l'appliquons. Par la substitution des sinus aux cordes des arcs doubles qu'on employait auparavant, ils abrégèrent notablement les calculs.

Dès le commencement de la Renaissance, le fil fut enfin renoué, la tradition reconstituée, et l'ancienne Géométrie cultivée en Europe avec succès. La plupart des Ouvrages laissés par les géomètres grecs furent traduits en latin ou en italien. L'étude des langues anciennes, alors fort répandue, multipliait les moyens d'instruction.

Notre compatriote Viète (1540-1603), en inventant l'Algèbre dont il fut le véritable créateur, compléta la Méthode analytique de Platon qu'il introduisit ainsi dans la science des nombres. Il eut encore la gloire d'appliquer le même algorithme à la Géométrie. Par sa construction graphique des équations du deuxième et du troisième degré, il fit un premier pas dans la voie féconde, qui devait, en unissant intimement l'Algèbre et la Géométrie, conduire aux grandes découvertes de Descartes et mettre en notre possession la clé universelle des Mathématiques.

Très versé aussi dans la Géométrie des anciens, Viète restitua le traité perdu d'Apollonius, *De Tactionibus* (des contacts), sous le titre d'*Apollonius Gallus*. C'est là qu'il résolut, le premier, le problème du cercle tangent à trois cercles donnés, problème difficile alors, mais dont les méthodes modernes ont offert des solutions plus élégantes et plus simples. Il perfectionna en outre, de la manière la plus utile, la Trigonométrie sphérique, en résolvant notamment quelques cas nouveaux des triangles sphériques qui n'avaient point reçu d'application

en Astronomie, par exemple celui où l'on doit trouver un angle connaissant les trois côtés.

On remarque, dans la Trigonométrie de Viète, une idée neuve et très heureuse sur la *transformation* des triangles sphériques. Le triangle *réciproque* considéré par Viète conduisit, sans nul doute, le célèbre Snellius à la découverte du triangle *polaire* ou *supplémentaire*, première apparition dans la Science (1627) de la loi générale de *dualité de l'étendue* que M. Chasles devait, plus de deux siècles après, mettre en pleine lumière.

C'est au grand Kepler (1571-1631) qu'on doit l'introduction de l'idée de *l'infini* en Géométrie. Il put, par son aide, généraliser les recherches d'Archimède sur la cubature des sphéroïdes et des conoïdes, en faisant tourner la conique autour d'une droite située dans son plan. Il faut encore ajouter à l'actif en Géométrie du fondateur de l'Astronomie moderne la doctrine des polygones étoilés (retrouvée de nos jours par Poinsot), et sa belle méthode des projections pour déterminer, par une construction graphique et près de deux cents ans avant l'invention de Monge, les circonstances des éclipses de Soleil pour les habitants des différentes régions terrestres.

Quelques années après Kepler, Cavalleri (1598-1647) donna sa *Géométrie des indivisibles*, où il montrait, comme l'illustre astronome, à évaluer les grandeurs géométriques par leurs éléments. La méthode de Cavalleri, qui a suppléé pendant cinquante ans au Calcul intégral, n'est, comme il l'a fait voir lui-même, qu'une transformation heureuse de la méthode d'exhaustion, si habilement appliquée par Archimède.

Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), à son tour, mais d'une manière qui lui était propre, appliqua, comme Cavalleri et Roberval, la méthode d'exhaustion d'Archimède aux quadratures curvilignes. Il a mérité par là d'être regardé, lui aussi,

comme un des précurseurs du Calcul infinitésimal. La Géométrie des sections coniques lui doit de nombreuses découvertes, et il écrivit un Traité remarquable sur les rapprochements singuliers qu'on peut faire entre la parabole et la spirale, dont les propriétés se correspondent. Il donna ainsi l'occasion à Pascal de composer son beau Mémoire sur l'*égalité des lignes spirale et parabolique*, premier exemple de la comparaison de deux lignes d'espèce différente par la Géométrie des anciens.

Descartes (1596–1650), Fermat (1590–1663), Roberval (1602–1675), eurent presque au même instant la gloire de résoudre dans toute sa généralité, chacun par une voie distincte, le Problème des *tangentes* aux lignes courbes, prémisses nécessaires de l'invention du Calcul différentiel.

On connaissait des solutions particulières de ce Problème pour quelques courbes, comme les coniques et la spirale d'Archimède; mais ces solutions restaient impuissantes dans leur étroitesse spéciale, dès qu'on voulait aborder une courbe nouvelle. La Géométrie demeurait concrète; elle ne s'était point élevée au caractère abstrait qui pouvait seul lui donner toute son étendue et toute sa puissance.

Descartes et Fermat, en appliquant différemment ce point de vue, regardaient tous deux la tangente à une courbe comme une sécante dont deux points d'intersection sont réunis; Roberval la considérait comme la direction du mouvement résultant par lequel la courbe peut être décrite. Sa méthode, qui rentre mieux que celle de Descartes ou de Fermat dans la Géométrie pure, était ainsi fondée sur la composition des mouvements, doctrine découverte par Galilée peu de temps auparavant et appliquée par lui à la seule Mécanique. L'idée de déduire des considérations de mouvement un principe de génération de toutes les courbes fait certainement grand honneur à Roberval.

Le profond Fermat, dans les écrits duquel apparaissent, comme dans ceux de Kepler, les germes évidents de la *Méthode infinitésimale*, qui fut sans égal dans la *Théorie des nombres*, qui partage avec Pascal la gloire de l'invention du *Calcul des probabilités*, qui, par l'application de sa belle Méthode *De maximis et minimis* au phénomène de la réfraction de la lumière, a mérité d'être associé à Descartes comme introducteur des Mathématiques dans l'étude des phénomènes naturels, Fermat excella aussi dans la Géométrie des anciens. On lui est redevable de la restitution des *lieux plans* d'Apollonius, ouvrage perdu, et il a donné la première solution complète des problèmes relatifs au contact des sphères, solution remarquable, mais qui a été dépassée depuis.

Pascal (1623-1662), si justement renommé pour ses étonnants travaux sur la cycloïde, sur les indivisibles et sur le calcul des probabilités, avait trouvé, dès l'âge de seize ans, la belle propriété de l'*hexagramme mystique* (ou de tout hexagone inscrit à une conique, d'avoir en ligne droite les trois points de concours de ses côtés opposés). Il la prit pour base d'un Traité complet des coniques. Cet ouvrage a été malheureusement perdu, comme beaucoup d'autres de ce génie hors ligne et d'une si effrayante précocité, et nous n'en possédons qu'une sorte de programme, l'*Essai sur les coniques*, que Pascal publia dès 1640.

Dans les écrits de Pascal, on reconnaît l'influence de son contemporain, le Lyonnais Desargues (1593-1663), qu'un savant géomètre de nos jours, Poncelet, a surnommé le *Monge de son siècle*. Les anciens, qui étudiaient les sections coniques dans le cône même, employaient des démonstrations souvent pénibles et surtout différentes pour les trois courbes. Desargues, en cherchant à leur appliquer directement les propriétés du cercle qui était la base du cône, parvint à des

démonstrations qui convenaient à la fois aux trois espèces de coniques, malgré la différence de forme de ces lignes. Il découvrit la propriété involutive du quadrilatère inscrit dans une conique, la propriété fondamentale des triangles homologiques, et écrivit avec le même talent et le même esprit de généralisation sur la Coupe des pierres, la Gnomonique et la Perspective.

Placés au point de vue de la Géométrie proprement dite, nous devons seulement mentionner la création de la *Géométrie analytique* par Descartes (1637). L'avènement de cette nouvelle doctrine, si séduisante par son caractère d'universalité, si facilement féconde, et dont on ne trouve aucun germe dans les écrits des anciens, fut une véritable révolution. Le grand philosophe, par cette admirable conception de l'*Application de l'Algèbre à la théorie des courbes*, put franchir des obstacles qui avaient arrêté les plus profonds géomètres, et changea la face des sciences mathématiques. On le suivit avec enthousiasme, et un coup funeste fut porté à la Géométrie pure.

Cependant, quelques esprits éminents s'opposèrent à cette décadence, et soutinrent dignement l'honneur des méthodes anciennes. Nous citerons surtout Huygens (1629-1695) et de la Hire (1640-1718).

Huygens, que Newton proclamait *le plus excellent imitateur des anciens*, et que Leibnitz plaçait au premier rang parmi les hommes de son siècle, créa la théorie des développées et découvrit les lois de la force centrifuge. Son célèbre Traité, *De horologio oscillatorio*, est l'indispensable introduction des *Principes* de Newton, et se place tout à côté dans l'histoire des grandes conceptions de l'esprit humain. Il faut en dire autant du *Traité de la Lumière* de l'illustre Hollandais, à qui l'on doit la théorie des ondes.

Le principal ouvrage publié par de la Hire est un grand

Traité des sections coniques divisé en neuf livres, et qui eut une grande réputation dans l'Europe savante. Dans ce Traité, il s'élève des propriétés du cercle, base du cône, aux propriétés analogues des sections de la surface par un plan tout à fait quelconque, et l'on peut, à juste titre, regarder cet habile géomètre comme un continuateur de Pascal et de Desargues. Son Mémoire sur les épicycloïdes, sa théorie des roulettes et son Traité de Gnomonique méritent d'être rappelés. C'est à lui qu'on doit la théorie du pôle et de la polaire, dont Apollonius n'avait connu qu'un théorème, et la transformation homologique, qui, employée ensuite par Newton, a été retrouvée de nos jours d'une autre manière et développée avec un rare talent par Poncelet dans son beau *Traité des propriétés projectives des figures* (*), où l'on trouve les applications les plus intéressantes et les plus variées de cette théorie.

En résumé, trois sortes de Géométrie s'offraient à cette époque aux méditations des savants : la Géométrie des anciens, la Géométrie analytique de Descartes, et une troisième espèce de Géométrie, celle de Desargues et de Pascal, qui devait prendre une si grande extension au XIXe siècle et dont on rencontre déjà quelques principes dans les *Porismes* d'Euclide et les *Collections* de Pappus. « Cette troisième branche de la » Géométrie, qui constitue aujourd'hui ce que nous appelons » la *Géométrie récente,* est exempte de calculs algébriques, » quoiqu'elle fasse un aussi heureux usage des relations » métriques des figures que de leurs relations de situation ; » mais elle ne considère que des rapports de distances recti- » lignes d'un certain genre, qui n'exigent ni les symboles ni » les opérations de l'Algèbre. Cette Géométrie est la conti- » nuation de l'*Analyse géométrique* des anciens, sur laquelle

(*) Deuxième édition, 1865; 2 vol. in-4°, avec planches, chez Gauthier-Villars.

» elle offre d'immenses avantages par la généralité, l'uniformité et l'abstraction de ses méthodes, et par l'usage si utile » de la contemplation des figures à trois dimensions dans les » simples questions de Géométrie plane (*). »

La découverte du Calcul infinitésimal à la fin du XVIIe siècle arrêta à son tour les progrès de la Géométrie. Cette sublime invention, qui suffirait seule pour immortaliser les noms de Newton et de Leibnitz, s'appliqua avec une si grande facilité à la Géométrie des mesures et à l'étude des phénomènes naturels, qu'elle devint presque exclusivement l'objet des travaux des plus illustres géomètres. Toutefois la chaîne ne fut pas entièrement rompue. Newton lui-même, donnant l'exemple, prouva, dans ses admirables *Principes de la Philosophie naturelle*, que la Géométrie pure se prête aux recherches de l'ordre le plus élevé. Cotes (1682-1716) et Maclaurin (1698-1746) étudièrent les propriétés générales des courbes géométriques. L'astronome Halley (1656-1742), par ses belles traductions d'Apollonius et de Ménélaüs; Simson (1687-1768), par ses écrits sur les coniques, sa restitution de la *section déterminée* d'Apollonius et sa remarquable tentative de divination des Porismes; Stewart (1717-1785), par ses *Théorèmes généraux*, tâchèrent de ranimer le goût des méthodes anciennes. Mais, en dépit de ces louables efforts, et malgré quelques questions traitées par Euler (1707-1783), Lambert (1728-1777) et d'autres célèbres analystes, aucune doctrine nouvelle ne surgit jusqu'au XIXe siècle, et cette période se distingue surtout par les belles applications que l'on fit de la Géométrie à l'étude des phénomènes naturels.

Au commencement du XIXe siècle, la création de la Géométrie descriptive marqua une ère nouvelle dans l'histoire de la

(*) CHASLES, *Aperçu historique*,... Bruxelles, 1837.

Géométrie. Considérée comme simple doctrine géométrique, indépendamment de son utilité pratique, la Géométrie de Monge fut d'un immense secours dans l'étude des propriétés de l'étendue. En familiarisant l'esprit avec la forme des corps, elle développa notre puissance de conception, éclaira la Géométrie analytique dont elle apprit à interpréter les résultats avec une grande facilité, et permit de raisonner, dans les cas les plus compliqués, sans le secours de ces figures qui, en absorbant l'attention, entravent la pensée. Elle montra l'alliance intime des figures planes et des figures de l'espace, et la science s'enrichit dès lors de ces méthodes élégantes et tant cultivées depuis qui permettent de déduire des propriétés des figures à trois dimensions les théorèmes de la Géométrie plane.

C'est encore à Monge et à son école qu'on doit l'introduction dans la Science d'un mode de démonstration qui, bien que manquant au fond de cette rigueur si justement recherchée des géomètres anciens, a cependant conduit à de magnifiques résultats. Nous voulons parler du *principe des relations contingentes* ou *de continuité :* « Certaines parties d'une figure, » considérées dans un état général de construction, peuvent » être indifféremment réelles ou imaginaires. Or il arrive » souvent que ces parties servent utilement, dans le cas de » la réalité, à la démonstration d'un théorème, et que cette » démonstration n'a plus lieu quand ces mêmes parties de- » viennent imaginaires. Alors on dit qu'en vertu du *principe de* » *continuité* le théorème démontré dans le premier cas s'étend » au second, et on l'énonce d'une manière générale. Quelque- » fois le contraire a lieu, et c'est quand certaines parties d'une » figure sont imaginaires que l'on y trouve les éléments d'une » démonstration facile, dont on applique ensuite les consé- » quences, en vertu du *principe de continuité,* au cas où ces » mêmes parties sont réelles et où la démonstration n'existe

» plus (*). » Tel a été le point de départ de l'introduction des imaginaires en Géométrie; mais nous devons ajouter que cette introduction si importante n'a été accomplie, d'une manière véritablement irréprochable, qu'un peu plus tard par M. Chasles, dont les démonstrations se distinguent par ce caractère spécial, que les objets susceptibles de devenir imaginaires n'y entrent pas sous forme explicite, mais y sont représentés par des éléments réels, de même que les racines d'une équation n'entrent pas elles-mêmes dans les calculs de la Géométrie analytique, mais y sont représentées collectivement par les coefficients de cette équation.

L'apparition de la *Géométrie* de Monge recula les bornes de la Géométrie pure, un peu délaissée depuis un siècle, et l'on chercha dès lors à obtenir par cette voie seule les nombreux résultats dont l'analyse de Descartes avait enrichi la Science. Parmi les ouvrages entrepris dans ce but et qu'on peut regarder comme l'heureuse continuation de ceux de Desargues et de Pascal, il faut citer au premier rang la *Géométrie de position* et l'*Essai sur les transversales* de Carnot, les *Développements de Géométrie* de Charles Dupin, et le grand *Traité des Propriétés projectives des figures* dans lequel Poncelet, par l'habile emploi du principe de continuité et la belle création des théories des polaires réciproques et des figures homologiques, a démontré toutes les propriétés connues des lignes et des surfaces du second ordre, et a doté en outre la Science d'une foule de résultats nouveaux. Il convient de signaler encore les savants écrits de Hachette, Brianchon, Gergonne, Dandelin, Quetelet, les travaux de Gaultier, de Steiner et de Gudermann sur la Géométrie de la sphère qu'avaient déjà cultivée Lexell, Fuss, Lhuillier de Genève et

(*) Chasles. Préface de la *Géométrie supérieure*, 1846.

Magnus de Berlin; la belle *Théorie de la rotation des corps* de Poinsot; les études de ce géomètre, de Cauchy et de M. Bertrand sur les polyèdres; enfin les belles recherches de Géométrie infinitésimale de M. O. Bonnet.

Les travaux de M. Chasles sont le dernier terme des progrès continus réalisés par la Géométrie depuis soixante ans. Il suffit de citer l'*Aperçu historique*, la *Géométrie supérieure*, le *Traité des Porismes;* les recherches sur l'*attraction des ellipsoïdes*, sur les *cônes du second ordre*, sur les *surfaces réglées;* le Mémoire sur la *dualité* et l'*homographie*, ces deux lois si générales de l'étendue figurée; la nouvelle méthode de détermination des *caractéristiques des systèmes de coniques*, et tant d'autres productions de ce maître éminent.

La Géométrie marche donc à grands pas dans une voie féconde. Grâce aux belles conquêtes de notre siècle, elle a regagné sur l'Analyse le terrain perdu.

Après cette rapide excursion dans le domaine de l'histoire, nous devons dire un mot du Traité que nous présentons au lecteur.

Il y a deux manières d'écrire un livre destiné aux études : on peut se restreindre aux *Programmes officiels* et n'en pas franchir le cadre; on peut aussi, en suivant strictement ces Programmes dans ce qu'ils ont d'obligatoire, aller au delà et essayer de les compléter. Pour appliquer une science, il ne suffit pas d'en connaître quelques parties; il faut être familiarisé avec toutes ses méthodes, en saisir l'ensemble. Les magnifiques découvertes de la Géométrie moderne n'ont pas pénétré dans l'enseignement; délaissées par les Programmes, elles n'occupent pas dans la série des études mathématiques la place qui leur est due; on en parle à peine et accessoire-

ment en Géométrie analytique, où elles semblent bien à tort être une nouvelle conquête de l'admirable instrument créé par Descartes. Nous sommes loin de reprocher aux Programmes leur silence à cet égard; ils sont tellement chargés, qu'on serait mal venu à réclamer une addition. Mais ne peut-on *apprendre* un programme d'examen et essayer en même temps de *comprendre* la portée de la science que l'on étudie, en prenant une connaissance rapide, une vue générale de ses principales méthodes? Telle est la pensée qui nous a guidés dans la composition de cet Ouvrage; c'est aussi celle qui apparaît dans le choix des caractères employées.

Borné aux parties imprimées en caractères ordinaires, l'Ouvrage est entièrement conforme aux Programmes officiels et à leur esprit. Les numéros imprimés en petits caractères contiennent d'utiles développements du texte destinés aux candidats aux Écoles spéciales. Enfin les Appendices sont consacrés à l'exposition des nouvelles méthodes. L'élève studieux les lira à son aise sans se préoccuper de la nécessité de retenir immédiatement tous les détails; il y puisera une profonde admiration pour la science dont les limites lui apparaîtront si lointaines, un goût des spéculations mathématiques qui donnera à son esprit plus de rectitude et de fermeté; et, à mesure que son savoir gagnera en étendue, par une réaction inévitable, les matières exigées, éclairées par ses nouvelles connaissances, perdront pour lui leur difficulté première.

La Table analytique des Matières indique suffisamment les améliorations nombreuses apportées à cette sixième édition. Nous mentionnerons cependant, en particulier, les développements plus étendus consacrés à l'exposé des différentes méthodes de résolution des problèmes; les premières notions sur l'involution données dès la Géométrie plane; l'étude des faisceaux de cercles; l'examen détaillé de quelques pro-

blèmes remarquables, devenus classiques. On nous permettra de dire, à cet égard, que nous croyons avoir amélioré l'élégante solution du problème du cercle tangent à trois cercles donnés, due à Gergonne, en la rendant complètement générale et en la débarrassant de toute ambiguïté.

Nous devons ajouter que, depuis quelques années, un grand nombre de géomètres se sont occupés des propriétés du triangle, et qu'un nouveau Chapitre très intéressant a été ajouté par eux à la Science. Nous ne pouvions laisser ces recherches de côté, et nous commencions à les coordonner pour notre nouvelle Édition, lorsque M. J. Neuberg, professeur à l'Université de Liège, et l'un de ceux qui, avec MM. E. Lemoine et H. Brocard, ont le plus contribué à ces découvertes, a bien voulu nous communiquer un travail complet sur ce sujet et en extraire, en notre faveur, la Note III placée à la fin de cette première Partie de notre Traité. Cette Note lui appartient intégralement, et nous nous sommes bornés à y ajouter quelques indications bibliographiques très succinctes. Nous sommes heureux de témoigner ici notre gratitude à M. J. Neuberg pour son obligeante confraternité scientifique, sans oublier nos éditeurs et amis qui n'ont pas hésité à faire exécuter, pour cette Note complémentaire, des figures très compliquées.

Nous ne pouvons mieux faire, en terminant, que de continuer à remercier nos collègues et nos lecteurs. C'est grâce à eux que nous pouvons poursuivre notre tâche, en maintenant toujours ce Traité à la hauteur des progrès réalisés.

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE.

INTRODUCTION.

1. La considération des corps matériels nous suggère l'idée d'*étendue* ou de *volume*. Le volume d'un corps est essentiellement limité; sa limite, qui le sépare de l'espace environnant, prend le nom de *surface*. Les diverses faces d'un corps sont autant de surfaces dont les limites ou les intersections mutuelles s'appellent *lignes*. Enfin, on donne le nom de *points* aux limites ou extrémités d'une ligne, aux intersections mutuelles des lignes.

Ces idées de *surface*, de *ligne* et de *point*, étant une fois acquises par la considération des corps, la surface, la ligne et le point peuvent ensuite être conçus indépendamment du corps, des surfaces et des lignes, dont ils constituent les limites. C'est ainsi qu'on arrive à regarder inversement une ligne comme le lieu des positions successives d'un point mobile, et une surface comme le lieu des positions successives d'une ligne qui se meut suivant une loi déterminée.

On donne le nom de *figure* à un ensemble quelconque de surfaces, de lignes ou de points.

La Géométrie a pour objet l'étude des propriétés des figures, et en particulier, comme son nom l'indique, la mesure de l'étendue.

2. La plus simple de toutes les lignes est la *ligne droite*,

dont la notion est familière à tout le monde, et dont un fil tendu offre l'image.

Cette ligne est caractérisée par la propriété suivante : ***Deux points déterminent une droite;*** en d'autres termes, par deux points on peut toujours faire passer une droite, et l'on n'en peut faire passer qu'une. D'où il suit que *deux droites qui ont deux points communs coïncident, non-seulement entre ces deux points, mais encore dans toute leur étendue;* et, par conséquent, que *deux droites distinctes ne peuvent avoir qu'un point commun.*

3. En Géométrie, on indique un point par une lettre, une droite par deux lettres affectées à deux de ses points. Ainsi, l'on dit le point A, la droite AB (*fig.* 1).

Fig. 1.

Deux portions AB et CD, prises respectivement sur deux droites *indéfinies*, ont la même *longueur* lorsqu'elles sont superposables. La droite CD étant transportée de manière que le point C tombe en A, si l'on peut amener le point D sur le point B en faisant tourner la droite CD autour du point A, la portion CD aura une longueur égale à celle de la portion AB.

Pour *ajouter* deux portions de droites AB et CD, on porte l'une d'elles, CD, en BE, à la suite de l'autre prolongée : la *somme* est la longueur de la droite AE comprise entre les points extrêmes; elle est indépendante de l'ordre des parties.

Une droite AE est dite *plus grande* qu'une autre CD, lorsque sa longueur est la somme des longueurs de cette autre et d'une troisième.

On remarquera que nous n'avons pas défini le mot *longueur;* c'est que l'idée de longueur est une de ces notions premières qu'on ne sait ramener à aucune autre. Aussi bien, hâtons-nous de le dire, il n'est pas nécessaire de savoir définir une grandeur pour pouvoir la mesurer (1), c'est-à-dire la com-

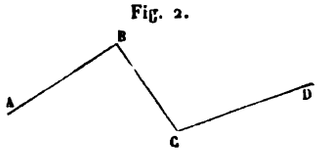
(1) *Voir*, à la fin du Volume, la Note I *Sur la mesure des grandeurs.*

parer à une autre grandeur de même espèce prise pour unité; il suffit de posséder la notion des grandeurs de cette espèce et d'avoir défini leur égalité et leur addition. C'est ainsi qu'après avoir défini, comme nous venons de le faire, l'égalité et l'addition des lignes droites, on conçoit nettement ce que c'est qu'une portion de droite double, triple, ..., d'une autre, et en général ayant avec cette autre un rapport quelconque.

On nomme *distance de deux points* A et B la longueur de la droite qui joint ces deux points. Nous n'*admettons* pas que la distance ainsi définie représente le plus court chemin du point A au point B; c'est là, non un axiome, mais un théorème, qui sera démontré ultérieurement.

4. On nomme *ligne brisée* une ligne formée de plusieurs portions de droites distinctes; telle est la ligne ABCD (*fig.* 2).

Fig. 2.



On confond sous la dénomination commune de *lignes courbes* toutes les lignes autres que la ligne droite ou les lignes brisées.

5. La plus simple de toutes les surfaces est le *plan*, dont une glace polie peut donner l'idée. La définition géométrique du plan consiste en ce que toute droite qui joint deux points de cette surface y est contenue tout entière. C'est ainsi, par exemple, que, pour vérifier si une table est plane, on s'assure qu'on peut y appliquer *dans tous les sens* une règle bien dressée, sans qu'il reste aucun vide entre la table et la règle.

Une surface formée de plusieurs portions de plans distinctes est dite *brisée;* et l'on confond sous la dénomination commune de *surfaces courbes* toutes les surfaces autres que le plan et les surfaces brisées.

On divise la Géométrie en deux parties : la *Géométrie plane*, relative aux figures situées dans un plan unique, et la *Géométrie dans l'espace*, relative aux figures dont les éléments peuvent être disposés d'une manière quelconque dans l'espace.

6. Nous terminerons cette Introduction par quelques remarques importantes.

Toute proposition consiste dans une *hypothèse* et une *conclusion* qui en découle, soit immédiatement, soit en vertu d'un raisonnement qu'on appelle *démonstration*.

On nomme *réciproque* d'une proposition une seconde proposition dont l'hypothèse et la conclusion sont respectivement la conclusion et l'hypothèse de la première. La *proposition contraire* d'une proposition est une autre proposition dont l'hypothèse et la conclusion sont respectivement la négation de l'hypothèse et de la conclusion primitives. Ainsi, la proposition « *Si* A *égale* B, C *égale* D » a pour réciproque : « *Si* C *égale* D, A *égale* B », et pour contraire : « *Si* A *n'est pas égal à* B, C *n'est pas égal à* D ».

La vérité de la réciproque d'une proposition entraîne celle de la proposition contraire. Ainsi, soit la proposition : « *Si* A *égale* B, C *égale* D »; de la réciproque : « *Si* C *égale* D, A *égale* B », il résulte que « *si* A *n'est pas égal à* B, C *n'est pas égal à* D »; car si C était égal à D, A serait égal à B.

De même, la vérité de la proposition contraire d'une proposition entraîne la vérité de la réciproque.

7. En général, *lorsque dans une proposition ou dans une série de propositions on a fait toutes les hypothèses possibles sur un sujet déterminé et que ces hypothèses ont conduit à des conclusions respectives essentiellement distinctes et dont chacune exclut toutes les autres, on peut affirmer que les réciproques des propositions établies sont toutes vraies.* Nous ferons dans la suite un fréquent usage de ce principe.

GÉOMÉTRIE PLANE.

LIVRE PREMIER.

LA LIGNE DROITE.

§ I. — DES ANGLES.

DÉFINITIONS.

8. La considération de deux droites AB et AC qui se rencontrent (*fig.* 3) conduit à une idée nouvelle, qui est celle d'*inclinaison* mutuelle ou d'*angle*, et qui, comme l'idée de longueur, ne saurait être définie, c'est-à-dire ramenée à une idée plus simple; ce qu'on définit, c'est l'*égalité* et l'*addition* des angles.

Fig. 3.

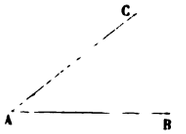
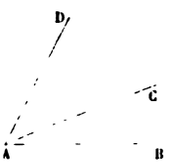


Fig. 4.



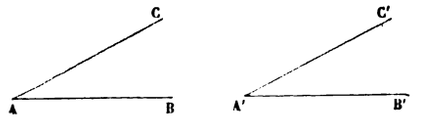
Les deux droites AB et AC sont les *côtés* de l'angle, et leur point d'intersection A est son *sommet*. On désigne un angle isolé par la lettre du sommet. Lorsque plusieurs angles ont même sommet, on indique celui des angles qu'on considère au moyen de trois lettres, savoir : deux lettres placées sur les côtés et la lettre du sommet qu'on énonce au milieu. Ainsi, dans la *fig.* 3, on dit simplement l'angle A; dans la *fig.* 4, on distingue les trois angles BAC, CAD, BAD.

Deux angles, tels que BAC et CAD, qui ont le même sommet A, un côté commun AC, et les deux autres côtés AB et AD

situés de part et d'autre du côté commun, sont appelés *adjacents*.

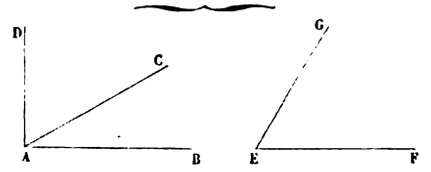
9. On dit que deux angles sont *égaux* lorsqu'on peut les porter l'un sur l'autre, de manière qu'ils coïncident. Ainsi, lorsqu'on aura placé le côté A′ B′ sur AB, de façon que le sommet A′ soit en A et que le côté A′ C′ tombe comme AC au-dessus de AB (*fig.* 5), il faudra, pour que les angles A et A′ soient égaux, que le côté A′ C′ s'applique sur AC.

Fig. 5.



Pour ajouter deux angles BAC, FEG, on transporte l'un d'eux à la suite de l'autre (*fig.* 6), de manière à former les deux angles adjacents BAC, CAD; l'angle BAD des deux côtés non communs AB et AD est la *somme* des deux angles proposés; cette somme est indépendante de l'ordre des parties.

Fig. 6.



10. D'après ces définitions, la grandeur d'un angle est indépendante de la longueur de ses côtés.

Si l'on suppose que l'un des côtés AC, d'abord appliqué sur l'autre AB, tourne autour du point A, comme une branche de compas autour de sa charnière, le côté mobile AC fait avec le côté fixe AB un angle qui croît d'une *manière continue*.

11. On dit qu'une droite AO est *perpendiculaire* sur une droite BC (*fig.* 7), lorsque les deux angles adjacents AOB, AOC,

qu'elle forme avec celle-ci, sont *égaux*. Si la droite AO est telle (*fig.* 8), que les angles adjacents AOB, AOC, soient *inégaux*, on dit que cette droite est *oblique* sur BC.

Fig. 7.

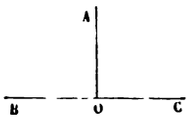


Fig. 8.

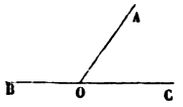


Fig. 9.

Le point O est le *pied* de la perpendiculaire ou de l'oblique AO.

On appelle *angle droit* tout angle AOB (*fig.* 9) dont un côté est perpendiculaire sur l'autre.

12. Deux angles sont dits *opposés par le sommet* lorsque les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre. D'après cela, deux droites indéfinies BB′ et CC′ (*fig.* 10) forment, en se coupant au point A, quatre angles BAC, et B′AC′, CAB′ et BAC′, qui sont deux à deux opposés par le sommet.

Fig. 10.

THÉORÈME.

13. *Par un point* A, *pris sur une droite* DC, *on peut toujours élever une perpendiculaire* AB *sur cette droite, et l'on ne peut en élever qu'une* (*fig.* 11).

En effet, supposons qu'une droite AE, d'abord appliquée sur AC, tourne autour du point A dans le sens de la flèche. L'angle EAC, nul au début, croîtra constamment, tandis que

l'angle adjacent EAD diminuera sans cesse et finira par s'annuler, lorsque la droite AE viendra s'appliquer sur AD. Donc l'angle EAC, d'abord inférieur à l'angle EAD, différera de moins en moins de cet angle, lui deviendra égal, puis le surpassera de plus en plus. D'après cela, parmi les positions successives de la droite AE, il y en aura une, et une seule AB, pour laquelle les angles adjacents BAC et BAD seront égaux, c'est-à-dire pour laquelle cette droite sera perpendiculaire sur DC.

Fig. 11.

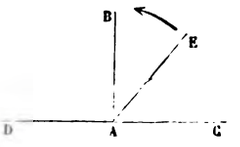
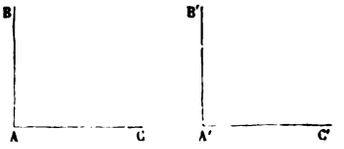


Fig. 12.



COROLLAIRE.

14. *Tous les angles droits sont égaux.*

Soient (*fig.* 12) les deux angles BAC, B'A'C', qui ont été formés, le premier en élevant la perpendiculaire AB sur AC, le second en élevant la perpendiculaire A'B' sur A'C'; ces deux angles sont droits, et il faut démontrer qu'ils sont égaux. Transportons à cet effet la deuxième figure sur la première, de façon que le point A' tombe en A et que le côté A'C' s'applique sur AC; le côté A'B' deviendra alors perpendiculaire sur AC au point A : il s'appliquera donc sur AB, puisque par le point A on ne peut élever sur AC qu'une seule perpendiculaire. Donc les deux angles BAC, B'A'C' coïncideront, c'est-à-dire (9) seront égaux.

SCOLIE.

15. L'angle droit est donc un type invariable auquel on peut rapporter les autres angles.

On dit qu'un angle est *aigu* ou *obtus* suivant qu'il est *plus petit* ou *plus grand* que l'angle droit. Ainsi, dans la *fig.* 11, l'angle EAC est aigu et l'angle EAD est obtus.

Deux angles sont dits *complémentaires* lorsque leur somme est égale à un angle droit. Ainsi, dans la *fig.* 11, chacun des

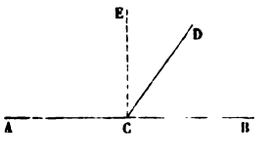
angles BAE, EAC est le *complément* de l'autre. Deux angles qui ont des compléments égaux sont égaux.

Deux angles sont dits *supplémentaires* lorsque leur somme est égale à deux angles droits. Deux angles qui ont des suppléments égaux sont égaux.

THÉORÈME.

16. *Deux angles adjacents* ACD, BCD *sont supplémentaires si leurs côtés extérieurs* AC *et* CB *sont en ligne droite* (*fig.* 13).

Fig. 13.



En effet, si CD est perpendiculaire sur AB, le théorème est évident, puisque les angles adjacents ACD, BCD sont droits tous les deux.

Si CD est oblique sur AB, les deux angles ACD, BCD sont inégaux; soit ACD le plus grand. La perpendiculaire CE, élevée au point C sur AB, tombera dans l'intérieur de cet angle et le décomposera en deux autres ACE et ECD. On aura donc

$$\text{ACD} + \text{BCD} = \text{ACE} + \text{ECD} + \text{BCD}.$$

Or l'angle ACE est droit, et la somme ECD + BCD est égale à l'angle droit BCE. Donc enfin

$$\text{ACD} + \text{BCD} = 2 \text{ angles droits}.$$

17. Il résulte de ce théorème que, pour avoir le supplément BCD d'un angle ACD, il suffit de prolonger l'un des côtés AC au delà du sommet.

18. Réciproquement, *si deux angles adjacents* ACD, BCD *sont supplémentaires, leurs côtés extérieurs* AC *et* BC *sont en ligne droite.*

Car le prolongement de AC doit former avec CD (17) un

angle égal au supplément de ACD, c'est-à-dire, à cause de l'hypothèse, un angle égal à BCD; le prolongement de AC ne diffère donc pas de BC.

COROLLAIRES.

19. *La somme de tous les angles consécutifs* ABD, DBE, EBF, FBC, *que l'on peut former autour du point* B *d'une droite* AC, *d'un même côté de cette droite, est égale à deux angles droits* (*fig.* 14); car leur somme est évidemment la même que celle des deux angles adjacents ABF, FBC.

Fig. 14.

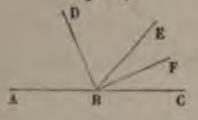
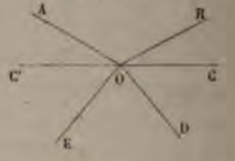


Fig. 15.



20. *La somme de tous les angles consécutifs* AOB, BOC, COD, DOE, EOA, *que l'on peut former autour d'un même point* O, *est égale à quatre angles droits* (*fig.* 15); car en prolongeant OC, par exemple, suivant OC', on voit que cette somme équivaut à celle des angles C'OA, AOB, BOC, situés d'un côté de CC', plus celle des angles COD, DOE, EOC', situés de l'autre côté; et l'on vient de prouver que chacune de ces deux sommes partielles est égale à deux angles droits.

THÉORÈME.

21. *Lorsque deux lignes droites* AB, DE *se coupent, les angles opposés par le sommet sont égaux* (*fig.* 16).

Fig. 16.

Fig. 17.

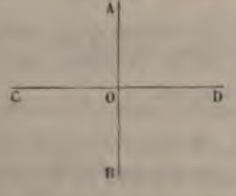
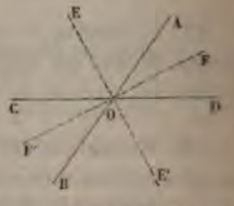


Fig. 18.



Soient, par exemple, les deux angles opposés AOE, DOB.

Le premier AOE a pour supplément l'angle AOD formé par le côté AO et le prolongement OD du côté OE. Le second BOD a aussi pour supplément l'angle AOD, qui peut être considéré comme formé par le côté OD et le prolongement OA du côté BO. Les deux angles AOE, DOB, ayant même supplément AOD, sont égaux entre eux.

COROLLAIRES.

22. *Lorsque l'un des quatre angles formés par la rencontre de deux droites indéfinies* AB *et* CD *est droit, les trois autres sont aussi droits* (*fig.* 17); car, de ce que l'angle AOC, par exemple, est droit, il résulte que son opposé DOB doit l'être, ainsi que chacun de ses suppléments AOD et COB.

On voit par là que :

Lorsqu'une droite AO *est perpendiculaire sur une autre droite* CD, *son prolongement* OB *est aussi perpendiculaire sur la même droite :*

Si une droite AB *est perpendiculaire sur une autre* CD, *la seconde est à son tour perpendiculaire sur la première.*

23. On nomme *bissectrice* d'un angle la droite qui menée par le sommet divise cet angle en deux parties égales.

Par un raisonnement identique à celui du n° 13, on voit que tout angle AOD (*fig.* 18) a une bissectrice OF, mais une seule.

Les bissectrices OE, OF *de deux angles adjacents et supplémentaires* AOC, AOD *sont perpendiculaires l'une à l'autre ;* car la somme des deux angles AOC, AOD étant égale à deux angles droits, celle des angles AOE, AOF, qui sont respectivement moitié des premiers, est égale à un angle droit.

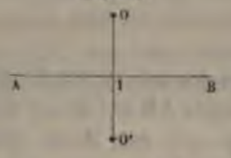
Les bissectrices OF *et* OF′ *de deux angles opposés par le sommet* AOD *et* BOC *sont dans le prolongement l'une de l'autre* (*fig.* 18); car chacune d'elles doit être perpendiculaire au point O sur la bissectrice OE de l'angle AOC qui est adjacent et supplémentaire par rapport à chacun des angles considérés AOD et BOC.

Il résulte de là que *les bissectrices des quatre angles déterminés par la rencontre de deux droites* AB *et* CD *forment deux droites indéfinies* EE′ *et* FF′, *à angle droit l'une sur l'autre.*

THÉORÈME.

24. *Par un point* O *pris hors d'une droite* AB, *on peut toujours abaisser une perpendiculaire sur cette droite, et l'on ne peut en abaisser qu'une* (*fig.* 19).

Fig. 19.



Désignons par O′ le point sur lequel vient s'appliquer le point O, lorsqu'on plie la figure autour de la droite AB, de manière à en rabattre la partie supérieure sur la partie inférieure. Joignons aux points O et O′ un point quelconque I de la droite AB. Les angles adjacents OIB, O′IB seront égaux; car, si l'on pliait de nouveau la figure autour de AB, O venant sur O′ et I restant fixe, le premier angle recouvrirait exactement le second. D'après cela, pour que la droite OI soit perpendiculaire sur AB, c'est-à-dire pour que l'angle OIB soit droit, il faut et il suffit que la somme des deux angles adjacents égaux OIB, O′IB soit égale à deux angles droits; et, par suite, que leurs côtés extérieurs IO, IO′ soient en ligne droite. Donc enfin, comme entre O et O′ il existe toujours une droite, et une seule, on voit que du point O on peut toujours mener une perpendiculaire sur AB, mais une seule.

Scolie.

25. Deux points O et O′ sont dits *symétriques* par rapport à une droite AB, lorsque cette droite est perpendiculaire sur le milieu de OO′; d'après la démonstration ci-dessus, on amène les deux points l'un sur l'autre en pliant le plan de la figure autour de la droite AB.

Deux figures sont dites *symétriques* par rapport à une droite lorsque leurs points sont deux à deux symétriques par rapport à cette droite.

§ II. — DES TRIANGLES.

DÉFINITIONS.

26. On donne le nom de *polygone* à une portion de plan ABCDEF terminée de toutes parts par des lignes droites (*fig.* 20). Les portions de droites AB, BC, CD, DE, EF, FA sont les *côtés* du polygone; l'ensemble de ces côtés forme le contour et leur somme reçoit le nom de *périmètre* du polygone. Le plan est ainsi divisé en deux régions, l'une enfermée par le contour et qu'on nomme *région intérieure*, l'autre illimitée et qu'on nomme *extérieure*. Le polygone a pour *sommets* les points A, B, C, D, E, F communs à deux côtés consécutifs quelconques, et pour *angles* les angles ABC, BCD, CDE, DEF, ..., formés intérieurement par deux côtés consécutifs quelconques. Enfin, toute droite qui, comme AC ou BE, joint deux sommets non consécutifs du polygone est une *diagonale*.

Fig. 20.

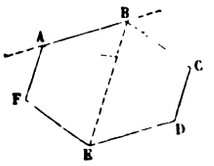
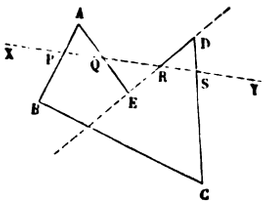


Fig. 21.



Le contour du polygone est une ligne brisée fermée et telle que deux côtés quelconques non consécutifs ne se coupent pas; ainsi la ligne brisée ABEDCA, dont les côtés non consécutifs BE et CA se coupent, ne forme pas le contour d'un polygone.

Une ligne brisée est dite *convexe* lorsqu'elle tombe tout entière d'un même côté de chacune des droites qui la composent, prolongées indéfiniment. Un polygone est dit convexe lorsque son contour est convexe; tel est, par exemple, le polygone ABCDEF (*fig.* 20). Le polygone ABCDE, au con-

traire (*fig.* 21), n'est pas convexe; car le côté DE, prolongé indéfiniment, laisse le polygone en partie au-dessus et en partie au-dessous de lui.

Une droite quelconque, tracée dans le plan d'une ligne brisée convexe, ne peut la rencontrer en plus de deux points; car si une droite XY (*fig.* 21) rencontrait la ligne brisée AEDC en trois points Q, R, S, les points Q et S se trouvant de part et d'autre du côté DE, la ligne AEDC ne serait pas tout entière d'un même côté par rapport à DE prolongé, c'est-à-dire qu'elle ne serait pas convexe.

27. Le plus simple de tous les polygones est le *triangle*, qui n'a que trois côtés. Après lui viennent : le *quadrilatère*, qui a quatre côtés; le *pentagone*, qui a cinq côtés; l'*hexagone*, qui a six côtés,...; l'*octogone*, qui a huit côtés,...; le *décagone*, qui a dix côtés,...; le *pentédécagone*, qui a quinze côtés. La *fig.* 54 représente un hexagone.

Parmi les triangles, on distingue le triangle *isocèle*, le triangle *équilatéral* et le triangle *rectangle*.

Fig. 22.

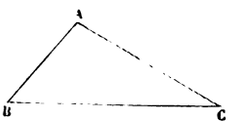


Fig. 23.

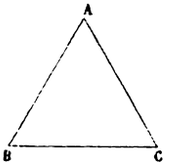
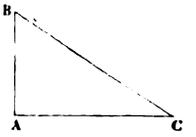


Fig. 24.



Un triangle est *isocèle* quand il a deux côtés égaux : tel est le triangle ABC (*fig.* 23), dans lequel AB est égal à AC. Le troisième côté BC prend spécialement le nom de *base* du triangle isocèle, et le sommet opposé A le nom de *sommet* du triangle isocèle.

Un triangle est *équilatéral* lorsqu'il a ses trois côtés égaux entre eux.

Enfin un triangle est dit *rectangle* lorsqu'il a un angle droit.

Le côté BC (*fig.* 24), opposé à l'angle droit A, reçoit le nom d'*hypoténuse*.

On dit que deux triangles sont égaux lorsqu'on peut les appliquer l'un sur l'autre de manière qu'ils coïncident.

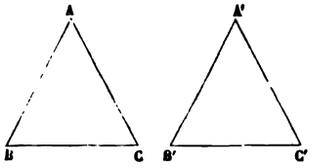
THÉORÈME.

28. *Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

Soit ABC un triangle isocèle; par hypothèse le côté AB est égal au côté AC, et il faut démontrer que l'angle B est égal à l'angle C (*fig.* 25).

Considérons un second triangle A'B'C', *reproduction exacte* du premier, et transportons-le sur ABC *en le renversant* de manière que A' tombe en A et C' en B, ce qui est possible puisque le côté A'C', reproduction de AC, doit, en vertu de l'hypothèse, être égal à AB. Les angles A et A' étant les mêmes, le côté A' B' prendra la direction AC, et comme A'B', reproduction de AB, est égal à AC, le point B' tombera en C; donc les deux triangles coïncideront; par suite, l'angle C' coïncidant avec l'angle B et n'étant que la reproduction de l'angle C, on a B = C.

Fig. 25.



29. Réciproquement, *si deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés opposés sont égaux et le triangle est isocèle.*

Soit ABC un triangle dont les angles B et C sont égaux; il faut démontrer que AB = AC.

Considérons un second triangle A'B'C', *reproduction exacte du premier*, et transportons-le sur AEC, *en le renversant*, de manière que B' tombe en C et C' en B. Le côté C'B' coïncidera avec son égal BC. L'angle C' étant égal à l'angle C et par suite à l'angle B, si l'on fait tomber les deux triangles d'un même

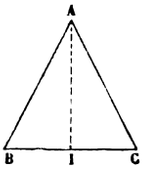
côté par rapport à BC, le côté C'A' prendra la direction BA, et le point A' tombera quelque part sur la droite indéfinie BA. De même, l'angle B' étant égal à l'angle B, et par suite à l'angle C, le côté B'A' prendra la direction CA, et le point A' tombera quelque part sur la droite indéfinie CA. Le point A', devant se trouver à la fois sur les deux droites BA et CA, tombera donc sur leur intersection A, et les deux triangles ABC, A'B'C', coïncideront. Puisque le côté A'B', qui est égal à AB, vient recouvrir exactement le côté AC, on en conclut que AB et AC sont égaux.

Scolie.

30. Les démonstrations qui précèdent mettent en évidence la propriété propre au triangle isocèle d'être *superposable à lui-même par retournement*. Cette propriété est la clef des autres propriétés du triangle isocèle.

Ainsi (*fig.* 26), dans ce retournement du triangle isocèle

Fig. 26.



BAC, B venant en C et C en B, le milieu I de BC retombe sur lui-même aussi bien que le sommet A. Par suite, l'angle AIC vient recouvrir son adjacent et supplémentaire AIB, et l'angle CAI son adjacent BAI. Donc, *dans tout triangle isocèle* BAC, *la droite qui joint le sommet* A *au milieu* I *de la base* BC *est perpendiculaire sur cette base et divise l'angle au sommet en deux parties égales.*

La droite AI satisfait donc aux quatre conditions suivantes : elle passe par le sommet A, par le milieu I de la base BC, elle est perpendiculaire sur cette base, elle est bissectrice de l'angle au sommet.

Or, deux de ces quatre conditions suffisent pour déterminer la droite AI; car on sait que par deux points on ne peut mener

qu'une droite, qu'un angle n'admet qu'une bissectrice, et que par un point on ne peut mener qu'une perpendiculaire à une droite. Donc toute ligne droite, assujettie à deux des quatre conditions indiquées, remplira nécessairement les deux autres.

31. *Tout triangle dont les trois angles sont égaux est équilatéral, et, réciproquement, tout triangle équilatéral a ses trois angles égaux.*

THÉORÈME.

32. *Deux triangles sont égaux :*

1° *Lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun;*

2° *Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun ;*

3° *Lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*

En effet :

1° Soient (*fig.* 27) les deux triangles ABC, A'B'C', tels qu'on ait

$$BC = B'C', \quad B = B', \quad C = C'.$$

Transportons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, de manière que le côté B'C' coïncide avec son égal BC, B' étant en B et C' en C. Puisque l'angle B' est égal à l'angle B et que les deux triangles sont supposés tomber d'un même côté de BC, le côté B'A' prendra la direction BA, et le point A' tombera quelque part sur la droite indéfinie BA. De même, puisque l'angle C' est égal à l'angle C, le côté C'A' prendra la direction CA, et le point A' tombera quelque part sur la droite indéfinie CA. Donc le point A', devant se trouver à la fois sur les deux droites BA et CA, tombera nécessairement sur leur point d'intersection A. Par suite, les deux triangles coïncideront.

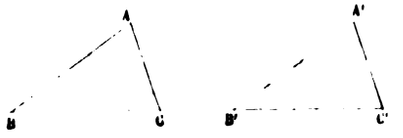
2° Soient (*fig.* 27) les deux triangles ABC, A'B'C', tels qu'on ait

$$A = A', \quad AB = A'B', \quad AC = A'C'.$$

Transportons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, de ma-

nière que l'angle A coïncide avec son égal A′, le côté A′B′ tombant sur le côté AB et le côté A′C′ sur le côté AC. Ces côtés ayant alors même direction, même longueur et une extrémité commune, leurs autres extrémités se confondront,

Fig. 27.



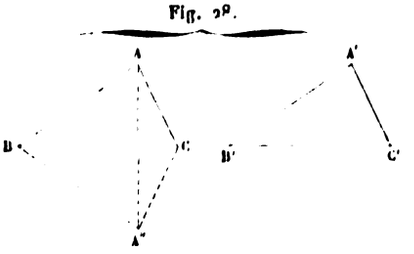
c'est-à-dire que le point B′ tombera sur le point B et le point C′ sur le point C. Par suite, les deux triangles coïncideront.

3° Soient (*fig.* 28) les deux triangles ABC, A′B′C′, tels qu'on ait

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad AC = A'C'.$$

Portons le triangle A′B′C′ à côté de ABC, en le retournant

Fig. 28.



de manière que B′ tombe en B, C′ en C et A′ en A″, au-dessous de BC (en supposant que A soit au-dessus de cette droite). Puisque $BA'' = B'A' = BA$, le triangle ABA″ est isocèle et la bissectrice de l'angle ABA″ est (30) perpendiculaire sur le milieu de AA″; mais, le triangle ACA″ étant aussi isocèle à cause de $A''C = A'C' = AC$, la perpendiculaire sur le milieu de AA″ passe par C (30); donc la bissectrice de l'angle ABA″ n'est autre que BC, et l'angle ABC est égal à A″BC, c'est-à-dire à l'angle A′B′C′; donc les triangles ABC, A′B′C′ sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.

Scolie.

33. Deux triangles égaux, ABC, A′B′C′, satisfont à six conditions, savoir :

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad BC = B'C',$$
$$C = C', \quad B = B', \quad A = A'.$$

Chaque cas d'égalité renferme trois de ces conditions groupées de telle sorte que, lorsqu'elles sont satisfaites, les six soient remplies. Par suite, quand on aura reconnu dans une certaine figure l'égalité de deux triangles par l'application de l'un des trois cas énoncés, on devra en conclure immédiatement l'égalité des trois éléments non employés, et l'on aura acquis ainsi de nouvelles données qui permettront d'aller plus avant dans la recherche que l'on poursuit. Tel est l'usage de la théorie de l'égalité des triangles.

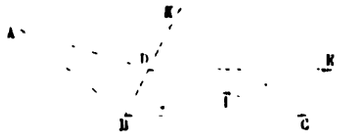
Il est essentiel de remarquer que, dans deux triangles égaux, les côtés égaux sont toujours opposés aux angles égaux.

THÉORÈME.

34. *Si un triangle a deux côtés inégaux, l'angle opposé au plus grand de ces deux côtés est plus grand que l'angle opposé à l'autre.*

Soit (*fig.* 29) le triangle ABC, dans lequel on a $AC > AB$; il

Fig. 29.



faut démontrer que l'angle ABC est plus grand que l'angle ACB.

Prenons $AD = AB$ et menons la droite BDK; le triangle ABD étant isocèle, l'angle ABD est égal à l'angle ADB ou à son opposé par le sommet KDC; l'angle KDC est donc moindre que ABC.

Joignons le point B au milieu I de DC, prolongeons BI d'une longueur IE égale à BI et tirons la droite DE; les triangles DIE, BIC ont un angle égal $DIE = BIC$ compris entre deux

côtés égaux DI = IC, EI = IB; ils sont donc égaux et l'angle EDI est égal à ICB; mais, d'après la construction, le point E est situé dans l'angle KDC; donc l'angle KDC est plus grand que EDI ou que son égal ACB.

Donc enfin, l'angle KDC étant supérieur à ACB et inférieur à ABC, il faut que l'angle ACB soit moindre que l'angle ABC.

35. RÉCIPROQUEMENT, *si un triangle a deux angles inégaux, le côté opposé au plus grand de ces deux angles est plus grand que le côté opposé à l'autre.*

Ainsi, si l'angle ABC est plus grand que l'angle ACB, on doit avoir AC > AB.

En effet, si l'on avait AC = AB, on aurait (28)

$$\text{angle ABC} = \text{angle ACB}$$

et, si l'on avait AC < AB, on aurait (34)

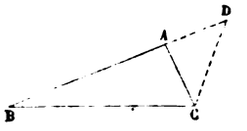
$$\text{angle ABC} < \text{angle ACB}.$$

THÉORÈME.

36. *Dans un triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.*

Il suffit de démontrer que le plus grand côté BC est moindre que la somme BA + AC des deux autres (*fig.* 30).

Fig. 30.



Prolongeons BA d'une longueur AD = AC, et menons CD. Le triangle ACD étant isocèle, l'angle D est égal à l'angle ACD et, par suite, moindre que l'angle BCD; donc (35) dans le triangle BCD, le côté BC est moindre que BD, c'est-à-dire que

$$\text{BA} + \text{AD} \quad \text{ou} \quad \text{BA} + \text{AC}.$$

COROLLAIRES.

37. *Dans tout triangle* ABC, *un côté quelconque* BC *est plus*

grand que la différence des deux autres AC *et* AB. En effet, soit AB le plus grand des deux côtés AC et AB, on aura, d'après le numéro précédent,

$$BC + AC > AB;$$

d'où, en retranchant AC de part et d'autre,

$$BC > AB - AC.$$

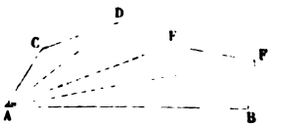
Trois droites de longueurs arbitraires ne peuvent pas toujours former les trois côtés d'un triangle. Il faut que la plus grande d'entre elles soit inférieure à la somme des deux autres. Par exemple, il n'existe pas de triangle dont les côtés aient des longueurs respectivement égales à 7 mètres, 5 mètres, 1 mètre.

THÉORÈME.

38. *La ligne droite est plus courte que toute ligne brisée ayant les mêmes extrémités.*

Soit AB une ligne droite et ACDEFB une ligne brisée ayant les mêmes extrémités (*fig.* 31).

Fig. 31



En joignant le point A aux sommets D, E, F de la ligne brisée, on a successivement

$$AB < AF + FB,$$
$$AF < AE + EF,$$
$$AE < AD + DE,$$
$$AD < AC + CD;$$

d'où, en ajoutant et supprimant les quantités AF, AE, AD communes aux deux membres de l'inégalite,

$$AB < AC + CD + DE + EF + FB.$$

COROLLAIRE.

39. *Toute ligne polygonale convexe* **ABCD** *est moindre que toute ligne polygonale enveloppante* **AMND**, *terminée aux mêmes extrémités* (*fig.* 32).

En laissant de côté la partie commune **AD**, prouvons que le

Fig. 32.

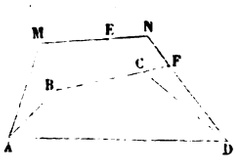
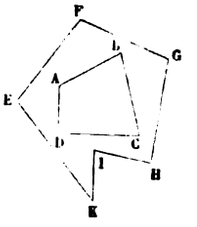


Fig. 33.



contour **ABCD** est inférieur au contour **AMND**. Prolongeons les côtés **AB** et **BC** jusqu'à ce qu'ils coupent en **E** et en **F** le contour polygonal **AMND**. Nous pourrons écrire les inégalités suivantes :

$$AB + BE < AM + ME,$$
$$BC + CF < BE + EN + NF,$$
$$CD < CF + FD.$$

Si nous ajoutons ces inégalités membre à membre, il viendra, en opérant les réductions et additions,

$$AB + BC + CD < AM + MN + ND.$$

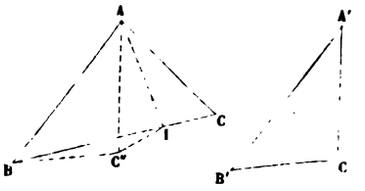
On prouverait de la même manière que *toute ligne polygonale convexe* **ABCD** *est moindre que toute ligne polygonale* **EFGHIK** *qui l'enveloppe de toutes parts* (*fig.* 33).

THÉORÈME.

40. *Si deux côtés d'un triangle sont égaux à deux côtés d'un autre triangle chacun à chacun, et si l'angle compris entre les premiers est plus grand que l'angle compris entre les seconds, le troisième côté du premier triangle est plus grand que le troisième côté du second* (*fig.* 34).

Soient les deux triangles ABC, A′B′C′ dans lesquels on suppose AB = A′B′, AC = A′C′, angle BAC > angle B′A′C′; il

Fig. 34.



faut démontrer que le côté BC est plus grand que B′C′.

Transportons le triangle A′B′C′ en ABC″, de façon que A′B′ coïncide avec AB; l'angle BAC″, égal à B′A′C′, étant moindre que BAC, le côté AC″ tombera dans l'intérieur de l'angle BAC. Soit I le point où la bissectrice de l'angle C″AC rencontre BC; les deux triangles CAI, C″AI ayant un angle égal CAI = C″AI compris entre un côté commun AI et deux côtés égaux AC″ = AC seront égaux et l'on aura IC″ = IC; mais, dans le triangle BC″I, on a

$$BC'' < BI + IC'';$$

donc

$$BC'' < BI + IC \quad \text{ou} \quad B'C' < BC.$$

41. Réciproquement, *si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, et si le troisième côté du premier est plus grand que le troisième côté du second, l'angle opposé du premier triangle est plus grand que l'angle opposé du second.*

Ainsi, en supposant

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad BC > B'C',$$

on a

$$\text{angle } BAC > \text{angle } B'A'C'.$$

En effet :

1° Si l'on avait angle BAC = angle B′A′C′, les triangles seraient égaux (n° 32) et l'on aurait BC = B′C′.

2° Si l'on avait angle BAC < angle B′A′C′, on aurait (n° 40) BC < B′C′.

§ III. — DES PERPENDICULAIRES ET DES OBLIQUES.

THÉORÈME.

42. *Si d'un point* O *pris hors d'une droite* AB *on mène à cette droite la perpendiculaire* OI *et plusieurs obliques* OC, OD, OE,...:

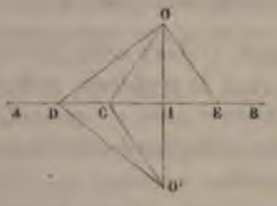
1° *Deux obliques* OC *et* OE *dont les pieds* C *et* E *sont également distants du pied* I *de la perpendiculaire sont égales;*

2° *La perpendiculaire* OI *est plus courte que toute oblique* OC, *et de deux obliques* OC *et* OD *ou* OE *et* OD, *celle dont le pied s'écarte le plus du pied* I *de la perpendiculaire est la plus longue.*

En effet :

1° Les deux triangles OIC, OIE (*fig.* 35), sont égaux comme

Fig. 35.



ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, savoir : l'angle droit OIC égal à l'angle droit OIE, le côté OI commun, et le côté IC égal à IE par hypothèse ; donc

$$OC = OE.$$

2° Prolongeons la perpendiculaire OI d'une quantité $IO' = OI$, et menons les droites O'C, O'D.

Les droites OC et O'C sont égales (1°) comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire CI menée de C sur OO'; on a de même $OD = O'D$. Or le triangle ODO' donne (39)

$$OO' < OC + O'C < OD + O'D,$$

d'où, en prenant les moitiés,

$$OI < OC < OD.$$

Si l'on considérait deux obliques OD et OE situées de côtés différents par rapport à la perpendiculaire OI, on commencerait par prendre sur IA une longueur IC égale à IE; les obliques OC et OE seraient alors égales comme s'écartant également du pied de la perpendiculaire. Or, si IE est moindre que ID, IC le sera aussi; et, d'après l'alinéa précédent, l'oblique OC sera moindre que l'oblique OD. On aura donc encore

$$OE < OD.$$

Corollaires.

43. *La perpendiculaire* OI *abaissée d'un point* O *sur une droite* AB *est la ligne droite la plus courte que l'on puisse mener de ce point à la droite :* sa longueur est ce qu'on appelle la *distance* du point O à la droite AB.

44. La perpendiculaire OI étant plus courte que toute oblique OC, il suit du n° 34 que l'angle OCI est moindre que l'angle droit OIC. Donc, *lorsque deux droites* AB *et* OC *se coupent, la perpendiculaire* OI, *abaissée d'un point de l'une sur l'autre, est située dans l'intérieur de l'angle aigu* OCB *formé par ces deux droites.*

On peut conclure de là que, dans tout triangle rectangle, les deux angles autres que l'angle droit sont aigus.

Scolies.

45. L'exactitude des réciproques des propositions qui précèdent résulte immédiatement du principe général énoncé au n° 7.

1° *Si une droite est la plus courte qu'on puisse mener d'un point à une autre droite, ces deux droites sont perpendiculaires entre elles.*

5X3
R/854
QA
445
R62

2° *Si deux obliques à une même droite partent d'un même point et sont égales entre elles, elles s'écartent également du pied de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite.*

3° *Si deux obliques à une même droite partent d'un même point et sont inégales, la plus grande s'éloigne le plus du pied de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite.*

46. D'un même point on ne peut mener à une droite que *deux* obliques égales, et ces obliques sont situées de part et d'autre de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite.

THÉORÈME.

47. *Tout point* M *de la perpendiculaire* CD *élevée sur le milieu d'une droite* AB *est également distant des extrémités* A *et* B *de cette droite* (*fig.* 36).

Fig. 36.

En effet, C étant le milieu de AB, on a CA = CB; donc MA et MB sont des obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire CD. On a donc MA = MB.

48. Réciproquement, *tout point* M *équidistant des extrémités* A *et* B *d'une droite* AB *appartient à la perpendiculaire* CD *menée à cette droite par son milieu* C.

En effet, le triangle MAB étant isocèle par hypothèse, la droite MC, qui joint le sommet au milieu C de la base, est perpendiculaire sur cette base.

Corollaires.

49. Il résulte de ce qui précède que tous les points de la perpendiculaire menée à une droite par son milieu sont équidistants des extrémités de cette droite, et que les points de cette perpendiculaire sont les seuls points du plan qui jouissent de cette propriété.

En Géométrie plane, on donne le nom de *lieu géométrique* à la figure formée par l'ensemble des points du plan qui jouissent d'une propriété commune. On peut donc exprimer la double proposition qui précède en disant :

La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est le LIEU GÉOMÉTRIQUE *des points équidistants des extrémités de cette droite.*

Deux points suffisent pour déterminer une droite. Donc, dès qu'une droite a deux points équidistants des extrémités d'une seconde droite, on peut affirmer que la première droite est perpendiculaire sur le milieu de la seconde.

THÉORÈME.

50. *Deux triangles rectangles sont égaux :*

1° *Lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal ;*

2° *Lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal.*

Fig. 37.

En effet :

1° Soient (*fig.* 37) les deux triangles ABC, A'B'C', rectangles en A et en A', et dans lesquels on a

$$BC = B'C' \quad \text{et} \quad B = B'.$$

Portons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, de manière que B'C' coïncide avec BC, B' étant en B et C' en C. Si l'on fait tomber les deux triangles du même côté de BC, l'angle B' étant égal à l'angle B, le côté B'A' prendra la direction BA ; dès lors, le côté C'A', qui est perpendiculaire sur B'A', devra prendre la direction de CA, qui est la seule perpendiculaire qu'on puisse abaisser du point C sur BA. Le point A' devant

tomber à la fois sur BA et sur CA viendra donc en A, et les deux triangles coïncideront.

2° Soient (*fig.* 37) les deux triangles ABC, A′B′C′, rectangles en A et en A′, et dans lesquels on a

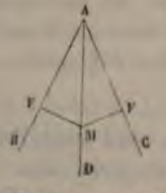
$$BC = B'C' \quad \text{et} \quad AC = A'C'.$$

Portons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, de manière que A′C′ coïncide avec AC, A′ étant en A et C′ en C. Si l'on fait tomber les deux triangles du même côté de AC, le côté A′B′ prendra la direction de AB, à cause de l'égalité des angles droits A et A′. De plus, C′B′ deviendra une oblique égale à CB, issue du même point C, et située du même côté de la perpendiculaire CA. Donc CB et C′B′ s'écarteront également du pied de cette perpendiculaire (45); en d'autres termes, le point B′ tombera en B, et les deux triangles coïncideront.

THÉORÈME.

51. *Tout point* M *pris sur la bissectrice* AD *d'un angle* BAC *est également distant des deux côtés de cet angle* (*fig.* 38).

Fig. 38.



La distance du point M au côté AB est la longueur de la perpendiculaire ME abaissée du point M sur AB; de même, la perpendiculaire MF, abaissée du point M sur AC, mesure la distance du point M au côté AC. Il s'agit de démontrer l'égalité de ME et de MF. Or cette égalité résulte de celle des deux triangles MAE, MAF, qui, rectangles en E et en F, ont l'hypoténuse AM commune et un angle aigu égal, savoir MAE = MAF, puisque la droite AB est la bissectrice de l'angle BAC.

52. Réciproquement, *tout point* M *pris à l'intérieur d'un angle* BAC, *à égale distance* ME = MF *de ses deux côtés* AB *et* AC, *appartient à la bissectrice de cet angle.*

En effet, en menant la droite MA, on obtient deux triangles rectangles, MAE, MAF, qui sont égaux comme ayant l'hypoténuse MA commune et un côté de l'angle droit égal : ME = MF. Donc l'angle MAE opposé au côté ME est égal à l'angle MAF opposé au côté MF, et la droite AM est la bissectrice de l'angle BAC.

Corollaire.

53. *La bissectrice d'un angle est le lieu géométrique des points qui, situés dans l'intérieur de cet angle, sont équidistants de ses côtés.*

Par suite, *le lieu des points d'un plan équidistants de deux droites concourantes de ce plan est le système des deux bissectrices des angles de ces droites* (23).

Scolie.

54. Pour établir un lieu géométrique, il faut toujours prouver une double proposition composée, soit d'une certaine proposition directe et de sa réciproque, soit de cette même proposition directe et de la proposition contraire.

Ainsi l'on démontrera : que tout point d'une certaine figure jouit d'une certaine propriété (proposition directe), et que tout point jouissant de cette propriété appartient à cette figure (proposition réciproque);

Ou bien : que tout point d'une certaine figure jouit d'une certaine propriété (proposition directe), et que tout point pris hors de cette figure ne jouit pas de cette propriété (proposition contraire).

Il est ordinairement plus simple d'adopter le premier mode, c'est-à-dire de démontrer la proposition directe et sa réciproque; cela tient à ce que la proposition contraire exige toujours une figure différente de celle qui est relative à la proposition directe, tandis que la réciproque n'exige pas en général une figure nouvelle.

§ IV. — DES PARALLÈLES.

DÉFINITIONS.

55. Lorsqu'une sécante EF rencontre deux droites quelconques AB et CD, elle forme avec ces deux droites huit angles, dont quatre autour du point G et quatre autour du point H (*fig.* 39).

Les quatre angles 1, 4, 5, 8, compris entre les deux droites AB et CD, sont appelés angles *internes*. Les quatre autres, 2, 3, 6, 7, sont appelés angles *externes*.

Deux angles qui sont internes, non adjacents et situés de part et d'autre de la sécante, sont dits *alternes-internes :* tels sont les angles 1 et 5, 4 et 8.

Deux angles qui sont externes, non adjacents et situés de part et d'autre de la sécante, sont dits *alternes-externes :* tels sont les angles 2 et 6, 3 et 7.

Deux angles situés d'un même côté de la sécante, l'un interne, l'autre externe, et non adjacents, sont dits *correspondants;* tels sont les angles 1 et 7, 4 et 6, 2 et 8, 3 et 5.

Enfin, les angles 1 et 8, 4 et 5, sont dits *intérieurs d'un même côté*, et les angles 2 et 7, 3 et 6, *extérieurs d'un même côté.*

56. Deux droites sont dites *parallèles* lorsque, étant situées dans un même plan, elles ne peuvent se rencontrer, si loin qu'on les prolonge.

THÉORÈME.

57. *Deux droites* AC *et* BD *perpendiculaires sur une troisième droite* EF *sont parallèles* (*fig.* 40).

Fig. 39.

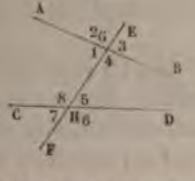
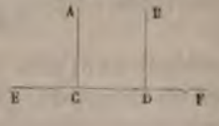


Fig. 40.

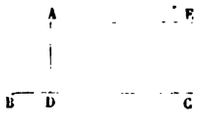


Car, si elles se rencontraient, on pourrait de leur point d'intersection abaisser deux perpendiculaires sur EF.

COROLLAIRE.

58. *Par un point* A, *situé hors d'une ligne droite* BC, *on peut mener une parallèle à cette droite* (*fig.* 41).

Fig. 41.



Abaissons du point A la perpendiculaire AD sur BC, et menons à AD la perpendiculaire AE. Les deux droites AE et BC, étant toutes deux perpendiculaires sur AD, sont parallèles.

SCOLIE.

59. ON ADMET que, *par un point pris hors d'une ligne droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite.* De là résultent les deux propositions suivantes :

60. *Si une droite* A *en rencontre une autre* B, *elle rencontre toute parallèle* C *à cette autre;* car si A était parallèle à C, du point de rencontre des droites A et B, on pourrait mener deux parallèles à C.

61. *Deux droites* A *et* B, *parallèles à une troisième* C, *sont parallèles entre elles;* car, si A et B se rencontraient, de leur point de concours on pourrait mener deux parallèles à C.

THÉORÈME.

62. *Lorsque deux droites* AB *et* CD *sont parallèles, toute droite* EF, *perpendiculaire sur l'une* AB, *est perpendiculaire sur l'autre* CD (*fig.* 42).

Fig. 42.

D'abord la droite EF rencontre CD (60). Concevons par leur

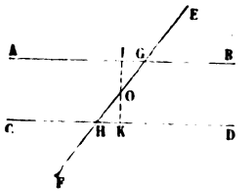
point d'intersection F la perpendiculaire à EF. Cette perpendiculaire, devant être parallèle à AB (57), coïncidera avec CD, puisque par le point F on ne peut mener qu'une parallèle à AB. Donc CD est perpendiculaire sur EF et, inversement, EF est perpendiculaire sur CD.

On énonce souvent ce théorème d'une manière plus rapide, en disant : *Deux parallèles ont leurs perpendiculaires communes.*

THÉORÈME.

63. *Lorsque deux droites parallèles* AB, CD, *sont rencontrées par une sécante* EF, *les quatre angles aigus formés autour des points d'intersection* G *et* H *sont éguux entre eux, ainsi que les quatre angles obtus formés autour des mêmes points* (*fig.* 43).

Fig. 43.



En effet, par le point O, milieu de GH, menons sur les parallèles AB et CD la perpendiculaire commune IK ; OI tombera dans l'angle aigu OGA, et OK dans l'angle aigu OHD (44). Or, les triangles rectangles OGI, OHK, ont leurs hypoténuses OG et OH égales, puisque le point O est le milieu de GH, et les angles aigus IOG, HOK, égaux comme opposés par le sommet : ils sont donc égaux et, par suite, l'angle OGI est égal à l'angle OHK. Chacun de ces deux angles étant d'ailleurs égal à son opposé par le sommet, on voit que les quatre angles aigus OGI, EGB, OHK, CHF, sont égaux entre eux.

De même, les quatre angles obtus AGE, OGB, DHF, OHC, sont aussi égaux entre eux, comme suppléments des angles aigus.

64. Réciproquement, *deux droites* AB *et* CD *étant coupées par une sécante* EF, *si les quatre angles aigus ou les quatre angles*

obtus formés autour des points d'intersection G *et* H *sont égaux entre eux, les deux droites* AB *et* CD *sont parallèles.*

Supposons (*fig.* 44) que l'angle HGA soit égal à l'angle GHD, et concevons par le point H la parallèle à AB. Cette parallèle doit, d'après la proposition directe, faire avec GH un angle égal à l'angle HGA, et, par suite, à l'angle GHD; donc cette parallèle coïncide avec HD, et la droite CD est parallèle à AB.

COROLLAIRES.

65. *Deux parallèles* AB *et* CD (*fig.* 44) *étant coupées par une sécante* EF, il résulte de ce qui précède :

Fig. 44.

1° Que *les angles alternes-internes* 1 et 5, ou 4 et 8, *sont égaux entre eux ;*

2° Que *les angles alternes-externes* 3 et 7, ou 2 et 6, *sont égaux entre eux ;*

3° Que *les angles correspondants* 1 et 7, ou 2 et 8, ou 3 et 5, ou 4 et 6, *sont égaux entre eux ;*

4° Que *les angles intérieurs d'un même côté* 1 et 8, ou 3 et 5, *sont supplémentaires ;*

5° Que *les angles extérieurs d'un même côté* 2 et 7, ou 3 et 6, *sont supplémentaires.*

Et, RÉCIPROQUEMENT, *deux droites coupées par une sécante sont parallèles :*

Si les angles alternes-internes sont égaux,

Ou *si les angles alternes-externes sont égaux,*

Ou *si les angles correspondants sont égaux,*

Ou *si les angles intérieurs d'un même côté sont supplémentaires,*

Ou *si les angles extérieurs d'un même côté sont supplémentaires.*

SCOLIE.

66. La proposition directe et la proposition réciproque étant démontrées, les propositions contraires sont vraies par cela même. Ainsi :

Deux droites étant coupées par une sécante, si les angles formés ne satisfont pas aux relations que nous venons d'énoncer, les deux droites ne sont pas parallèles. En particulier :

Lorsque deux droites font avec une transversale deux angles intérieurs d'un même côté dont la somme diffère de deux angles droits, ces droites se rencontrent du côté de la sécante où cette somme est inférieure à deux angles droits.

C'est l'axiome XI de la Géométrie d'Euclide; on préfère aujourd'hui prendre pour axiome la proposition énoncée au n° 59.

67. Voici deux autres remarques souvent utiles :

1° *Deux droites* (*fig.* 45), *l'une* AB *perpendiculaire, et l'autre* CD *oblique sur une troisième droite* AC, *doivent se rencontrer;* car la somme des deux angles intérieurs BAC, BCA, est moindre que deux angles droits.

Fig. 45.

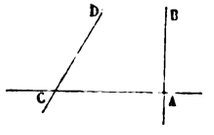
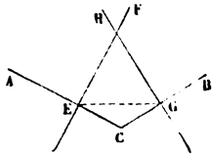


Fig. 46.



2° *Deux droites* EF, GH (*fig.* 46), *respectivement perpendiculaires à deux droites* CA *et* CB *qui se coupent, doivent se rencontrer;* car, en menant la droite EG, on voit que chacun des angles intérieurs FEG, HGE, est moindre qu'un angle droit : la somme de ces angles est donc inférieure à deux angles droits.

THÉORÈME.

68. *Deux parallèles* AC, BD, *comprises entre deux autres parallèles* AB, CD, *sont égales* (*fig.* 47).

En effet, menons AD. Les deux triangles ABD, ACD seront égaux comme ayant un côte commun AD adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, savoir : l'angle BAD égal à l'angle ADC comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB, CD,

coupées par la sécante AD; et l'angle ADB égal à l'angle DAC comme alternes-internes par rapport aux parallèles AC, BD, coupées par la même sécante. Donc le côté BD opposé à l'angle BAD est égal au côté AC opposé à l'angle ADC.

Fig. 47.

Fig. 48.

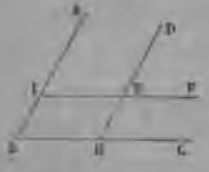
COROLLAIRE.

69. Si les deux lignes AC et BD (*fig.* 48) étaient perpendiculaires sur AB et, par suite, sur CD (62), elles mesureraient les distances des points A et B de la droite AB à la droite CD. Ces deux distances étant égales comme parallèles comprises entre parallèles, et les deux points A et B étant pris d'une manière quelconque sur AB, on voit que *deux parallèles sont partout également distantes.*

THÉORÈME.

70. *Deux angles qui ont leurs côtés parallèles chacun à chacun sont égaux ou supplémentaires* (*fig.* 49).

Fig. 49.



1° Supposons que les côtés parallèles soient deux à deux dirigés dans le même sens. Soient, par exemple, les angles ABC, DEF; BA et ED sont parallèles et dirigés l'un et l'autre de bas en haut; BC et EF sont parallèles et dirigés l'un et l'autre de gauche à droite : les deux angles considérés sont égaux.

En effet, prolongeons le côté DE jusqu'au point H, où il coupe le côté BC. Les angles ABC, DHC, sont égaux comme correspondants par rapport aux parallèles BA, HD, coupées

par BC; de même, les angles DEF, DHC, sont égaux comme correspondants par rapport aux parallèles EF, HC, coupées par DH. Donc, l'angle ABC est égal à l'angle DEF.

2° Supposons que les côtés parallèles soient dirigés deux à deux en sens contraires. Soient, par exemple, les angles ABC, GEH; BA et EH sont parallèles et dirigés, le premier de bas en haut, le deuxième de haut en bas; BC et EG sont parallèles et dirigés, l'un de gauche à droite, l'autre de droite à gauche : les deux angles considérés sont égaux.

En effet, en prolongeant les côtés de l'angle GEH au delà du sommet E, on forme un angle DEF égal d'une part à GEH comme opposé par le sommet, et d'autre part égal à ABC comme ayant ses côtés respectivement parallèles à ceux de ce dernier angle et dirigés dans le même sens.

3° Supposons enfin que deux côtés soient parallèles et de même sens, et les deux autres parallèles et de sens contraires. Soient, par exemple, les angles ABC, DEG; BA et ED sont parallèles et dirigés l'un et l'autre de bas en haut; BC et EG sont parallèles et dirigés, le premier, de gauche à droite, le deuxième, de droite à gauche : les deux angles considérés sont supplémentaires.

En effet, en prolongeant GE au delà du sommet E, on forme un angle DEF qui est, d'une part, le supplément de DEG, et qui est, d'autre part, égal à ABC comme ayant ses côtés respectivement parallèles à ceux de ce dernier angle et dirigés dans le même sens.

En résumé, *deux angles qui ont leurs côtés parallèles sont égaux si les côtés parallèles sont dirigés deux à deux dans le même sens, ou encore si les côtés parallèles sont dirigés deux à deux en sens contraires; ils sont supplémentaires si deux côtés parallèles sont de même sens et les deux autres de sens contraires.*

Corollaire.

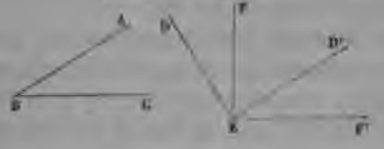
71. *Deux angles qui ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun sont égaux ou supplémentaires.*

1° Considérons deux angles aigus ABC, DEF (*fig.* 50); le côté DE est perpendiculaire sur BA, et le côté EF est

perpendiculaire sur BC : les deux angles considérés sont égaux.

En effet, si l'on fait tourner l'angle DEF tout d'une pièce d'un angle droit autour de son sommet E, le nouvel angle D'EF',

Fig. 50.

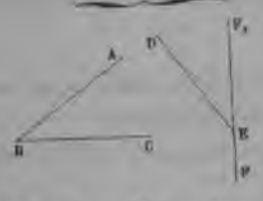


reproduction de DEF, aura ses côtés respectivement parallèles à ceux de ABC : ED' et BA seront parallèles comme perpendiculaires à DE; EF' et BC seront parallèles comme perpendiculaires à EF. D'ailleurs, les angles ABC, D'EF', qui ont leurs côtés parallèles, étant tous les deux aigus, ne peuvent être supplémentaires : ils sont donc égaux; par suite, les angles ABC, DEF, le sont aussi.

2° Si les deux angles comparés étaient obtus, on démontrerait de la même manière leur égalité.

3° Considérons enfin deux angles d'espèce différente, c'est-à-dire l'un ABC aigu, l'autre DEF obtus (*fig.* 51). En prolon-

Fig. 51.



geant EF au delà du sommet E, on forme un angle DEF$_1$, qui est le supplément de DEF : cet angle DEF$_1$ est donc aigu comme l'angle ABC; d'ailleurs, il a ses côtés respectivement perpendiculaires à ceux de ABC. Les angles ABC et DEF$_1$ sont donc égaux et, par suite, les angles proposés ABC et DEF sont supplémentaires.

§ V. — SOMME DES ANGLES D'UN POLYGONE.

THÉORÈME.

72. *La somme des angles d'un triangle quelconque* ABC *est égale à deux angles droits* (*fig.* 52).

En effet, prolongeons BC et menons CE parallèle à BA. Cette droite CE tombera dans l'angle ACE, car, si elle tombait dans l'angle BCA, elle rencontrerait sa parallèle BA. On a donc autour du point C et d'un même côté de BD trois angles consécutifs BCA, ACE, ECD dont la somme est égale à deux angles droits, et il suffit de prouver que ces angles sont respectivement égaux à ceux du triangle. Or l'angle BCA n'est autre que l'angle C du triangle; les angles BAC, ACE sont égaux comme alternes-internes, par rapport aux parallèles AB, CE, coupées par AC; enfin les angles ABC, ECD, sont égaux comme correspondants, par rapport aux parallèles BA et CE coupées par BD.

Scolie.

73. On voit par cette démonstration que l'angle ACD est la somme des deux angles B et A; ainsi, *tout angle extérieur d'un triangle*, c'est-à-dire tout angle formé par un côté et le prolongement d'un autre côté, *est égal à la somme des deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.*

Corollaires.

74. *Un triangle ne saurait avoir qu'un seul angle droit et*, à fortiori, *qu'un seul angle obtus.*

75. *Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires.*

76. *Un angle quelconque d'un triangle est le supplément de la somme des deux autres.* D'où il suit que si deux triangles ABC, A′B′C′, ont deux angles égaux chacun à chacun, $A = A'$ et $B = B'$, le troisième angle C du premier triangle est égal au troisième angle C′ de l'autre. Il en résulte que deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal et deux angles égaux chacun à chacun, que ces angles soient ou non adjacents au côté égal.

77. *Deux triangles* ABC, A'B'C', *qui ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun, ont leurs angles égaux chacun à chacun.*

En effet, deux angles qui ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires étant égaux ou supplémentaires, on a

$$A = A' \quad \text{ou} \quad A + A' = 2^d,$$
$$B = B' \quad \text{ou} \quad B + B' = 2^d,$$
$$C = C' \quad \text{ou} \quad C + C' = 2^d.$$

On ne peut donc faire que les trois hypothèses suivantes :

1° $A + A' = 2^d$, $B + B' = 2^d$, $C + C' = 2^d$,

2° $A = A'$, $B + B' = 2^d$, $C + C' = 2^d$,

3° $A = A'$, $B = B'$, et, par suite (76), $C = C'$.

Or, dans le premier cas, la somme des angles des deux triangles vaudrait 6 angles droits; dans le second cas, cette somme surpasserait 4 angles droits de la quantité $A + A' = 2A$. La troisième combinaison est donc seule possible.

THÉORÈME.

78. *La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe* ABCDEF *est égale à autant de fois deux angles droits qu'il a de côtés moins deux* (*fig.* 53).

Fig. 52.

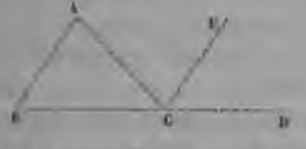


Fig. 53.

En joignant l'un des sommets A à tous les sommets non adjacents, on décompose le polygone en autant de triangles qu'il a de côtés moins deux; car chaque triangle contient un seul côté du polygone, excepté les deux triangles extrêmes, qui renferment chacun deux côtés de ce polygone. La somme des angles du polygone est égale à celle des angles de tous ces triangles; elle vaut donc autant de fois deux angles droits qu'il

y a de triangles, c'est-à-dire autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés moins deux.

SCOLIE.

79. Si l'on désigne par n le nombre des côtés du polygone, la somme de ses angles aura pour expression, en prenant l'angle droit pour unité,

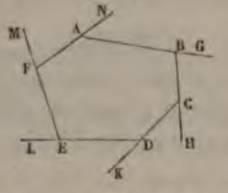
$$2(n-2) \quad \text{ou} \quad 2n-4.$$

Si l'on fait dans la formule $n=4$, on trouve 4 pour la somme cherchée. *La somme des angles d'un quadrilatère convexe est donc égale à quatre angles droits;* d'où il suit que *si un quadrilatère a tous ses angles égaux, chacun de ces angles est droit.*

COROLLAIRE.

80. *La somme des angles qu'on forme à l'extérieur d'un polygone convexe, en prolongeant successivement ses côtés dans le même sens, est égale à quatre angles droits* (*fig.* 54).

Fig. 54.



En effet, la somme d'un angle extérieur quelconque NAG et de l'angle intérieur adjacent FAB est égale à deux angles droits; donc, la somme des angles, tant intérieurs qu'extérieurs du polygone, est égale à autant de fois deux angles droits qu'il a de sommets ou de côtés. Cette somme surpasse donc de quatre angles droits (79) la somme des angles intérieurs : en d'autres termes, la somme des angles extérieurs est égale à quatre angles droits.

81. Il convient de remarquer qu'un polygone convexe ne saurait avoir d'après cela plus de trois angles intérieurs aigus; sans quoi il aurait plus de trois angles extérieurs obtus, et la somme de ses angles extérieurs surpasserait quatre angles droits.

§ VI. — DU PARALLÉLOGRAMME.

DÉFINITIONS.

82. Parmi les quadrilatères convexes, on distingue :

1° Le *parallélogramme* (*fig.* 55), qui a ses côtés opposés parallèles deux à deux ;

2° Le *rectangle* (*fig.* 56), qui a tous ses angles égaux entre eux : il résulte du n° 79 que les quatre angles d'un rectangle sont droits ;

3° Le *losange* (*fig.* 57), qui a tous ses côtés égaux entre eux : nous démontrerons dans ce paragraphe que le rectangle et le losange sont des parallélogrammes ;

Fig. 55.

Fig. 56.

Fig. 57.

Fig. 58.

Fig. 59.

Fig. 60.

4° Le *carré* (*fig.* 58), qui a ses côtés égaux et ses angles égaux : le carré est à la fois un losange et un rectangle ;

5° Le *trapèze* (*fig.* 59), dont deux côtés opposés seulement sont parallèles. Le trapèze est *rectangle* lorsqu'un de ses côtés non parallèles est perpendiculaire sur les deux côtés parallèles ; il est *isocèle* lorsque ses deux côtés non parallèles sont égaux.

THÉORÈME.

83. *Dans tout parallélogramme :*

1° *Les côtés opposés sont égaux deux à deux ;*

2° *Les angles opposés sont égaux deux à deux ;*

3° *Les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales.*

Soit le parallélogramme ABCD (*fig.* 60).

1° Deux côtés opposés quelconques AB et CD, par exemple, sont égaux entre eux ; car ce sont, par hypothèse, deux droites parallèles comprises entre deux autres droites parallèles AD et BC (68).

2° Deux angles opposés quelconques, DAB et BCD, par exemple, sont égaux entre eux; car ils sont formés par des côtés parallèles deux à deux et de sens contraires (70). AB et CD sont en effet parallèles et de sens contraires, et il en est de même de AD et de CB.

3° Chacune des diagonales AC et BD est coupée par l'autre, au point O, en deux parties égales. En effet, les deux triangles AOB, BOC, ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, savoir : le côté AB égal au côté DC, comme côtés opposés du parallélogramme; l'angle OAB égal à l'angle OCD, comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB et CD coupées par AC; et l'angle OBA égal à l'angle ODC, comme alternes-internes par rapport aux mêmes parallèles coupées par BD. Les triangles AOB, DOC sont donc égaux. Par suite, le côté OB, opposé à l'angle OAB, est égal au côté OD opposé à l'angle OCD, et le côté OA opposé à l'angle OBA est égal au côté OC opposé à l'angle ODC.

THÉORÈME.

84. *Un quadrilatère convexe est un parallélogramme :*

1° *Si ses côtés opposés sont égaux deux à deux;*

2° *Si ses angles opposés sont égaux deux à deux;*

3° *Si deux côtés opposés sont à la fois égaux et parallèles;*

4° *Si ses diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales.*

Soit le quadrilatère ABCD (*fig.* 61).

1° Menons la diagonale AC. Les deux triangles ABC, ADC, sont égaux comme ayant les trois côtés égaux, savoir : AC commun, AB et CD égaux entre eux par hypothèse, ainsi que AD et BC. Par suite, l'angle BAC opposé à BC est égal à l'angle ACD opposé à AD; et comme ces angles occupent, par rapport aux deux droites AB et CD et à la sécante AC, la position d'alternes-internes, les deux côtés AB et CD sont parallèles (65). De même, l'égalité des angles BCA et CAD entraîne le parallélisme des deux autres côtés AD et BC. Donc, le quadrilatère

ABCD ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux est un parallélogramme.

Fig. 61.

Fig. 62.

2° Les angles opposés A et C étant égaux entre eux, ainsi que les angles B et D (*fig.* 62), on voit que deux angles consécutifs quelconques, B et C par exemple, ont une somme égale à la moitié de la somme des angles du quadrilatère, c'est-à-dire à deux droits. Ces deux angles B et C étant supplémentaires, et, de plus, intérieurs d'un même côté par rapport aux deux droites AB et CD coupées par BC, ces mêmes droites sont parallèles (65). On démontrerait de même que, les angles A et B étant supplémentaires, les deux autres côtés opposés, AD et BC, sont parallèles. Le quadrilatère ABCD est donc un parallélogramme.

3° Soient AB et CD les deux côtés opposés que l'on suppose égaux et parallèles (*fig.* 61). En menant la diagonale AC, on forme deux triangles ABC, ADC, qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, savoir: l'angle BAC égal à l'angle ACD, comme alternes-internes par rapport aux parallèles AB et CD coupées par AC; le côté AB égal au côté CD par hypothèse, et le côté AC commun. De l'égalité des triangles ABC, ADC, résulte celle des angles ACB et CAD; et comme ces angles sont alternes-internes par rapport aux deux droites AD et BC coupées par AC, ces mêmes droites sont parallèles. Le quadrilatère ABCD ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux est un parallélogramme.

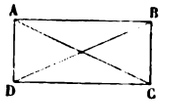
4° Puisqu'on suppose OA = OC et OB = OD (*fig.* 60), les angles AOB et COD étant d'ailleurs opposés par le sommet, les deux triangles AOB, COD, sont égaux. Donc, l'angle OAB est égal à l'angle OCD. D'ailleurs, ces angles étant alternes-internes par rapport aux droites AB et CD coupées par AC, les côtés opposés AB et CD sont parallèles. De l'égalité des triangles AOD, BOC, on déduirait pareillement l'égalité des an

gles OAD, OCB, et, par suite, le parallélisme des deux autres côtés opposés AD et BC. Le quadrilatère ABCD, ayant ses côtés opposés parallèles deux à deux, est donc un parallélogramme.

THÉORÈME.

85. *Tout rectangle est un parallélogramme dont les diagonales sont égales* (*fig.* 63).

Fig. 63.



D'abord, tout rectangle est un parallélogramme, puisque ses angles opposés sont égaux (84, 2°). En second lieu, les deux triangles DAB, CBA, par exemple, sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, savoir : l'angle droit DAB égal à l'angle droit CBA, le côté AB commun, et le côté AD égal au côté BC, comme côtés opposés d'un parallélogramme; donc, les diagonales AC et BD, hypoténuses des triangles rectangles égaux DAB, CBA, sont égales.

86. Réciproquement, *tout parallélogramme dont les diagonales sont égales est un rectangle* (*fig.* 63). Car les triangles DAB, CBA, sont alors égaux comme ayant leurs trois côtés égaux : donc, l'angle DAB est égal à l'angle CBA, et comme chacun d'eux est égal à son opposé (83), on voit que le parallélogramme considéré a tous ses angles égaux et, par suite, est un rectangle.

THÉORÈME.

87. *Tout losange est un parallélogramme dont les diagonales sont : 1° perpendiculaires l'une sur l'autre; 2° bissectrices des angles opposés* (*fig.* 64).

D'abord, tout losange est un parallélogramme, puisque ses côtés opposés sont égaux (84, 1°).

En second lieu, les triangles ABC et ADC étant isocèles, puisque les quatre côtés d'un losange sont égaux, la diagonale BD, qui passe par le milieu O de la diagonale AC, est à la fois perpendiculaire sur AC et bissectrice des angles B et D.

Pour une raison analogue, la diagonale AC est bissectrice des angles A et C.

Fig. 64.

88. Réciproquement, *tout parallélogramme est un losange : 1° si ses diagonales sont perpendiculaires l'une sur l'autre ; 2° si l'une d'elles est bissectrice des angles dont elle unit les sommets.*

Car, puisque les diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en parties égales, dans l'un comme dans l'autre cas, les quatre triangles AOB, BOC, COD, AOD sont égaux, et par suite les côtés AB, BC, CD, DA le sont aussi.

Scolies.

89. *Tout carré est un parallélogramme dont les diagonales sont égales, perpendiculaires entre elles et bissectrices des angles opposés ; réciproquement, tout parallélogramme est un carré lorsque ses diagonales sont : 1° égales et perpendiculaires entre elles ; 2° égales, l'une d'elles étant en outre la bissectrice des angles dont elle unit les sommets.*

La démonstration de cette double proposition n'offre aucune difficulté.

90. On nomme *centre* d'un parallélogramme le point d'intersection de ses diagonales. Voici la raison de cette dénomination :

Deux points M et M' (*fig.* 60) sont dits *symétriques par rapport à un point* O, lorsque ce dernier point est le milieu de la droite qui joint les deux premiers. Deux figures sont

dites *symétriques par rapport à un point* O, lorsqu'elles se correspondent point par point, de manière que deux points correspondants quelconques soient symétriques par rapport à ce point O. Enfin, on dit qu'une figure admet un *centre* O, lorsque les points de cette figure sont deux à deux symétriques par rapport à ce point O.

Or, il est aisé de voir que les points du contour d'un parallélogramme sont deux à deux symétriques par rapport au point d'intersection des diagonales; car, si l'on mène par ce point O une droite quelconque MOM', l'égalité des triangles MOA, M'OC (32, 2°) donne MO = M'O.

LIVRE II.

LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

§ I. — DES ARCS ET DES CORDES.

DÉFINITIONS.

91. La *circonférence* est une ligne courbe ABCD (*fig.* 65), dont tous les points sont également distants d'un point intérieur O qu'on nomme *centre*.

Le *cercle* est l'espace limité par la circonférence.

Fig. 65.

Fig. 66.

92. On appelle *rayon* toute droite menée du centre à la circonférence. *Tous les rayons* OA, OB, OC, ... *d'un cercle sont égaux*, d'après la définition même de la circonférence.

Deux cercles de même rayon sont égaux; car si l'on place le centre O' du second (*fig.* 66) sur le centre O du premier (*fig.* 65), l'égalité des rayons entraînera la coïncidence des deux circonférences.

93. On nomme *arc* une portion quelconque AB de circonférence.

Deux arcs de même rayon, BC *et* B'C' (*fig.* 65 et 66), *sont dits égaux lorsqu'on peut les placer l'un sur l'autre de manière qu'ils coïncident.*

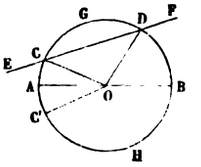
Pour ajouter deux arcs de même rayon, AB *et* B'C', on porte le second en BC à la suite du premier, sur le cercle O

auquel ce premier arc appartient, de manière qu'ils aient une extrémité B commune; l'arc ABC, compris entre les extrémités non communes A et C, est dit *la somme* des deux arcs proposés.

94. Un point est *intérieur* ou *extérieur* à un cercle suivant que sa distance au centre est *plus petite* ou *plus grande* que le rayon.

95. *Une droite quelconque* EF *ne peut rencontrer une circonférence* O *en plus de deux points* C *et* D (*fig.* 67).

Fig. 67.



En effet, du centre O à la droite EF, on ne peut mener au plus (**46**) que deux droites OC et OD égales au rayon.

On donne le nom de *sécante* à toute droite EF qui coupe la circonférence en deux points C et D. On appelle *corde* la partie CD intérieure au cercle, et l'on réserve le nom de *diamètre* aux cordes qui passent par le centre.

Tous les diamètres d'un cercle sont égaux, car un diamètre quelconque AB est la somme de deux rayons OA et OB.

96. *Le diamètre est la plus grande corde du cercle.*

Car une corde quelconque CD est moindre que la somme OC + OD des deux rayons qui aboutissent à ses extrémités : elle est donc moindre qu'un diamètre.

97. *Tout diamètre* AB *divise la circonférence et le cercle en deux parties égales* (*fig.* 67).

En effet, si l'on plie la figure autour d'un diamètre AB, un rayon quelconque OC de la partie supérieure prendra la direction du rayon OC′ qui fait de l'autre côté de AB un angle C′OA égal à l'angle COA ; et, à cause de l'égalité des rayons, le point C

de l'arc supérieur AGB tombera en C' sur l'arc inférieur AHB. Ces deux arcs AGB, AHB, se recouvrant exactement, sont donc égaux, ainsi que les espaces compris entre chacun d'eux et le diamètre AB.

98. Une corde quelconque CD, autre qu'un diamètre, divise d'après cela la circonférence en deux arcs *inégaux*, l'un CGD moindre que la demi-circonférence, l'autre CHD plus grand. On dit que la corde CD *sous-tend* ces deux arcs. Toutefois, quand nous parlerons de l'*arc sous-tendu par une corde* CD, il faudra toujours entendre, à moins d'avertissement contraire, qu'il s'agit du plus petit des deux arcs correspondant à cette corde.

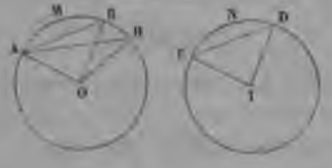
THÉORÈME.

99. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :*

1° *Deux arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales ;*

2° *De deux arcs inégaux, le plus grand est sous-tendu par la plus grande corde* (*fig.* 68).

Fig. 68.



Soient O et I deux cercles égaux :

1° Si l'arc AMB est égal à l'arc CND, les cordes AB et CD seront égales. En effet, portons le cercle I sur le cercle O de manière que le rayon IC coïncide avec son égal OA, I étant en O et C en A. Les circonférences coïncideront, l'arc CND tombera sur son égal AMB, et le point D viendra en B. La corde CD s'appliquera donc sur la corde AB, et, par suite, lui sera égale.

2° Si l'arc AMH est plus grand que l'arc CND, la corde AH sera plus grande que la corde CD. En effet, prenons à partir du point A, sur l'arc AMH, un arc AMB égal à l'arc CND ; les cordes AB, CD, seront égales (1°), et il restera à démontrer que la corde AB est moindre que la corde AH. Or, l'arc AMB étant

moindre que l'arc AMH, le point B tombe entre les points A et H, et l'angle AOB est inférieur à l'angle AOH. Par suite, les deux triangles AOB, AOH, ont un angle inégal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir OA commun et OB = OH comme rayons d'un même cercle. Donc (40) le côté AB opposé à l'angle AOB est moindre que le côté AH opposé à l'angle AOH.

100. Du théorème qu'on vient de démontrer et du principe général du n° 7 il suit que :

RÉCIPROQUEMENT, *dans un même cercle ou dans des cercles égaux, à des cordes égales répondent des arcs égaux, et à une plus grande corde répond un plus grand arc.*

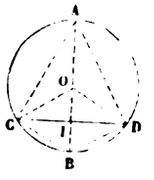
SCOLIE.

101. Nous n'avons considéré dans ce qui précède que des arcs moindres qu'une demi-circonférence (98). Si l'on considérait des arcs plus grands qu'une demi-circonférence, pour la seconde partie du théorème les conclusions seraient inverses : l'arc augmentant, la corde diminuerait au lieu de croître.

THÉORÈME.

102. *Le diamètre* AB, *perpendiculaire sur une corde* CD, *divise cette corde et les deux arcs* CBD, CAD, *qu'elle sous-tend, chacun en deux parties égales* (*fig.* 69).

Fig. 69.



En effet, soient O le centre de la circonférence et I le point de rencontre du diamètre AB et de la corde CD. Les rayons OC, OD, étant, par rapport à la perpendiculaire OI, deux obliques égales, s'écartent également du pied de cette perpendiculaire. On a donc CI = ID. En d'autres termes, la corde CD est divisée

au point I en deux parties égales. Dès lors, AB étant perpendiculaire sur le milieu de CD, tout point de AB, et en particulier le point B, est équidistant des points C et D. Les cordes BC et BD sont donc égales, et, par suite, les arcs BC et BD sont aussi égaux. En d'autres termes, l'arc CBD est divisé au point B en deux parties égales. On démontrerait de même que l'arc CAD est aussi divisé en deux parties égales au point A

COROLLAIRES.

103. La droite AB satisfait, d'après cela, aux *cinq* conditions suivantes : elle passe par le centre O, par le milieu I de la corde CD, et par les milieux A et B de chacun des arcs que cette corde sous-tend ; elle est enfin perpendiculaire sur la corde CD. Or, deux de ces cinq conditions suffisent pour déterminer la droite AB ; car on sait que, par deux points, on ne peut mener qu'une droite, et que par un point on ne peut mener qu'une perpendiculaire sur une droite. Donc, toute ligne droite assujettie à deux des cinq conditions énoncées remplira nécessairement les trois autres. De là une série de propositions que le lecteur énoncera sans difficulté, et parmi lesquelles nous ne citerons que les suivantes :

La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe par le centre et par le milieu de chacun des arcs que cette corde sous-tend.

Le lieu géométrique des milieux d'un système de cordes parallèles est le diamètre perpendiculaire à la direction commune de ces cordes.

THÉORÈME.

104. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :*

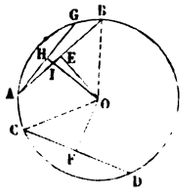
1° *Deux cordes égales sont également éloignées du centre ;*

2° *De deux cordes inégales, la plus petite est la plus éloignée du centre* (*fig.* 70).

1° Soient les deux cordes égales AB, CD, et soient OE, OF, les perpendiculaires menées du centre O sur chacune d'elles. Les longueurs de ces perpendiculaires mesurent les distances du centre à ces deux cordes, et il s'agit de démontrer que ces distances sont égales. Or les triangles rectangles EOB,

COF, sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un côté égal, savoir : OB = OC comme rayons d'un même cercle, et EB = CF comme moitiés de cordes égales, puisque les pieds E et F des perpendiculaires OE et OF sont (102) les milieux des cordes AB et CD. Donc OE, troisième côté du triangle OEB, est égal à OF, troisième côté du triangle OCF.

Fig. 70.



2° Soient les deux cordes inégales AG et CD. On suppose AG moindre que CD, et il faut démontrer que la perpendiculaire OH, menée du centre sur la première corde, est plus grande que la perpendiculaire OF. Par le point A menons une corde AB égale à CD. La distance OE du centre à cette corde sera égale à OF, et il reste à démontrer que OE est moindre que OH. Or, la corde AG étant moindre que la corde AB, l'arc AG est inférieur à l'arc AB, et, par suite, le centre O du cercle et le milieu H de la corde AG sont situés de part et d'autre de la droite AB. Donc AB rencontre OH en un point I situé entre O et H, et l'on a OI < OH. Mais, puisque OE est perpendiculaire sur AB, OI est oblique, et l'on a

$$OE < OI;$$

donc, *à fortiori*,

$$OE < OH.$$

105. Du théorème qu'on vient de démontrer et du principe général du n° 7 il résulte que :

RÉCIPROQUEMENT, *dans un même cercle ou dans des cercles égaux, deux cordes également éloignées du centre sont égales; et, de deux cordes inégalement éloignées du centre, la plus éloignée est la plus petite.*

§ II. — TANGENTE AU CERCLE. — POSITIONS MUTUELLES DE DEUX CIRCONFÉRENCES.

DÉFINITION.

106. On nomme *tangente* au cercle toute droite CD (*fig.* 71) qui n'a qu'un point commun avec la circonférence. Ce point commun A est appelé *point de contact*.

THÉORÈME.

107. *Toute perpendiculaire* CD, *à l'extrémité d'un rayon* OA, *est tangente à la circonférence* (*fig.* 71).

Fig. 71.

Fig. 72.

En effet, en joignant au centre O un point quelconque B de CD, autre que le point A, on obtient une droite OB oblique sur CD, puisque OA est la perpendiculaire à CD qui passe par le point O. Cette droite OB est donc plus grande que le rayon OA (42), et, par suite, le point B est extérieur au cercle (94). La droite CD ayant tous ses points hors du cercle, sauf le point A, qui est commun aux deux lignes, est donc une tangente à la circonférence.

108. Réciproquement, *toute tangente* CD *à la circonférence est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* OA *qui aboutit au point de contact* A (*fig.* 71).

En effet, tout point B de la tangente CD, autre que le point A, étant extérieur au cercle, sa distance BO au centre est plus grande que le rayon (94). Donc le rayon OA est la plus courte de toutes les droites qu'on peut mener du centre à la tangente CD. En d'autres termes, OA est perpendiculaire sur

CD (45), et inversement, la tangente CD est perpendiculaire au point A sur le rayon OA.

Corollaires.

109. *Par un point* A *d'une circonférence* O, *on peut toujours mener une tangente à cette courbe, et l'on ne peut en mener qu'une.*

110. *Toute tangente est parallèle aux cordes que le diamètre mené au point de contact divise en deux parties égales* (103).

Scolies.

111. On peut considérer la tangente AC en un point A d'une circonférence (*fig.* 72) *comme la position limite que prend une sécante* AB *lorsque cette sécante tourne autour du point* A *de manière que le second point d'intersection* B *vienne se confondre avec le premier.* Car, lorsque les deux points d'intersection B et A sont ainsi réunis en un seul, la droite AC n'a plus qu'un point commun avec la circonférence.

Cette nouvelle définition de la tangente est applicable à toutes les courbes. D'ailleurs, nous verrons plus tard qu'outre sa généralité cette définition a sur celle du n° 106 l'avantage de mettre en lumière l'intime corrélation de certains théorèmes qui sembleraient sans cela tout à fait distincts.

On dit qu'une courbe ou qu'un arc de courbe est *convexe* lorsque cette courbe ou cet arc tombe entièrement d'un même côté de chacune de ses tangentes. Le raisonnement du n° 107 prouve que la circonférence est convexe.

Nous avons vu au n° 95 qu'une droite quelconque ne peut rencontrer une circonférence en plus de deux points. Tout arc de courbe convexe jouit de la même propriété; car, si une droite coupait cet arc en trois points, le premier et le dernier point seraient situés de part et d'autre de la tangente au point intermédiaire.

112. On appelle *normale* en un point d'une courbe la perpendiculaire élevée par ce point à la tangente correspondante.

La normale en un point d'une circonférence est donc dirigée suivant le rayon qui passe par ce point, c'est-à-dire que toutes les normales à la circonférence passent par son centre.

Il en résulte que *par un point pris sur la circonférence on peut toujours lui mener une normale, mais une seule; tandis que par un point* O, *extérieur ou intérieur à cette courbe* (*fig.* 73), *on peut en mener deux :* la normale OA et la normale OB.

Toute droite qui n'est pas normale à la circonférence lui est *oblique*.

THÉORÈME.

113. *Toute oblique* OE, *issue d'un point* O *qui n'appartient pas à la circonférence* C, *a sa longueur comprise entre celles des deux normales* OA *et* OB *qui passent par ce point* (*fig.* 73).

Fig. 73.

Que le point O soit extérieur ou intérieur, OA est égal à la différence des côtés OC et CE du triangle OCE; donc la normale OA est plus petite que l'oblique OE, troisième côté du triangle.

De même, OB est égal à la somme des côtés OC et CE du même triangle; donc la normale OB est plus grande que l'oblique OE, troisième côté de ce triangle.

Scolie.

114. On appelle *distance* d'un point O à une circonférence la longueur de la plus petite OA des deux normales que l'on peut mener de ce point à la circonférence.

THÉORÈME.

115. *Deux parallèles interceptent sur la circonférence des arcs égaux.*

Il faut distinguer trois cas :

1° Supposons (*fig.* 74) que les parallèles AB, CD, soient sécantes, et abaissons du centre O sur ces droites la perpendiculaire commune OM qui coupe la circonférence en M. Le

Fig. 74.

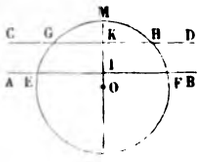


Fig. 75.

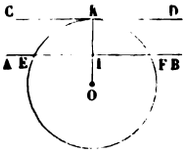
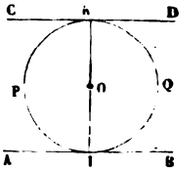


Fig. 76.



point M est (102) à la fois le milieu de l'arc EMF que sous-tend la corde EF, et le milieu de l'arc GMH que sous-tend la corde GH ; on a donc

$$\text{arc EM} = \text{arc FM}, \quad \text{arc GM} = \text{arc HM};$$

d'où, en soustrayant membre à membre,

$$\text{arc EM} - \text{arc GM} = \text{arc FM} - \text{arc HM},$$

c'est-à-dire

$$\text{arc EG} = \text{arc FH}.$$

2° Supposons (*fig.* 75) que les parallèles AB et CD soient l'une sécante et l'autre tangente. Alors le rayon OK, qui aboutit au point de contact, est (107, 110) une perpendiculaire commune à la tangente CD et à la corde EF qui lui est parallèle; il divise donc l'arc EKF, sous-tendu par cette corde, en deux parties égales, et l'on a

$$\text{arc EK} = \text{arc FK}.$$

3° Supposons enfin (*fig.* 76) que les deux parallèles AB et CD soient tangentes, l'une en I et l'autre en K. Les deux rayons OI et OK, respectivement perpendiculaires à AB et à CD, seront dans le prolongement l'un de l'autre, puisque des droites parallèles ont leurs perpendiculaires communes. Les deux arcs KPI, KQI, sont donc égaux l'un et l'autre à une demi-circonférence.

THÉORÈME.

116. *Par trois points* A, B, C, *non situés en ligne droite, on peut toujours faire passer une circonférence, et l'on ne peut en faire passer qu'une* (*fig.* 77).

Fig. 77.

Fig. 78.

Il s'agit de prouver qu'il existe un point, et un seul, situé à la même distance des trois points donnés A, B, C.

Or, tout point équidistant de A, B, C, doit se trouver sur la perpendiculaire DE élevée sur le milieu de AB, parce qu'elle est le lieu des points équidistants de A et de B; il doit aussi appartenir à la perpendiculaire FG élevée sur le milieu de BC, parce qu'elle est le lieu des points équidistants de B et de C. Comme deux droites DE, FG, ne peuvent avoir qu'un point commun, on voit d'abord qu'il ne saurait jamais exister qu'un seul point équidistant des points A, B, C. En second lieu, un tel point existe toujours si, conformément à notre hypothèse, les points A, B, C, ne sont pas en ligne droite; car, les deux droites AB et BC se coupant, les droites DE et FG, qui leur sont respectivement perpendiculaires, doivent se rencontrer en un certain point O (67).

Le cercle décrit de ce point O comme centre, avec l'une des trois droites égales OA, OB, OC, pour rayon, passe par les points A, B, C, et est le seul qui puisse y passer.

On énonce souvent ce théorème d'une manière plus rapide en disant : *Trois points, non en ligne droite, déterminent une circonférence.*

Corollaires.

117. La démonstration précédente prouve que *les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle* ABC

passent par un même point. On en conclut immédiatement que *les trois hauteurs d'un triangle* ABC (*fig.* 78), c'est-à-dire les perpendiculaires AD, BE, CF, abaissées des sommets sur les côtés opposés, *passent par un même point.* Il suffit pour cela de montrer que ces trois hauteurs sont perpendiculaires sur les milieux des côtés du triangle A'B'C' formé en menant par les sommets du triangle primitif ABC des parallèles aux côtés opposés. Or, AD perpendiculaire à BC l'est aussi à sa parallèle B'C' et, de plus, les longueurs AB' et AC' sont égales entre elles, puisqu'elles sont respectivement égales à BC comme parallèles comprises entre parallèles.

118. Deux circonférences ne peuvent avoir trois points communs sans coïncider; d'où il suit que *deux circonférences distinctes ne peuvent avoir plus de deux points communs.*

Lorsque deux circonférences ont deux points communs, on dit qu'elles se coupent ou qu'elles sont *sécantes.*

Lorsque deux circonférences n'ont qu'un point commun, on dit qu'elles sont *tangentes;* le point commun est appelé *point de contact.*

THÉORÈME.

119. *Lorsque deux circonférences se coupent, la droite* OO' *qui joint leurs centres est perpendiculaire sur la corde commune* AB *et divise cette corde en deux parties égales* (*fig.* 79).

Fig. 79.

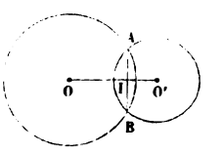
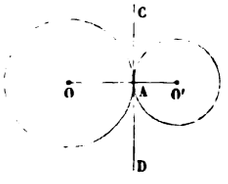


Fig. 80.



En effet, la perpendiculaire élevée sur la corde commune AB par son milieu I doit passer par le centre de chacune des deux circonférences O et O' (103).

COROLLAIRE.

120. Supposons que, la circonférence O restant fixe, ainsi que le point A, la circonférence O' tourne autour du point A,

de manière que le second point d'intersection B se rapproche de plus en plus du premier et vienne à la limite se confondre avec lui, comme dans la *fig.* 80. Les deux circonférences n'ayant plus alors qu'un point commun A seront tangentes en ce point. D'ailleurs, la droite OO′ passant toujours entre A et B, ces deux points ne peuvent se réunir que sur la ligne des centres OO′. Enfin, en vertu de ce mouvement (111), la corde commune devient à la limite tangente en A à chacune des deux circonférences. Donc :

Lorsque deux circonférences O *et* O′ *sont tangentes, leur point de contact* A *est situé sur la droite des centres, et la perpendiculaire* CD *élevée en ce point sur cette droite est une tangente commune aux deux circonférences.*

On appelle *angle de deux courbes* qui ont un point commun l'angle formé par les tangentes à ces deux courbes en ce point. Si cet angle n'est pas nul, on dit que les deux courbes se coupent. S'il est nul, c'est-à-dire si les deux courbes ont la même tangente au point commun, on dit que ces courbes sont tangentes. On appelle *orthogonales* deux courbes qui se coupent à angle droit.

Scolie.

121. Deux circonférences distinctes peuvent avoir deux points communs, c'est-à-dire se couper (*fig.* 83); ou avoir un seul point commun, c'est-à-dire être tangentes, soit extérieurement (*fig.* 82), soit intérieurement (*fig.* 84); ou enfin n'avoir aucun point commun, c'est-à-dire être extérieures (*fig.* 81) ou intérieures (*fig.* 85) l'une à l'autre. Leurs positions relatives sont donc au nombre de cinq.

THÉORÈME.

122. 1° *Si deux circonférences* O *et* O′ *sont extérieures, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons;*

2° *Si elles sont tangentes extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons;*

3° *Si elles se coupent, la distance des centres est à la fois moindre que la somme et plus grande que la différence des rayons;*

4° Si elles sont tangentes intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons;

5° Si elles sont intérieures, la distance des centres est moindre que la différence des rayons.

En effet:

1° A et A′ (*fig.* 81) étant les points où la ligne des centres coupe les deux circonférences, on a

$$OO' = OA + AA' + O'A' \quad \text{ou} \quad OO' > OA + O'A'.$$

2° Le point de contact A (*fig.* 82) est situé entre les deux centres et sur la droite OO′ qui les joint. On a donc

$$OO' = OA + O'A.$$

3° Les deux points communs (*fig.* 83) étant situés hors de

Fig. 81.

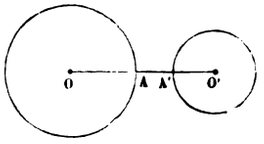


Fig. 82.

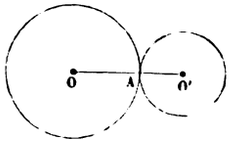


Fig. 83.

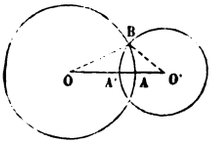


Fig. 84.

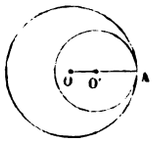
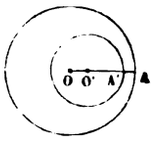


Fig. 85.



la ligne des centres (119), en joignant l'un d'eux B aux deux centres, on forme un triangle dans lequel on a (36, 37)

$$OO' < OB + O'B \quad \text{et} \quad OO' > OB - O'B.$$

4° Le point de contact A (*fig.* 84) est situé au delà des deux centres sur la droite qui les joint. On a donc

$$OA = OO' + O'A, \quad \text{d'où} \quad OO' = OA - O'A.$$

5° A et A′ (*fig.* 85) étant les points où la droite OO′ coupe les deux circonférences, on a

$$OA = OO' + O'A' + A'A, \quad \text{d'où} \quad OA > OO' + O'A',$$

c'est-à-dire

$$OO' < OA - O'A'.$$

COROLLAIRE.

123. A chacune des cinq hypothèses faites répond une conclusion distincte. Donc, en vertu du principe général du n° 7, les réciproques des propositions précédentes sont toutes vraies. Voici leurs énoncés :

1° *Si la distance des centres est plus grande que la somme des rayons, les deux circonférences données sont extérieures l'une à l'autre.*

2° *Si la distance des centres est égale à la somme des rayons, les deux circonférences sont tangentes extérieurement.*

3° *Si la distance des centres est à la fois moindre que la somme et plus grande que la différence des rayons, les deux circonférences se coupent.*

4° *Si la distance des centres est égale à la différence des rayons, les deux circonférences sont tangentes intérieurement.*

5° *Si la distance des centres est moindre que la différence des rayons, les deux circonférences sont intérieures l'une à l'autre.*

Ainsi, connaissant les trois nombres D, R, r, qui mesurent respectivement la distance des centres et les rayons de deux circonférences, on peut, sans tracer ces circonférences et par une simple opération numérique, savoir quelle est leur position relative. Par exemple, si l'on a $D = 15^m$, $R = 21^m$, $r = 6^m$, on peut affirmer que les deux circonférences sont tangentes intérieurement; car on a $15 = 21 - 6$, ou $D = R - r$.

§ III. — MESURE DES ANGLES.

DÉFINITIONS.

124. On nomme *angle au centre* tout angle qui a son sommet au centre d'un cercle, et *angle inscrit* tout angle formé par deux cordes qui se coupent sur la circonférence d'un cercle.

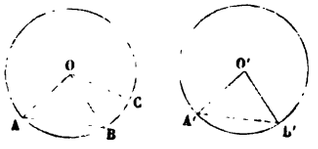
THÉORÈME.

125. *Dans le même cercle ou dans des cercles égaux :*

1° *Deux angles au centre égaux interceptent des arcs égaux ;*

2° *Si un angle au centre est la somme de deux autres angles au centre, l'arc intercepté par cet angle est la somme des arcs interceptés par les deux autres* (*fig.* 86).

Fig. 86.



1° Soient AOB, A'O'B', deux angles au centre égaux entre eux; les deux arcs correspondants AB et A'B' seront égaux. En effet, en menant les cordes AB, A'B', on forme deux triangles AOB, A'O'B', qui sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, savoir : l'angle AOB égal à l'angle A'O'B' par hypothèse, et les côtés OA = O'A', OB = O'B', comme rayons de cercles égaux. Donc la corde AB est égale à la corde A'B', et, par suite (100), les arcs AB et A'B' que ces cordes sous-tendent sont égaux entre eux.

2° Soient A'O'B' et BOC deux angles au centre ; transportons le premier en AOB à la suite du second, de manière à former (9) un angle AOC qui soit la somme des deux angles proposés. L'arc ABC sera évidemment la somme des deux arcs AB et BC, et comme les arcs AB et A'B' sont égaux, puis qu'ils correspondent à des angles au centre égaux, l'arc ABC sera la somme des arcs A'B' et BC.

COROLLAIRE.

126. Il résulte de là (note 1) que, *dans le même cercle ou dans des cercles égaux, le rapport de deux angles au centre est égal au rapport des arcs qu'ils interceptent;* en d'autres termes, *l'angle au centre d'un cercle est proportionnel à l'arc correspondant.*

THÉORÈME.

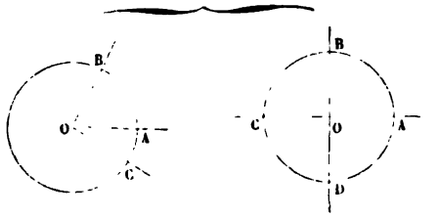
127. *Tout angle a la même mesure que l'arc qu'il intercepte sur une circonférence décrite de son sommet comme centre, avec un rayon quelconque, pourvu que l'on prenne pour unité d'angle l'angle au centre qui intercepte sur cette circonférence l'arc choisi pour unité d'arc.*

En effet, soient (*fig.* 87) AOB l'angle à mesurer et AB l'arc qu'il intercepte sur la circonférence de rayon arbitraire OA; AC étant l'unité d'arc, l'angle correspondant AOC sera, par hypothèse, l'unité d'angle. On a (126)

$$\frac{\text{AOB}}{\text{AOC}} = \frac{\text{arc AB}}{\text{arc AC}}.$$

Or le premier rapport est égal au nombre qui mesure l'angle AOB, et le second est égal au nombre qui mesure l'arc AB. Donc, dans le système d'unités adopté, le nombre qui mesure l'angle AOB est le même que celui qui mesure l'arc AB.

Fig. 87.



Comme ce théorème est d'un usage très-fréquent, on pré-

fère l'énoncer d'une manière plus rapide, quoique incorrecte. D'abord on sous-entend la condition relative à la correspondance des unités; puis on dit *a pour mesure*, au lieu de *a la même mesure que;* et l'on arrive ainsi à cet énoncé usuel: *tout angle au centre a pour mesure l'arc compris entre ses côtés.*

Scolie.

128. Lorsqu'on prend l'angle droit pour unité, l'arc unité est le quart de la circonférence ou *le quadrant;* car, si l'angle au centre AOB est droit (*fig.* 87), les quatre angles AOB, BOC, COD, DOA, formés par les deux diamètres BOD, AOC, sont droits, et par suite égaux; les quatre arcs AB, BC, CD, DA, sont donc égaux entre eux, et chacun d'eux est le quart de la circonférence.

THÉORÈME.

129. *Tout angle inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Soit BAC un angle inscrit dans un cercle O. Pour démontrer que cet angle a pour mesure la moitié de l'arc BC compris entre ses côtés, il convient de distinguer trois cas:

1° Le centre O tombe sur l'un des côtés AC de l'angle BAC (*fig.* 88). Menons le rayon BO; le triangle BOA étant isocèle, les angles A et B sont égaux, et comme (73) leur somme équivaut à l'angle extérieur BOC, l'angle A est égal à la moitié de BOC; mais ce dernier angle, ayant son sommet au centre du cercle, a pour mesure l'arc BC. Donc l'angle proposé BAC a pour mesure la moitié de l'arc BC.

Fig. 88.

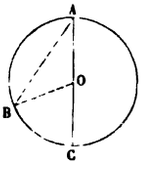


Fig. 89.

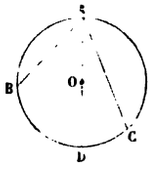
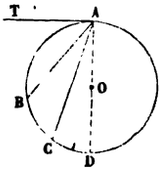


Fig. 90.



2° Le centre O tombe à l'intérieur de l'angle BAC (*fig.* 89). Menons le diamètre AOD; l'angle BAC est la somme des an-

gles BAD, DAC, qui, d'après le premier cas, ont respectivement pour mesure $\frac{1}{2}$ BD et $\frac{1}{2}$ DC. La somme de ces deux arcs, c'est-à-dire la moitié de l'arc BDC, est donc la mesure de l'angle BAC.

3° Le centre O tombe en dehors de l'angle BAC (*fig.* 90). Menons le diamètre AOD; l'angle BAC est la différence des angles BAD, CAD, qui, d'après le premier cas, ont respectivement pour mesure $\frac{1}{2}$ BD et $\frac{1}{2}$ CD; la différence de ces arcs, c'est-à-dire la moitié de l'arc BC, est donc la mesure de l'angle proposé BAC.

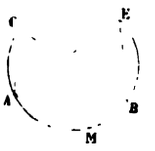
COROLLAIRES.

130. Supposons (*fig.* 90) que, le côté AC restant fixe, la corde AB tourne autour du sommet A, de manière à devenir la tangente AT au point A; dans toutes les positions de la corde AB, l'angle inscrit BAC aura pour mesure la moitié de l'arc correspondant BC; donc, à la limite, *l'angle* TAC, *formé par une tangente* AT *et une corde* AC *issue du point de contact, a pour mesure la moitié de l'arc* AC *compris entre ses côtés.*

On peut d'ailleurs démontrer ce théorème, indépendamment de toute notion de limite. Il suffit, par exemple, d'observer que l'angle TAC est l'excès de l'angle droit TAD sur l'angle inscrit CAD; sa mesure est donc l'excès de la moitié de la demi-circonférence ABD sur la moitié de l'arc CD, ou enfin la moitié de l'arc AC.

131. On appelle *segment* la portion de cercle comprise entre un arc et sa corde. A chaque corde AB correspondent deux segments ACB, AMB (*fig.* 91). On dit qu'*un angle est inscrit*

Fig. 91.



dans un segment lorsque son sommet est situé sur l'arc du

segment et que ses côtés passent par les extrémités de la corde sous-tendante. Ainsi les angles ACB, AEB, sont inscrits dans le segment ACB, et l'angle AMB est inscrit dans le segment AMB.

Tous les angles inscrits dans un même segment sont égaux: ainsi, les angles ACB, AEB, sont égaux comme ayant l'un et l'autre la moitié de l'arc AMB pour mesure.

Tout angle inscrit dans l'un des deux segments déterminés par une même corde est le supplément d'un angle quelconque inscrit dans l'autre segment. Ainsi les angles ACB, AMB, sont supplémentaires, car leurs mesures $\frac{1}{2}$ arc AMB et $\frac{1}{2}$ arc ACB forment en somme la moitié de la circonférence.

Tout angle inscrit dans un segment est aigu, droit ou obtus, suivant que ce segment est supérieur, égal ou inférieur à un demi-cercle; car l'arc compris entre les côtés de l'angle est alors inférieur, égal ou supérieur à une demi-circonférence.

On dit qu'*un segment de cercle est capable d'un angle donné*, lorsque les angles inscrits dans ce segment sont égaux à l'angle considéré; ainsi *le segment capable d'un angle droit est un demi-cercle.*

Fig. 92.

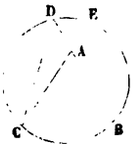
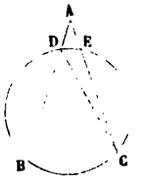


Fig. 93.



THÉORÈME.

132. *Tout angle* BAC, *formé par deux sécantes qui se rencontrent à l'intérieur du cercle, a pour mesure la demi-somme des arcs* BC *et* DE *compris entre ses côtés et entre ses côtés prolongés* (*fig.* 92).

En effet, en menant DC, on voit que l'angle BAC, extérieur au triangle ACD, est égal (73) à la somme des angles inscrits ADC, ACD, qui ont respectivement pour mesure $\frac{1}{2}$ BC et $\frac{1}{2}$ DE.

THÉORÈME.

133. *Tout angle* BAC, *formé par deux sécantes qui se rencontrent hors du cercle, a pour mesure la demi-différence de l'arc concave* BC *et de l'arc convexe* DE *compris entre ses côtés* (*fig.* 93).

En effet, en menant DC, on voit que l'angle BDC, extérieur au triangle DAC, est la somme des angles A et C; par suite, l'angle A est l'excès de l'angle BDC sur l'angle C; sa mesure est donc l'excès de $\frac{1}{2}$ BC sur $\frac{1}{2}$ DE, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$ (BC — DE).

En faisant tourner autour du sommet A l'un des côtés, ou même les deux côtés de l'angle, jusqu'à ce qu'ils deviennent tangents à la circonférence, on voit que le théorème subsiste pour l'angle formé par une tangente et une sécante qui se coupent hors du cercle, et pour l'angle de deux tangentes.

COROLLAIRE.

134. *Dans la portion de plan située au-dessus d'une droite* BC, *le lieu des points d'où l'on voit cette droite sous un angle donné est un arc de cercle passant par les extrémités* B *et* C *de cette droite* (*fig.* 94).

En effet, soient A un point du lieu et BMACN la circonférence déterminée par les trois points A, B, C. 1° De tout point M de l'arc BMAC on voit la droite BC sous un angle égal à BAC (131); 2° de tout point I pris à l'intérieur du segment BMAC, on voit la droite BC sous un angle BIC plus grand que BAC, puisque (132) sa mesure excède la moitié de l'arc BNC; 3° de tout point E extérieur au segment BMAC et situé au-dessus de la droite BC, on voit cette droite sous un angle BEC moindre que BAC, puisque sa mesure est plus petite que la moitié de l'arc BNC (133). L'arc BMAC est donc le lieu cherché.

Il résulte de là que l'arc BA'C, sur lequel s'applique l'arc BMAC, lorsqu'on replie la figure autour de BC, est, au-dessous de BC, le lieu des points d'où l'on voit la droite BC sous l'angle donné.

Donc, enfin, *le lieu des points d'où l'on voit une droite* BC *sous un angle donné se compose de deux arcs de cercle égaux*

entre eux et passant par les extrémités B *et* C *de cette droite*

Remarquons, en outre, que l'ensemble des arcs BNC, BN'C, représente le lieu des points d'où l'on voit la droite BC sous un angle supplémentaire de l'angle considéré (131).

Fig. 94.

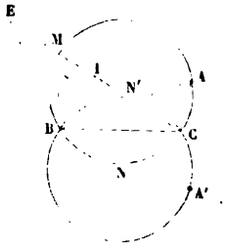
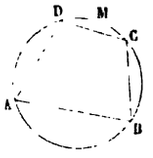


Fig. 95.



Si l'angle considéré est droit, les deux arcs BAC, BA'C, sont des demi-circonférences décrites sur BC comme diamètre. Donc, *le lieu des points d'où l'on voit une droite sous un angle droit est le cercle décrit sur cette droite comme diamètre.*

THÉORÈME.

135. *Dans tout quadrilatère convexe inscrit dans un cercle, les angles opposés sont supplémentaires.*

En effet (*fig.* 95), considérons par exemple les angles opposés, B et D. La corde AC détermine deux segments ADC, ABC, et nous avons vu (131) que tout angle D inscrit dans le segment supérieur est le supplément de tout angle B inscrit dans le segment inférieur.

Réciproquement, *si, dans un quadrilatère convexe* ABCD, *deux angles opposés* B *et* D *sont supplémentaires, le quadrilatère est inscriptible;* en d'autres termes, la circonférence déterminée par les trois points A, B, C, passera par le quatrième sommet D.

En effet, le sommet D est un point situé au-dessus de AC, et d'où l'on voit la corde AC sous un angle supplémentaire de l'angle B; or l'arc AMC est le lieu des points du plan qui jouissent de cette propriété (134).

§ IV. — CONSTRUCTION DES ANGLES ET DES TRIANGLES.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

136. Les deux principaux instruments employés dans la construction graphique des figures sont la *règle* et le *compas*. Chacun sait comment on trace des lignes droites avec la règle et des circonférences avec le compas.

On fait d'abord tout le dessin au crayon; on exécute ensuite la *mise à l'encre* à l'aide d'un tire-ligne à branches égales et que l'on tient perpendiculairement au plan du papier. Les *données* et les *résultats* sont représentés par un train *plein* ou continu; on représente par un trait *pointillé* ou interrompu les *lignes de construction*, c'est-à-dire les lignes qui servent à déduire les résultats des données.

En pratique, lorsqu'on détermine une droite par deux points, il convient que ces deux points ne soient pas trop voisins l'un de l'autre; sans cela, la moindre erreur sur la position de l'un d'eux entraînerait une erreur notable sur la direction de la droite.

De même, quand un point est déterminé par la rencontre de deux droites, il faut que ces droites ne se coupent pas sous un angle trop petit; sans cela l'épaisseur inévitable des deux traits laisserait dans l'incertitude sur la véritable position du point de rencontre.

PROBLÈME.

137. *Trouver la plus grande commune mesure de deux lignes droites.*

Soient A et B deux droites *commensurables entre elles;* la recherche de leur plus grande commune mesure, c'est-à-dire de la plus grande portion de droite qui soit une partie aliquote de chacune d'elles, repose sur les deux principes suivants :

1° *Si* B *est une partie aliquote* de A, B *est évidemment la plus grande commune mesure de* A *et de* B;

2° *Si* A *contient m fois* B, *plus un reste* R *moindre que* B,

la plus grande commune mesure de A *et de* B *est la même que celle de* B *et de* R. On a, en effet,

$$A = mB + R;$$

or, toute commune mesure de A et de B, étant une partie aliquote de B, l'est aussi de mB, et, par suite, de $A - mB$ ou de R. Inversement, toute commune mesure de B et de R, étant une partie aliquote de B, l'est aussi de mB, et, par suite, de $mB + R$ ou de A. Donc les communes mesures de A et de B sont les mêmes que celles de B et de R; et, en particulier, la plus grande commune mesure est la même de part et d'autre.

D'après cela, on portera B sur A autant de fois que possible; s'il n'y a pas de reste, B sera la plus grande commune mesure demandée; s'il y a un reste R, on sera ramené à chercher la plus grande commune mesure de B et de R. On portera donc R sur B autant de fois que possible; s'il n'y a pas de reste, R sera la plus grande commune mesure demandée; s'il y a un reste R′, on sera ramené à chercher la plus grande commune mesure de R et de R′.

Il est aisé de prouver qu'en continuant de la sorte on arrivera à un reste qui sera une partie aliquote du précédent. En effet, dans toute division, le dividende est au moins égal à la somme du diviseur et du reste; le reste est d'ailleurs moindre que le diviseur; donc le reste est inférieur à la moitié du dividende. On voit par là que, dans la recherche de la plus grande commune mesure de A et de B, le premier reste sera inférieur à $\frac{A}{2}$; le troisième reste sera moindre que la moitié du premier, et, par suite, inférieur à $\frac{A}{4}$; le cinquième reste sera moindre que la moitié du troisième, et, par suite, inférieur à $\frac{A}{8}$; et ainsi de suite. L'opération ne pourra donc pas se prolonger indéfiniment, car on tomberait sur un reste moindre que la plus grande commune mesure supposée; ce qui est absurde, puisque, d'après la théorie précédente, la plus grande commune mesure doit diviser exactement les restes successifs.

On arrivera donc à un reste qui sera une partie aliquote du précédent, et ce reste sera la plus grande commune mesure demandée.

138. Réciproquement, si, en appliquant le procédé qu'on vient d'indiquer à deux droites données, on arrive à un reste qui soit contenu un nombre exact de fois dans celui qui le précède, les deux droites considérées seront commensurables entre elles, et ce reste sera alors leur plus grande commune mesure.

Ainsi, supposons qu'on ait trouvé successivement

$$A = B + R, \quad B = 5R + R', \quad R = 2R' + R'', \quad R' = 3R'';$$

on aura

$$R = 7R'', \quad B = 38R'', \quad A = 45R'',$$

et le rapport des deux droites A et B sera représenté par le nombre fractionnaire $\frac{45}{38}$. D'ailleurs R'' étant la plus grande commune mesure de R' et de R'' sera, d'après ce qui précède, la plus grande commune mesure de A et de B.

Scolie.

139. Il résulte de là que le procédé précédent, appliqué à deux droites incommensurables entre elles, conduira à une série d'opérations interminable.

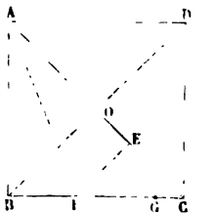
Cette conclusion, absolument *rigoureuse en théorie*, ne se vérifie pas *en pratique*; car les restes cessent d'être appréciables au compas. Mais, s'il est impossible de constater de cette manière, ou plus généralement au moyen d'une opération mécanique quelconque, l'incommensurabilité de deux droites, on peut parfois, lorsque les droites résultent d'une construction bien définie, démontrer *géométriquement* leur incommensurabilité en s'appuyant sur la théorie qui précède et en cherchant la loi des restes successifs.

Nous allons, comme exemple, démontrer ainsi que *la diagonale* AC *et le côté* AB *d'un carré* ABCD *sont deux lignes incommensurables entre elles*.

Le côté AB (*fig.* 96) étant moindre que la diagonale AC et plus grand que la moitié AO de cette diagonale, on voit d'abord que, si l'on prend sur la diagonale AC la longueur AE égale à AB, le reste EC sera moindre que AB.

Comparons maintenant ce reste EC au côté AB ou à son égal BC. Si l'on mène EF parallèle à BD, le triangle FEC, rectangle en E, sera isocèle, puisque l'angle EFC est égal à son correspondant OBC, et, par suite,

Fig. 96.



à ECF. Donc, dans ce triangle comme dans le triangle analogue ABC, si l'on prend FG égale à EC, le reste GC sera moindre que EC. D'ailleurs, les triangles rectangles ABF, AEF, ayant l'hypoténuse commune et un côté égal, sont égaux, et, par suite, BF est égal à FE ou à EC ou à FG. Donc enfin *le côté* BC *contient deux fois* EC, *plus un reste* GC *moindre que* EC.

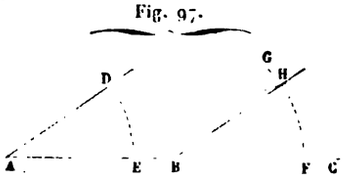
Ce dernier résultat, énoncé d'une manière générale, prouve que dans tout triangle rectangle et isocèle le côté contient deux fois la différence entre l'hypoténuse et le côté, plus un reste moindre que cette différence. Donc, à son tour, *le côté* EC *contiendra deux fois* GC, *plus un nouveau reste moindre que* GC, et ainsi de suite.

On voit par là que, si l'on applique aux droites AC et AB la règle prescrite au n° 137, chaque reste contiendra deux fois le précédent, plus un nouveau reste moindre que celui-ci, de sorte que l'opération n'aura pas de fin. Les deux droites considérées sont donc incommensurables entre elles.

PROBLÈME.

140. *Par un point* B *d'une droite* BC, *mener une seconde droite qui fasse avec la première un angle égal à un angle donné* (*fig.* 97).

Fig. 97.



Du point A comme centre, avec une ouverture de compas

arbitraire, mais assez grande, décrivez un arc de cercle qui coupe en D et E les côtés de l'angle donné : avec la même ouverture, et du point B comme centre, décrivez un second arc de cercle GF, qui coupe en F la droite BC. Prenez avec le compas la longueur de la corde DE (il est inutile pour cela de tracer cette corde), et du point F comme centre, avec cette ouverture, décrivez un arc de cercle qui coupe en H l'arc GF; la droite BH sera la droite demandée.

En effet, les arcs HF et DE ayant des rayons égaux et des cordes égales sont égaux (100); par suite, les angles au centre HBF, DAE, qui correspondent à ces arcs, sont aussi égaux (126).

141. On divise la circonférence en 360 parties égales qu'on nomme *degrés*, le degré en 60 parties égales appelées *minutes*, et la minute en 60 parties égales appelées *secondes*. D'après cela, la circonférence contient $360.60 = 21600$ minutes, ou $21600.60 = 1296000$ secondes; la demi-circonférence contient 180 degrés, ou 10800 minutes, ou 648000 secondes; enfin le quadrant vaut 90 degrés, ou 5400 minutes, ou 324000 secondes.

On évalue un arc quelconque en degrés, minutes et secondes de la circonférence. Ainsi l'on dit : un arc de 36 degrés 15 minutes 21 secondes, que l'on écrit : arc de $36°15'21''$.

Deux arcs AB et A'B' (*fig.* 98), décrits entre les côtés d'un même angle XOY, de son sommet comme centre, contiennent

Fig. 98.

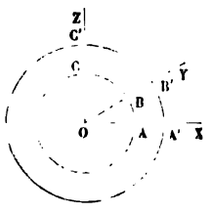
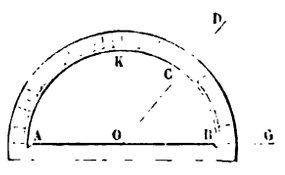


Fig. 99.



le même nombre de degrés, minutes et secondes. En effet, le rapport de l'arc AB au quadrant AC est le même que le rapport de l'arc A'B' au quadrant A'C', puisque chacun de ces rapports est égal à celui de l'angle XOY à l'angle droit

XOZ. Or, comme le quadrant AC vaut 90 degrés de la circonférence OA, et que le quadrant A'C' vaut 90 degrés de la circonférence OA', les arcs AB et A'B' vaudront le même nombre de degrés, minutes et secondes de leurs circonférences respectives.

D'après cela, on appelle angle de 36° 15' 21" l'angle qui intercepte entre ses côtés, sur toute circonférence décrite de son sommet comme centre, un arc de 36° 15' 21".

Connaissant le nombre de degrés, minutes et secondes d'un angle, on obtient son rapport à l'angle droit en prenant le rapport de ce nombre de degrés, minutes et secondes à 90 degrés; il faut avoir soin, bien entendu, d'évaluer les deux angles en unités de même espèce, soit en degrés, soit en minutes, soit en secondes. Ainsi, comme 36° 15' 21" valent 130521 secondes, et que 90 degrés renferment 324000 secondes, le rapport de l'angle de 36° 15' 21" à l'angle droit est exprimé par la fraction $\frac{130521}{324000}$ ou $\frac{43507}{108000}$.

Pour évaluer le nombre de degrés d'un angle, ou pour tracer un angle ayant un nombre de degrés donné, on emploie un instrument appelé *rapporteur*. C'est un demi-cercle en corne ou en cuivre dont le bord circulaire ou *limbe* est divisé en 180 parties égales ou degrés; les rapporteurs qui ont un décimètre de rayon sont même divisés en demi-degrés. Le centre est marqué par un petit trou ou par une petite échancrure.

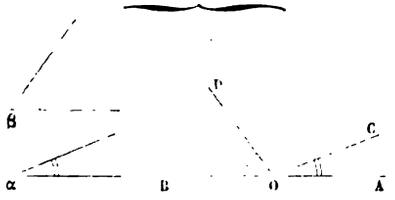
Pour mesurer un angle DOG (*fig.* 99), on place l'instrument de manière que son centre coïncide avec le sommet de l'angle, et que le diamètre AB, qui va de zéro à 180 degrés, s'applique sur l'un des côtés OG. On lit alors le nombre de degrés de l'angle au point où le limbe est traversé par le second côté OD.

Pour mener au point O d'une droite OG une seconde droite OD, formant avec la première un angle donné, de 49 degrés par exemple, on place l'instrument de manière que son centre soit en O, et que son diamètre AB coïncide avec OG; puis on marque le point C du papier sur lequel tombe la division 49 du limbe; et, après avoir enlevé le rapporteur, on tire la droite OC.

PROBLÈME.

142. *Connaissant deux angles α et 6 d'un triangle, construire le troisième γ.*

Fig. 100.



Tracez une droite indéfinie AB (*fig.* 100); par l'un de ses points O, menez une droite OC qui forme avec OA un angle COA égal à α; menez par le même point O une autre droite OD qui fasse avec OB un angle DOB égal à 6. L'angle COD sera l'angle cherché; car la somme des trois angles formés autour du point O et au-dessus de AB équivaut à deux angles droits (72).

SCOLIE.

143. Nous allons apprendre à construire un triangle, connaissant : 1° un côté et deux angles; 2° deux côtés et l'angle compris; 3° deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux; 4° les trois côtés. Dans ces quatre problèmes, nous désignerons les trois côtés par a, b, c, et les angles respectivement opposés par A, B, C; ainsi l'angle A sera opposé au côté a, l'angle B au côté b, l'angle C au côté c.

PROBLÈME.

144. *Construire un triangle, connaissant un côté a et deux angles.*

On peut donner les deux angles B et C adjacents au côté a, ou bien l'angle opposé A et l'un des angles adjacents; on ramène ce dernier cas au premier en commençant par chercher le troisième angle (142).

Supposons donc connus le côté a et les deux angles adjacents B et C.

Après avoir tracé une droite BC (*fig.* 101) égale à a, menez au point B une droite BA formant avec BC et au-dessus de cette

ligne un angle ABC égal à l'angle donné B; menez de même au point C une droite CA formant avec CB, et au-dessus de cette ligne, un angle ACB égal à l'angle donné C. Le point de rencontre A de ces deux droites sera le troisième sommet du triangle cherché.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les deux droites BA, CA, se coupent, c'est-à-dire (66) que la somme des deux angles B et C soit moindre que deux angles droits.

Fig. 101.

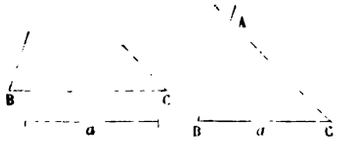
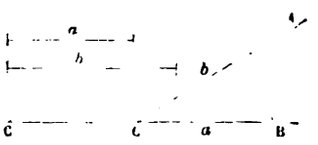


Fig. 102.



PROBLÈME.

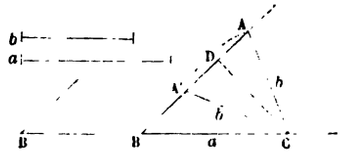
145. *Construire un triangle, connaissant deux côtés a et b et l'angle compris* C.

Tracez une droite CB (*fig.* 102) égale à a; au point C, menez une droite CA formant avec la première un angle ACB égal à l'angle donné C; puis prenez sur cette droite, à partir du point C, une longueur CA égale à b; enfin tirez AB, et vous aurez le triangle cherché.

PROBLÈME.

146. *Construire un triangle, connaissant deux côtés a et b et l'angle* B *opposé à l'un d'eux.*

Fig. 103.



Tracez une droite BC (*fig.* 103) égale à a, et au point B menez une droite BA formant avec la première un angle ABC égal à l'angle donné B; puis, du point C comme centre, avec

une ouverture de compas égale à *b*, décrivez un arc de cercle. Si A est un point d'intersection du côté BA et de cet arc de cercle, il suffira de tirer AC pour avoir un triangle ABC satisfaisant aux conditions exigées.

Discutons maintenant ce problème, c'est-à-dire cherchons les conditions que doivent remplir les données pour que le problème soit possible, et, dans ce cas, les diverses solutions qui peuvent exister.

1° *L'angle* B *étant aigu* (*fig.* 103), pour que le problème soit possible, il faut que l'arc de cercle rencontre le côté BA, c'est-à-dire que le côté *b* soit au moins égal à la perpendiculaire CD abaissée du point C sur BA.

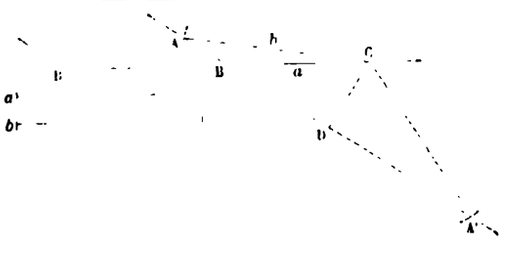
Si le côté *b* est égal à cette perpendiculaire CD, le cercle touche BA en D, et il n'y a qu'une solution : c'est le triangle rectangle BCD.

Si le côté *b* est compris entre la longueur de la perpendiculaire CD et celle du côté *a*, le cercle coupe la droite BA en deux points A et A′ situés au-dessus de B, et de part et d'autre de D; il y a donc deux solutions distinctes : ce sont les triangles ABC, A′BC.

Enfin, si le côté *b* est plus grand que *a*, le point A′ passe au-dessous de B, et le triangle correspondant doit être rejeté, puisque son angle en B n'est plus l'angle donné, mais son supplément; il n'y a donc qu'une solution : c'est le triangle ABC.

2° *L'angle* B *étant obtus* (*fig.* 104), la perpendiculaire CD

Fig. 104.



ne tombe plus dans l'angle B, mais dans son supplément (44): et, pour que le problème soit possible, c'est-à-dire pour que

l'arc de cercle coupe la droite BA au-dessus de B, il faut que le côté b soit plus grand que a : ce que l'on pouvait prévoir, car dans tout triangle au plus grand angle doit être opposé le plus grand côté. D'ailleurs, lorsque cette condition est remplie, les deux points d'intersection A et A′ sont de part et d'autre de B; le triangle A′BC doit être rejeté, car son angle en B est le supplément de l'angle donné, et il n'y a qu'une solution : c'est le triangle ABC.

3° *L'angle* B *étant droit*, le problème est impossible si b est inférieur ou égal à a; il admet une solution unique si b est supérieur à a.

La discussion est résumée dans le tableau suivant :

B aigu	$b <$ CD	problème impossible,
	$b =$ CD	une solution,
	$a > b >$ CD	deux solutions,
	$b = a$ ou $> a$	une solution.
B droit ou obtus.	$b < a$ ou $= a$....	problème impossible,
	$b > a$.....	une solution.

Ainsi, lorsque b est supérieur à a, le problème a toujours une solution et une seule; en d'autres termes, on peut toujours construire un triangle, et un seul, connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, pourvu que l'angle donné soit opposé au plus grand des deux côtés donnés. De là ce théorème :

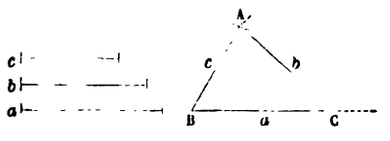
Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun, ainsi que l'angle opposé au plus grand de ces deux côtés.

PROBLÈME.

147. *Construire un triangle connaissant les trois côtés a, b, c.*

Tracez (*fig.* 105) une droite BC égale à a, c'est-à-dire au plus

Fig. 105.



grand des côtés donnés. Du point C comme centre, avec une

ouverture de compas égale à b, décrivez, au-dessus de BC, un arc de cercle; du point B comme centre, avec une ouverture de compas égale à c, décrivez au-dessus de BC un autre arc de cercle. En joignant aux points B et C le point d'intersection A de ces deux arcs, vous aurez le triangle demandé ABC.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les deux arcs de cercle se coupent, c'est-à-dire (122) que le plus grand côté a, qui est la distance des centres, soit moindre que la somme et plus grand que la différence des deux autres côtés b et c qui sont les rayons. Ce résultat est conforme aux nos 36 et 37.

Scolie.

148. Tels sont les quatre problèmes fondamentaux relatifs à la construction des triangles; beaucoup d'autres se ramènent à ceux-là. Voici quelques exemples :

Soit ABC un triangle quelconque, dont nous désignerons les angles par A, B, C. Si l'on prolonge BA d'une longueur AD, égale à AC, et si l'on mène CD (*fig.* 30), on forme une figure dont on évalue facilement les angles en appliquant le théorème du n° 72 et observant que les angles ADC et ACD sont égaux; on trouve ainsi

$$B, \quad \frac{A}{2}, \quad 90^\circ + \frac{C - B}{2},$$

pour les valeurs des angles du triangle BDC. Si, donc, *on donne, dans un triangle* ABC, *la base* BC, *la somme des deux autres côtés,* et, en outre, soit *le demi-angle opposé à la base,* soit *la demi-différence des angles à la base,* on connaîtra dans le triangle auxiliaire BDC deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux; on pourra donc construire ce triangle, et, par suite, le triangle demandé ABC, en menant une droite CA faisant avec CD un angle égal à CDB.

De même, si sur le plus grand AB des deux côtés AB et AC on porte de A vers B une longueur AD égale à AC, on voit que les angles du triangle BDC ont respectivement pour valeurs

$$B, \quad 90^\circ + \frac{A}{2}, \quad \frac{C - B}{2}.$$

Si, donc, *on donne, dans un triangle* ABC, *la base* BC, *la différence* AB — AC *des deux autres côtés,* et en outre, soit *le demi-angle opposé à la base,* soit *la demi-différence des angles à la base,* on connaîtra dans le

triangle auxiliaire BDC deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux; on pourra donc construire ce triangle, et par suite le triangle demandé ABC en menant une droite CA faisant avec CD un angle égal au supplément de CDB.

La discussion résulte d'ailleurs immédiatement de celle du n° 146.

§ V. — TRACÉ DES PARALLÈLES ET DES PERPENDICULAIRES.

PROBLÈME.

149. *Par un point donné* A, *pris hors d'une droite* BC, *mener une parallèle à cette droite* (*fig.* 106).

Fig. 106.

La droite BC et la parallèle cherchée AD doivent faire (65), avec une sécante quelconque AC issue du point A, deux angles alternes-internes DAC, ACB, égaux entre eux. De cette considération et de la solution du problème du n° 140 résulte la construction suivante :

Du point A comme centre, avec une ouverture de compas arbitraire, mais assez grande, décrivez un arc de cercle DC; du point C, avec la même ouverture, décrivez un second arc de cercle AB, qui passera nécessairement par A. Prenez avec le compas la longueur de la corde AB, et du point C comme centre, avec cette ouverture, décrivez un arc de cercle qui coupe en D l'arc DC. En tirant AD, vous aurez la parallèle demandée.

Il est clair, en effet, qu'on a construit de cette façon un angle DAC égal à ACB. Il est inutile de tracer la droite AC, qui ne sert que dans la démonstration.

150. Dans la pratique, on résout presque toujours ce problème à l'aide d'un instrument spécial qui porte le nom d'*équerre*. C'est une planchette en bois ayant la forme d'un triangle rectangle; elle est munie d'une petite ouverture circulaire ou *œil*, qui la rend plus facile à manier.

Pour vérifier une équerre BAC (*fig.* 107), on applique l'un des côtés de l'angle droit AB contre une règle bien exacte, et

l'on trace une droite au crayon le long du côté AC. Cela fait, on retourne l'équerre, comme l'indique la figure, et l'on trace une nouvelle droite le long de AC'; selon que les deux droites

Fig. 107.

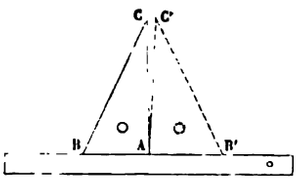
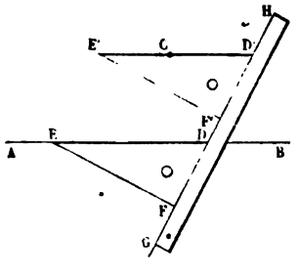


Fig. 108.



ainsi obtenues coïncident ou divergent, l'angle BAC de l'équerre est droit ou non, en d'autres termes l'équerre est juste ou fausse.

Pour mener (*fig.* 108) à l'aide de l'équerre, par un point C, une parallèle à une droite AB, on place sur la droite AB l'hypoténuse de l'équerre; puis on appuie la règle GH contre le petit côté DF de l'angle droit, et, en maintenant la règle immobile, on fait glisser l'équerre jusqu'à ce que l'arête, qui coïncidait d'abord avec AB, vienne passer par le point C; on trace alors le long de cette arête une droite E'D' qui est la parallèle demandée. En effet, les angles correspondants E'D'F', EDF, étant égaux, les droites E'D', ED, sont parallèles.

Cette méthode ne suppose pas que l'équerre ait l'un de ses angles droits. Il suffit que les arêtes soient bien dressées; cet avantage et la simplicité de l'opération expliquent la supériorité de ce procédé.

PROBLÈME.

151. *Mener une perpendiculaire sur une droite en son milieu.*

Soient (*fig.* 109) A et B deux points donnés; il s'agit de mener une perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint ces deux points.

La perpendiculaire sur le milieu d'une droite étant le lieu des points équidistants des extrémités de cette droite (49), il

suffit d'obtenir deux points qui soient chacun également distants de A et de B, puis de joindre ces deux points. De là cette construction.

Fig. 109.

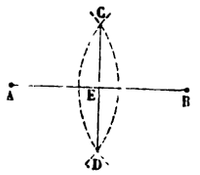
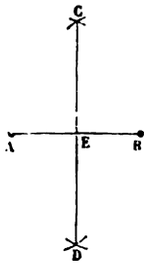


Fig. 110.



Du point A comme centre, avec un rayon sensiblement plus grand que la moitié de AB, décrivez une circonférence; du point B comme centre, avec la même ouverture, décrivez une seconde circonférence; ces deux circonférences se couperont, puisque, les deux rayons étant égaux et surpassant la moitié de AB, la distance AB des centres sera comprise entre la somme et la différence des rayons. Chacun des deux points d'intersection C et D sera équidistant de A et de B; et, en tirant CD, vous aurez la perpendiculaire demandée.

Dans la pratique, on ne décrit pas les cercles complets; on se borne à tracer deux petits arcs de chacun d'eux, de part et d'autre de AB, dans la région où l'on prévoit que l'intersection doit avoir lieu (*fig.* 110). Ce procédé ne suppose pas que la droite AB soit tracée.

Ce problème renferme les deux suivants :

1° *Diviser une droite en deux parties égales;*

2° *Décrire un cercle sur une droite donnée pour diamètre.*

Cette dernière question se réduit en effet à la recherche du *milieu* de la droite, qui est le centre du cercle à décrire.

PROBLÈME.

152. *Diviser un arc de cercle ou un angle en deux parties égales* (*fig.* 111).

1° Soit AB l'arc proposé; on sait que la perpendiculaire menée sur le milieu de la corde divise l'arc en deux parties

égales (103); on appliquera donc la construction du n° 151. Si le centre O de l'arc est donné, il suffira de déterminer un seul point équidistant de A et de B, et de mener OE.

2° Soit AOB l'angle proposé. Du point O comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrira un arc AB entre les côtés de l'angle, et la droite OE qui divisera cet arc en deux parties égales sera évidemment la bissectrice de l'angle AOB.

En appliquant ce procédé aux deux moitiés, aux quatre quarts, etc., de l'arc, on divisera l'arc et l'angle en 4, 8, etc., parties égales.

Fig. 111.

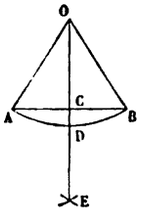
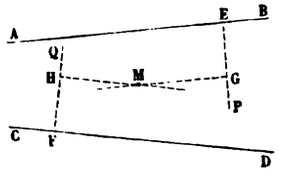


Fig. 112.



153. Il peut arriver que le sommet de l'angle sorte de la feuille de dessin; en d'autres termes, on a besoin parfois de *trouver la bissectrice de l'angle formé par deux droites* AB *et* CD *qu'on ne peut pas prolonger jusqu'à leur point d'intersection.*

On mène (*fig.* 113) une perpendiculaire quelconque EP sur AB et une perpendiculaire quelconque FQ sur CD. Sur ces perpendiculaires, on prend deux longueurs égales HF et GE; puis, par H, on mène une parallèle à CD, et, par G, une parallèle à AB; le point de rencontre M de ces deux lignes est un point de la bissectrice cherchée. En effet, ce point M est (53) à des distances égales GE et HF des deux droites proposées. En prenant deux autres longueurs égales sur EP et FQ, on obtiendrait un second point M' de la bissectrice, et il ne resterait plus qu'à tirer MM'.

PROBLÈME.

154. *Décrire une circonférence qui passe par trois points donnés* A, B, C, *non situés en ligne droite* (*fig.* 77).

Le centre O devant se trouver (116) à l'intersection des per-

pendiculaires élevées, l'une sur le milieu de AB, l'autre sur le milieu de BC, il suffira, pour avoir ce centre, de répéter deux fois la construction du n° 151. Il est même inutile de tracer les droites AB et BC. Le centre O étant connu, on décrira la circonférence demandée à l'aide d'une ouverture de compas égale à l'une des trois droites égales OA, OB, OC.

Pour trouver le centre d'une circonférence déjà tracée, on prend à volonté trois points A, B, C, sur cette circonférence, et l'on applique la solution qui précède.

PROBLÈME.

155. *Mener par un point donné* C *une perpendiculaire sur une droite donnée* AB.

Il y a deux cas à distinguer :

1° Le point donné C est sur la droite AB (*fig.* 113). En prenant de part et d'autre de C deux longueurs égales CA et CB sur la droite donnée, le problème est ramené à celui du n° 151. Seulement, ici, la droite AB est tracée, et l'on connaît son milieu, de sorte qu'il suffit de trouver un seul point D de la perpendiculaire. De là cette construction :

Avec une ouverture de compas arbitraire, mais assez grande, prenez sur la droite donnée, et à partir du point C, deux distances égales CA et CB. Ouvrez davantage le compas, et des points A et B comme centres décrivez successivement, avec cette nouvelle ouverture, deux petits arcs de cercle au-dessus de AB. En joignant au point C le point D d'intersection de ces arcs, vous aurez la perpendiculaire cherchée.

Fig. 113.

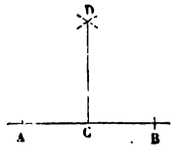
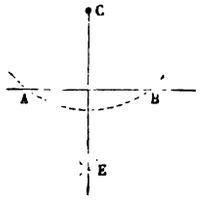


Fig. 114.



2° Le point C est hors de la droite AB (*fig.* 114). En traçant, du point C comme centre, un arc de cercle qui coupe la droite AB en deux points A et B, on est ramené au problème

du n° 151, avec cette différence qu'on connaît déjà un point C de la perpendiculaire et qu'il suffit d'en trouver un second. De là la construction suivante :

Du point C comme centre, avec un rayon assez grand, décrivez un arc de cercle qui coupe la droite donnée en deux points A et B. De ces points comme centres, avec une ouverture de compas sensiblement plus grande que la moitié de AB, décrivez successivement deux petits arcs de cercle au-dessous de AB. En joignant au point C le point E où ces arcs se coupent, vous aurez la perpendiculaire demandée.

156. En bonne construction on ne doit jamais se servir *directement* de l'équerre pour le dessin des perpendiculaires. Toutefois, il est un cas très-fréquent dans la pratique où l'emploi, en quelque sorte *indirect*, de cet instrument fournit d'excellents résultats : c'est celui où l'on doit *mener sur une droite des perpendiculaires par plusieurs points.* On commence par tracer avec soin l'une de ces perpendiculaires à l'aide du compas, puis on lui mène à l'équerre des parallèles par les autres points. On opère de même lorsqu'on veut *élever une perpendiculaire à l'extrémité d'une droite qu'on ne peut pas prolonger;* on trace à l'équerre, par ce point extrême, une parallèle à une perpendiculaire que l'on a préalablement menée sur cette droite en un autre point à l'aide de la règle et du compas.

Voici d'ailleurs une solution directe et fort simple de ce dernier problème : A étant le point extrême de la droite considérée, on décrit un cercle quelconque passant par A (*fig.* 91); on trace le diamètre CB qui aboutit au second point de rencontre B du cercle et de la droite; en joignant AC, on a la perpendiculaire demandée, car l'angle CAB est droit comme inscrit dans une demi-circonférence.

§ VI. — PROBLÈMES SUR LES TANGENTES.

PROBLÈME.

157. *Mener par un point donné* A *une tangente à un cercle donné* O.

Il faut distinguer deux cas :

1° Le point A (*fig.* 115) est sur la circonférence. Il suffit

Fig. 115.

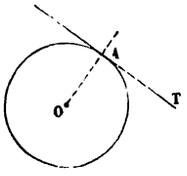
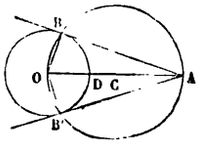


Fig. 116.



d'élever par le point A une perpendiculaire AT sur le rayon OA.

2° Le point A est hors du cercle (*fig.* 116). Supposons le problème résolu; soient AB une tangente menée par A au cercle O, et B son point de contact. La tangente étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon, du point de contact B on voit la droite AO sous un angle droit OBA. Donc (134) le point B est situé sur la circonférence décrite sur AO comme diamètre; ce point étant d'ailleurs sur la circonférence donnée O, il est à l'intersection de ces deux circonférences, et l'on voit dès lors qu'il y a deux solutions.

Ainsi on décrira sur AO comme diamètre une circonférence, et, en joignant au point A les points B et B′ où cette circonférence rencontre la proposée, on aura les deux tangentes BA et B′A.

Corollaire.

158. *Les deux tangentes* AB *et* AB′ *que l'on peut mener à un cercle* O *par un point extérieur* A *sont égales entre elles, et la droite qui joint ce point extérieur au centre du cercle divise en deux parties égales l'angle* BAB′ *des deux tangentes, ainsi que l'angle* BOB′ *des deux rayons* OB *et* OB′ *qui aboutissent aux points de contact.*

En effet, les deux triangles rectangles OBA, OB′A sont égaux comme ayant l'hypoténuse AO commune et les côtés de l'angle droit OB et OB′ égaux entre eux comme rayons du cercle donné. On a donc

AB = AB′, angle BAO = angle B′AO, angle BOA = angle B′OA.

Scolie.

159. Pour mener à un cercle une tangente parallèle à une droite donnée, on mène le diamètre perpendiculaire à la droite donnée, et les extrémités de ce diamètre sont les points de contact des deux tangentes qui satisfont à la question.

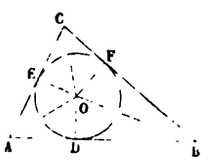
PROBLÈME.

160. *Inscrire un cercle dans un triangle donné* ABC.

On dit qu'un polygone est *circonscrit* à un cercle lorsque chacun de ses côtés est tangent à la circonférence; le cercle est alors inscrit dans le polygone.

Cela posé, soit ABC (*fig.* 117) le triangle proposé dans lequel il faut inscrire un cercle. Supposons le problème résolu. La droite AO, qui joint le centre du cercle cherché au point de rencontre A des deux tangentes AD et AE, est, d'après le problème précédent, la bissectrice de l'angle A du triangle. On voit de même que le point O doit encore se trouver sur les bissectrices BO, CO, des angles B et C. D'après cela, on mènera deux de ces bissectrices, et de leur intersection O comme

Fig. 117.

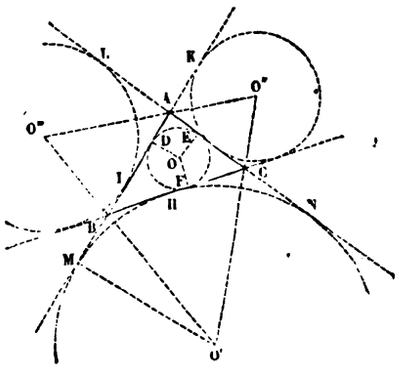


centre, avec une ouverture de compas égale à la longueur commune des perpendiculaires OD, OE, OF, abaissées de ce point sur les côtés, on décrira une circonférence qui touchera en D, E, F, les côtés du triangle donné.

Scolie.

161. Il résulte de cette démonstration que *les bissectrices des trois angles d'un triangle concourent en un même point.* On voit d'une manière analogue que les bissectrices des angles extérieurs d'un triangle ABC (*fig.* 118) forment un second

Fig. 118.



triangle $O'O''O'''$ dont les sommets sont situés sur les bissectrices des angles intérieurs. Chacun de ces sommets est le centre d'un cercle exinscrit, c'est-à-dire d'un cercle tangent à l'un des côtés du triangle et aux prolongements des deux autres côtés. *Il existe* donc, *en général, quatre circonférences tangentes à trois droites données.*

Si l'on désigne par a, b, c les côtés BC, CA, AB du triangle ABC, et par p le demi-périmètre de ce triangle, on aura, pour les distances du sommet A aux points où la droite AB touche les quatre cercles :

$$AM = p, \quad AD = p - a, \quad AI = p - b, \quad AK = p - c.$$

En effet, l'égalité

$$2p = AB + BH + HC + CA = AB + BM + CN + CA$$
$$= AM + AN = 2AM$$

donne d'abord

$$AM = p.$$

On obtiendrait de même

$$BK = p, \quad CL = p,$$

et par suite,

$$AK = BK - AB = p - c, \quad AI = AL = CL - CA = p - b.$$

Enfin on a

$$2p = (EA + AD) + (DB + BF) + (FC + CE),$$
$$= 2AD + 2BF + 2FC = 2AD + 2a,$$

d'où

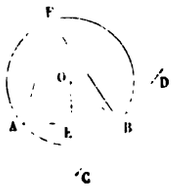
$$AD = p - a.$$

PROBLÈME.

162. *Décrire sur une droite donnée* AB *un segment capable d'un angle donné.*

Supposons le problème résolu, et soit AFB (*fig.* 119) le segment cherché : la tangente BC au point B de ce segment fait avec la corde AB un angle ABC qui, comme tout angle AFB inscrit dans le segment, a (130) pour mesure la moitié de l'arc situé au-dessous de AB; cet angle est donc égal à l'angle donné, et par suite l'angle ABO formé par AB et le rayon BO est égal au complément de l'angle donné. D'après cela, on aura une droite BO passant par le centre en construisant au point B, au-dessus de AB, un angle ABO égal au complément

Fig. 119.



de l'angle donné. Le centre du cercle cherché sera à l'intersection de cette droite BO et de la perpendiculaire OE élevée sur le milieu de AB; on décrira donc ce cercle en plaçant l'une des pointes du compas en O et en donnant aux branches une ouverture égale à OB.

PROBLÈME.

163. *Mener une tangente commune à deux cercles* O *et* O'.

Supposons le problème résolu.

1° Soit AA' une tangente commune *extérieure*, c'est-à-dire qui laisse les deux cercles d'un même côté (*fig.* 120). Si, par le centre O' de l'un des cercles, on imagine une parallèle O'B à AA', cette parallèle sera, comme AA', perpendiculaire sur le rayon OA. Elle sera donc tangente en B au cercle décrit du point O comme centre avec OB pour rayon; or, la figure ABO'A' étant un rectangle, on a

$$AB = A'O', \quad \text{et, par suite,} \quad OB = OA - AB = OA - O'A'.$$

On est ainsi conduit à la construction suivante : décrivez une circonférence du point O comme centre, avec un rayon égal à la différence des rayons des cercles donnés, et par le point O' menez une tangente à cette circonférence auxiliaire; B étant le point de contact obtenu, tirez OBA, menez O'A' parallèle à OA; en joignant les points A et A', vous aurez la tangente cherchée.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le point O' ne soit pas à l'intérieur du cercle auxiliaire.

On doit donc avoir

$$OO' \geqq OB, \quad \text{c'est-à-dire} \quad OO' \geqq OA - O'A',$$

ce qui revient à dire (122) que les deux cercles proposés O et O' ne doivent pas être intérieurs l'un à l'autre.

Fig. 120.

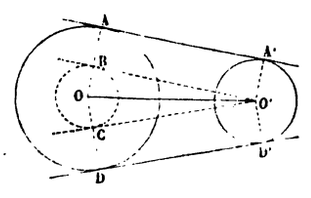
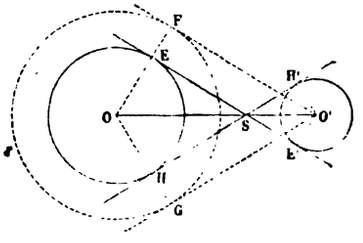


Fig. 120$_1$.



Si les deux cercles O et O' sont extérieurs, tangents exté-

rieurement ou sécants, on a $OO' > OA - O'A'$; le point O est extérieur au cercle auxiliaire, et l'on peut par ce point mener deux tangentes à ce cercle; donc les deux cercles donnés ont, dans chacun de ces cas, deux tangentes communes extérieures.

Si les deux cercles sont tangents intérieurement, on a $OO' = OA - O'A'$; le point O' est sur la circonférence auxiliaire; on ne peut donc mener par ce point qu'une tangente à ce cercle et, par suite, les deux cercles O et O' ont une seule tangente commune extérieure.

2° Soit EE' une tangente commune *intérieure*, c'est-à-dire qui laisse les deux cercles O et O' de côtés différents (*fig.* 120). En imaginant, comme ci-dessus, une parallèle O'F à EE', on verra que cette parallèle est tangente à un cercle concentrique au cercle O et décrit avec un rayon OF égal à la somme $OE + O'E'$ des rayons des cercles donnés, d'où l'on déduira la construction suivante : décrivez du centre O de l'un des cercles une circonférence, avec un rayon égal à la somme des rayons des cercles proposés, et du point O' menez une tangente à ce cercle auxiliaire; F étant le point de contact, tirez OEF, menez O'E' parallèle à OF, et, en joignant les points E et E', vous aurez la tangente demandée.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le point O' ne soit pas à l'intérieur du cercle auxiliaire; on doit donc avoir

$$OO' \geqq OF \quad \text{ou} \quad OO' \geqq OE + O'E',$$

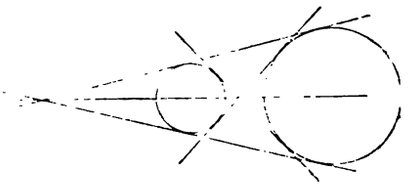
ce qui revient à dire (123) que les deux cercles proposés O et O' doivent être extérieurs l'un à l'autre ou tangents extérieurement.

Dans le premier cas, on a $OO' > OE + O'E'$; le point O' est extérieur au cercle auxiliaire; on peut donc mener par ce point deux tangentes à ce cercle, et les deux cercles O et O' ont deux tangentes communes intérieures. Dans le second cas, on a $OO' = OE + O'E'$; le point O' est sur la circonférence auxiliaire; on ne peut donc mener par ce point qu'une tangente à ce cercle, et, par suite, les cercles proposés O et O' ont une seule tangente commune intérieure.

164. *En résumé :*

Deux cercles extérieurs (*fig.* 121) ont *quatre* tangentes communes, deux extérieures, deux intérieures

Fig. 121_0.



Deux cercles tangents extérieurement (*fig.* 121_1) ont trois tangentes communes, deux extérieures, une intérieure.

Fig. 121_1.

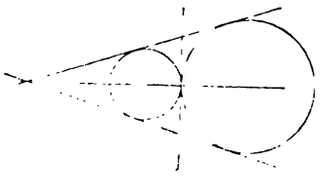
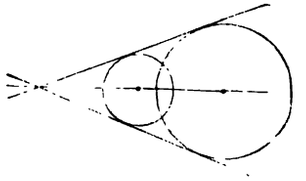


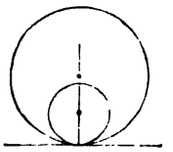
Fig. 121_2.



Deux cercles sécants (*fig.* 121_2) ont deux tangentes communes qui sont extérieures.

Deux cercles tangents intérieurement (*fig.* 121_3) ont une seule tangente commune, qui est extérieure.

Fig. 121_3.



Deux cercles intérieurs l'un à l'autre n'ont point de tangente commune.

Les tangentes, soit intérieures, soit extérieures, se coupent sur la ligne des centres, qui est la bissectrice commune de leurs angles (53).

APPENDICE DU SECOND LIVRE.

I. — Des méthodes en Géométrie.

165. Il est impossible d'indiquer une méthode générale et certaine pour résoudre tous les problèmes de Géométrie. La nature des questions qu'on peut poser est trop variable pour que la solution puisse être obtenue à coup sûr en suivant une voie unique. Il existe toutefois quelques procédés particuliers qui s'appliquent plus directement à certaines classes de questions. Nous allons indiquer sommairement ici ceux qui se rapportent aux deux premiers Livres, en nous réservant de revenir dans la suite sur ce sujet au fur et à mesure que nous rencontrerons des méthodes nouvelles.

MÉTHODES DES SUBSTITUTIONS SUCCESSIVES.

166. Et d'abord, sauf pour un petit nombre de questions très simples qui se résolvent immédiatement, on procède toujours par *substitutions successives*. On ramène le problème proposé à un autre, qui se ramène à son tour à un troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un problème connu ou dont la solution soit immédiate.

C'est ainsi, par exemple, que le problème de mener par un point une parallèle à une droite se ramène à la construction d'un angle égal à un angle donné; que toutes les questions relatives aux perpendiculaires se ramènent à la première d'entre elles, mener une perpendiculaire sur le milieu d'une droite; que le problème de la tangente commune à deux cercles se ramène à la construction d'une tangente par un point extérieur, etc.

Voici un nouvel exemple un peu moins simple :

Construire, de tous les triangles équilatéraux dont les côtés passent par trois points donnés A, B, C, *celui qui a le plus grand périmètre.*

Fig. 124.

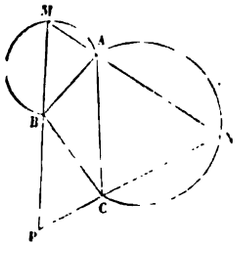
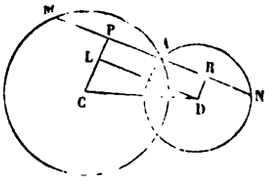


Fig. 125.



Le sommet M du triangle cherché MNP (*fig.* 124) doit se trouver sur

le segment capable de 60 degrés décrit sur AB. De même, le segment capable de 60 degrés décrit sur AC doit renfermer le sommet N. On obtiendra donc un triangle équilatéral circonscrit au triangle ABC, en décrivant sur AB et sur AC deux segments de 60 degrés, menant à volonté par le point A une sécante MAN, et tirant MB, NC, qui, par leur rencontre, donneront le troisième sommet P; il restera alors à choisir parmi tous les triangles qu'on obtient ainsi celui dont le côté MAN est maximum. Le problème est donc ramené au suivant : *Mener, par un point* A *commun à deux circonférences* C *et* D, *la sécante maximum* (*fig.* 125). Or, MAN étant une sécante quelconque, si l'on abaisse des centres C et D des perpendiculaires CP, DR, sur cette sécante, la droite PR sera la moitié de la sécante, et il suffira de chercher le maximum de PR ou de la parallèle DL qui lui est égale. Mais le triangle rectangle DLC donne $DL < CD$; CD est donc le maximum de PR, et ce maximum a lieu lorsque la sécante MAN est parallèle à la ligne des centres C et D des deux circonférences.

167. Parfois le problème auquel on ramène la question proposée est plus général que celle-ci. Il faut alors ne prendre parmi les solutions du second problème que celles qui conviennent à la question primitive, et écarter les solutions étrangères. Ainsi, au n° 146, nous avons ramené le problème proposé à trouver sur la droite BA un point A dont la distance au point C soit égale à b. Mais, pour répondre au problème considéré, la droite $AC = b$ doit, en outre, être placée dans l'angle donné B. C'est pourquoi, dans la discussion (146), nous avons rejeté les droites comprises dans l'angle adjacent et supplémentaire de l'angle B.

La méthode de substitutions successives n'est pas seulement un procédé géométrique, c'est la marche que suit naturellement l'esprit pour établir une proposition quelconque dont l'évidence n'est pas immédiate. C'est ce qui explique l'intervention de cette méthode dans la démonstration de la plupart des théorèmes de Géométrie. Pour prouver la vérité d'une proposition A, on la ramène à une proposition B, qu'on ramène à son tour à une troisième proposition C, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à une dernière proposition M évidente par elle-même ou démontrée antérieurement. Mais, pour l'exactitude du raisonnement, il est indispensable qu'il y ait *réciprocité* entre deux propositions consécutives quelconques de la série A, B, C, ..., M; en d'autres termes, chacune des deux propositions consécutives considérées doit entraîner l'autre, sans quoi la vérité de la proposition finale M n'entraînerait pas celle de la première proposition A.

Dès qu'on est arrivé à construire la chaîne des propositions A, B, C, ..., M, on peut exposer la démonstration de deux manières : soit en suivant l'ordre même A, B, C, ..., M, de l'invention, soit en partant au contraire de la proposition M et en remontant la série dans l'ordre inverse M, ...,

C, B, A. Dans le premier cas, on fait l'*analyse* du théorème; dans le second cas, on en présente la *synthèse*. L'analyse est la méthode d'invention; c'est par elle seule que l'on *découvre*. La synthèse n'est en réalité qu'une méthode d'exposition; plus rapide qu'instructive, elle ne doit être exclusivement employée que dans les cas simples où la solution est évidente. En thèse générale, dans toute bonne exposition, il convient de commencer par une analyse succincte et de ne laisser à la synthèse que le soin d'éclaircir les détails; les deux méthodes se prêtent alors un mutuel secours, l'une guidant la marche, l'autre l'assurant.

MÉTHODE PAR INTERSECTION DE LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

168. La plupart des problèmes de Géométrie reviennent en dernière analyse à la détermination d'un point d'après certaines conditions. S'agit-il, par exemple, de faire passer un cercle par trois points donnés? Il faut trouver le centre. Veut-on mener une tangente à un cercle par un point extérieur? On cherche le point de contact, etc. D'après cela, si on laisse de côté une des conditions données, les autres conditions ne suffiront plus pour déterminer un point unique, et il existera une infinité de points remplissant ces conditions et formant par leur ensemble un lieu géométrique auquel appartiendra le point cherché. En reprenant la condition délaissée, et faisant abstraction d'une autre, on aura un nouveau lieu géométrique qui rencontrera le premier au point demandé.

Ainsi, *pour trouver le centre d'un cercle passant par trois points donnés* A, B, C (154), on fait d'abord abstraction du point C, et l'on trouve pour le lieu des centres des circonférences passant par A et B la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB; puis, reprenant le point C et délaissant le point A, on trouve pour le lieu des centres passant par B et C la perpendiculaire élevée sur le milieu de BC. Ces deux perpendiculaires se coupent au centre demandé.

Dans le problème *Mener une tangente au cercle* O *par un point extérieur* A (157), le point de contact inconnu est déterminé par l'intersection de la circonférence O, qui est un premier lieu, et de la circonférence décrite sur AO comme diamètre, qui est le lieu des points d'où l'on voit, comme du point de contact, la droite AO sous un angle droit.

Dans la recherche du *segment capable d'un angle donné* (162), la méthode des substitutions successives ramène d'abord la question à la recherche du centre d'un cercle passant par deux points donnés A et B, et tangent en B à une droite donnée CBD; puis, en faisant tour à tour abstraction de la tangente CD et du point A, on trouve deux lieux rectilignes EO et BO qui se coupent au centre cherché.

La *méthode par intersection de lieux géométriques*, due à l'école de Platon (430-347 av. J.-C.), est peut-être la plus générale et la plus fé-

conde de toutes les méthodes de la Géométrie. L'élégance et la valeur pratique de la solution sont d'ailleurs subordonnées au choix plus ou moins habile des deux conditions que l'on délaisse tour à tour; car de ce choix dépendent la nature et la facilité de recherche des deux lieux employés. La ligne droite et le cercle sont les seuls lieux qui doivent figurer dans les problèmes relatifs aux éléments de Géométrie plane, où toutes les constructions doivent s'effectuer avec la règle et le compas.

La méthode se prête, d'ailleurs, aussi bien à la discussion des problèmes qu'à leur solution. On commence par chercher les conditions pour que les deux lieux obtenus se rencontrent : le nombre de leurs points communs est le nombre des positions du point choisi pour inconnue. On cherche ensuite, si on ne l'aperçoit immédiatement, combien, à chaque position du point cherché, répondent de figures remplissant les conditions de l'énoncé, ce qui conduit au nombre des solutions du problème.

Remarquons enfin que, au lieu de ramener un problème à la recherche d'un point, on peut parfois le ramener à la détermination d'une droite d'après certaines conditions. S'il arrive alors que, en délaissant une de ces conditions, la droite devenue mobile reste tangente à un cercle fixe; puis que, en reprenant ladite condition et en faisant abstraction d'une autre, la droite reste tangente à un second cercle, on aura la position de la droite cherchée en menant des tangentes communes aux deux cercles *enveloppes*. L'un des cercles, ou même chacun d'eux, peut d'ailleurs se réduire à un point.

Proposons-nous, par exemple, de *mener une droite* D, *qui passe par un point donné* A *et qui détermine dans un cercle donné* C *une corde de longueur donnée*. Les droites qui satisfont à la première condition seule ont pour enveloppe le point A. Quant aux droites qui satisfont à la seconde condition seule, elles enveloppent un cercle γ concentrique au cercle C, puisque les cordes égales d'un même cercle sont équidistantes du centre. Toutefois, ce cercle γ se réduit à son centre O si la longueur donnée, qui, d'ailleurs, ne saurait excéder le diamètre du cercle C, se trouve égale à ce diamètre. La droite cherchée D est, dans le premier cas, l'une quelconque des tangentes menées par A au cercle γ; dans le second cas, c'est la droite AO.

169. Pour faciliter l'emploi de la méthode qui nous occupe, nous allons rappeler les lieux géométriques que nous avons déjà rencontrés, et en ajouter quelques autres qui se rattachent aux précédents et qui résultent immédiatement des théories étudiées.

1° Le *lieu des points situés à une distance donnée d'un point donné* est le cercle qui a le point donné pour centre et la distance donnée pour rayon (91);

2° Le *lieu des milieux des cordes égales d'un cercle* est un cercle concentrique au premier (104);

3° Le *lieu des points d'où l'on peut mener à un cercle des tangentes d'une même longueur donnée* est un cercle concentrique au premier (138);

4° Le *lieu des points situés à une distance donnée d'une droite donnée* est le système des deux droites parallèles à la droite donnée et situées à la distance donnée de cette droite (69);

5° Le *lieu des points situés à une distance donnée d'un cercle donné* est le système des deux cercles concentriques au premier, dont les rayons sont égaux au rayon du cercle primitif augmenté ou diminué de la distance donnée (114);

6° Le *lieu des points équidistants de deux points donnés* est la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite qui unit ces deux points (49);

7° Le *lieu des points équidistants de deux droites qui se coupent* est le système des bissectrices des angles formés par ces deux droites (53);

8° Le *lieu des points d'où l'on voit une portion de droite sous un angle donné* est le système de deux arcs de cercle passant par les extrémités de la droite (134). En particulier, le *lieu des points d'où l'on voit une portion de droite sous un angle droit* est la circonférence dont cette portion de droite est un diamètre;

9° Le *lieu des milieux des cordes d'un cercle qui passent par un point donné* est le cercle qui a pour diamètre la droite qui joint le centre du cercle primitif au point donné, car du milieu de chacune de ces cordes on voit cette portion de droite sous un angle droit (102);

10° Le *lieu des points dont les distances à deux droites qui se coupent ont une somme ou une différence donnée* est le système de quatre droites. En effet, on prouve d'abord aisément que les points du lieu qui sont sur les deux droites données sont les sommets d'un rectangle dont ces deux droites sont les diagonales. Puis, en prenant un point sur l'un des côtés du rectangle (ou sur ce côté prolongé), on voit que la somme (ou la différence) des distances de ce point aux deux diagonales est égale à la distance d'un sommet du rectangle à la diagonale opposée. Nous nous bornons à ces indications, en proposant au lecteur comme exercice de trouver les détails de la démonstration;

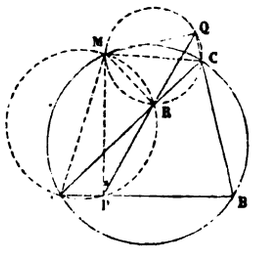
11° Le *lieu des points* M, *tels que les pieds* P, Q, R *des perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés d'un triangle* ABC *soient en ligne droite,* est le cercle circonscrit à ce triangle (*fig.* 126).

En effet, quelle que soit la position du point M dans le plan, les quadrilatères MRPA, MRCQ sont inscriptibles, puisque des points R et P on voit MA sous un angle droit, et que des points R et Q on voit MC sous un angle droit; il en résulte que les angles ARP, CRQ sont respectivement égaux aux angles AMP, CMQ.

Cela posé, si M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC, les angles

AMC et PMQ sont égaux comme ayant l'un et l'autre pour supplément l'angle B; et si de chacun de ces deux angles on retranche l'angle PMC, les restes, c'est-à-dire les angles AMP, CMQ, et, par suite, ARP et CRQ seront égaux, d'où il suit que P, R, Q sont en ligne droite. Inversement, si ces points sont en ligne droite, les angles ARP, CRQ sont égaux; par suite, AMP, CMQ le sont aussi, ainsi que les angles AMC, PMQ qu'on obtient en leur ajoutant PMC; or, comme l'angle PMQ est le supplément de B, il en est de même de AMC; de sorte que le point M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Fig. 126.



On remarquera que la proposition précédente et sa démonstration subsistent si, au lieu de mener par le point M des perpendiculaires sur les trois côtés du triangle, on mène des droites également inclinées sur ces côtés.

Enfin, nous laissons au lecteur le soin de prouver que la droite PRQ, qu'on nomme *droite de Simpson*, est équidistante du point M et du point de concours des hauteurs du triangle ABC.

170. Voici maintenant quelques applications un peu moins simples que les exemples qui nous ont servi à exposer le principe de la méthode :

1° *Construire un triangle* ABC *connaissant le côté* AB, *la hauteur correspondante et l'angle opposé* C.

Le sommet C est à l'intersection du lieu des points qui sont à une distance de AB égale à la hauteur donnée (169, 4°) et du lieu des points d'où l'on voit AB sous l'angle donné (169, 8°). Le premier lieu se composant de deux droites parallèles à AB et l'autre de deux arcs de cercle passant par A et B, il y a, en apparence, quatre solutions, qui se réduisent, en réalité, à une seule, vu l'égalité des quatre triangles trouvés. Le problème n'est, d'ailleurs, possible que si la flèche de l'arc capable de C et décrit sur AB est supérieure ou égale à la hauteur donnée.

2° *Mener entre deux cercles* A *et* B *une droite qui soit tangente au premier* A *et qui ait une longueur donnée.*

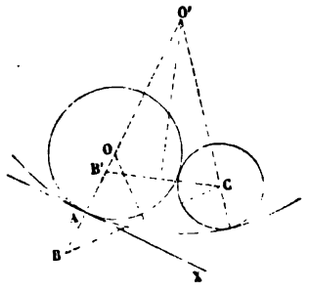
Le cercle B est un premier lieu d'une extrémité de la droite; un se-

cond lieu de la même extrémité est un cercle concentrique à A (169, 3°). Le problème a quatre solutions, car de chacun des deux points communs aux deux lieux partent deux tangentes au cercle A.

Ainsi, dans ce problème, le nombre des solutions excède le nombre des points d'intersection des deux lieux, tandis qu'il était moindre dans le problème précédent.

3° *Décrire un cercle qui touche à la fois une circonférenee* C *et une droite* AX *en un point donné* A (*fig.* 127).

Fig. 127.



La perpendiculaire élevée par le point A sur la droite donnée est évidemment un premier lieu du centre du cercle inconnu.

Cela posé, remarquons que ce centre est à une distance du point A égale au rayon du cercle cherché, et à une distance du point C égale à la somme ou à la différence des rayons du cercle inconnu et du cercle donné C, suivant que les cercles se touchent extérieurement ou intérieurement.

Donc, si l'on prend à partir du point A, de part et d'autre de la droite donnée AX et sur la perpendiculaire qu'on lui a menée au point A, deux longueurs AB et AB' égales au rayon du cercle C, on voit que le centre inconnu est équidistant de B et de C si le contact est extérieur, et de B' et de C si le contact est intérieur. Les perpendiculaires élevées sur les milieux de BC et de B'C forment donc un second lieu géométrique du centre cherché, et les points O et O' où elles coupent la perpendiculaire menée par A à la droite donnée sont les centres des deux cercles qui résolvent la question.

Le point O existe toujours, car C et B étant de part et d'autre de AX, les droites BC et AX se coupent et, par suite, aussi les perpendiculaires à ces deux droites. Mais le point O' peut cesser d'exister, car B'C peut être parallèle à AX; le cercle C touche alors AX, et c'est cette droite qui tient lieu du cercle O'.

CONSTRUCTIONS AUXILIAIRES : TRANSLATION, RENVERSEMENT, ETC.

171. Dans un grand nombre de cas, une heureuse inspiration, fruit de l'habitude et d'un certain sentiment des choses géométriques, conduit à des constructions auxiliaires qui facilitent singulièrement la solution du problème proposé. On ne saurait évidemment formuler de règle générale; la diversité de ces constructions tient à la nature si variable du sujet lui-même, et constitue au fond la richesse inépuisable de la Géométrie. L'étude comparée de plusieurs exemples bien choisis est plus instructive assurément que bien des préceptes. Toutefois, il convient de signaler quelques procédés qui réussissent souvent; tels sont la *translation*, la *rotation*, ou le *retournement* de certaines parties de la figure qui, permettant de mieux grouper les données, de réunir les éléments épars, rendent plus aisée la construction de la figure définitive.

Voici quelques exemples de *translation parallèle :*

1° *Construire un trapèze connaissant les longueurs des quatre côtés*

En transportant parallèlement à lui-même l'un des côtés non parallèles du trapèze jusqu'à ce qu'il rencontre l'autre, on obtient un parallélogramme et un triangle; on sait construire le triangle, puisqu'on a ses trois côtés, et la figure s'achève immédiatement.

2° *Étant donnés deux parallèles* XY, X'Y' *et deux points* A *et* B *situés hors de ces parallèles et de côtés différents, trouver le plus court chemin de* A *en* B *par une ligne brisée* AMNB, *telle que la portion* MN *comprise entre les parallèles ait une direction donnée* (*fig.* 128).

Fig. 128.

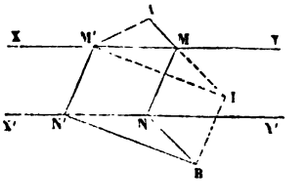
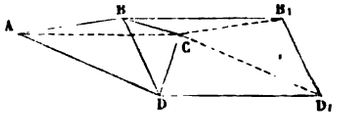


Fig. 129.



Si l'on transporte la portion intermédiaire MN parallèlement à elle-même au point B, c'est-à-dire si l'on mène BI parallèle à la direction donnée et égale à la longueur constante que les deux parallèles XY, X'Y' interceptent sur les droites ayant cette direction, on voit que la longueur de l'un quelconque AM'N'B des chemins considérés dans l'énoncé sera égale à celle de la ligne brisée AM'IB; elle se composera donc d'une partie constante BI et d'une partie variable AM'I, et tout reviendra à chercher sur la droite XY la position du point M' pour laquelle le chemin AM'I est minimum. Or, cette position n'est autre évi-

demment que le point M où la ligne droite AI coupe XY. Connaissant M, on n'a plus qu'à mener MN parallèle à la direction donnée et à tirer NB, pour obtenir le chemin minimum demandé AMNB.

3° *Voici un mode de translation qui permet de résoudre un grand nombre de problèmes relatifs au quadrilatère* (*fig.* 129) (1).

Dans un quadrilatère ABCD, on peut transporter AB et AD parallèlement à eux-mêmes en CB_1 et CD_1. Le parallélogramme BB_1D_1D formé de la sorte contiendra les éléments du quadrilatère groupés d'une façon souvent avantageuse; les droites issues de C sont les côtés du quadrilatère et les angles formés autour de ce point sont les angles du quadrilatère; enfin les côtés du parallélogramme sont égaux aux diagonales du quadrilatère et forment les mêmes angles que celles-ci.

Par exemple, s'agit-il de *construire un quadrilatère* ABCD *connaissant les diagonales, leur angle et les angles* BCA, CAD. La connaissance des diagonales et de leur angle permet de tracer le parallélogramme BB_1D_1D; puis, à l'aide des deux autres angles, qui sont respectivement égaux à B_1BC, DD_1C, on a le point C par la rencontre de deux droites, et la figure totale s'ensuit.

4° Remarquons enfin que la translation parallèle permet de *mener entre deux lignes données une droite de direction et de grandeur données.*

Il suffit de déplacer l'une des lignes de façon que chacun de ses points décrive une droite égale et parallèle à la droite donnée; cette nouvelle ligne coupera la ligne qui est restée fixe aux points où devra passer la droite cherchée. Nous engageons le lecteur à appliquer la solution au cas où les lignes données sont deux droites, deux cercles ou une droite et un cercle.

172. On a vu, à propos du triangle isocèle, l'avantage qui peut résulter du *retournement* d'une figure, et, dans la théorie des perpendiculaires et des obliques, la facilité que présente l'adjonction à une figure de la figure symétrique par rapport à une droite convenablement choisie; sur la figure ainsi doublée, on saisit parfois d'un coup d'œil entre certaines lignes des relations qui seraient, sans cela, restées souvent inaperçues.

Voici d'autres exemples intéressants de cette méthode dite *par repliement ou par symétrie :*

1° *Étant donnés deux points* A *et* B *et une droite* XY, *trouver sur cette droite un point* M *tel que la somme* AM + BM *soit un minimum.*

Si les deux points donnés sont, comme A et B′ (*fig.* 130), situés de part et d'autre de XY, la droite AB′ résout la question; elle coupe XY au point cherché.

(1) Petersen, *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes.* (Traduit par M. Chemin.)

Si les deux points A et B sont d'un même côté de XY (*fig.* 130), on observe que tout point M′ de XY est équidistant de B et de son symétrique B′ par rapport à XY (48); le chemin AM′B′ est donc égal à AM′B, et il suffit de chercher le minimum de AM′B′. A et B′ étant de part et d'autre de XY, on n'a qu'à tirer la droite AB′ qui rencontre XY au point cherché M. Il est bon de remarquer que *les deux parties* AM *et* MB *du chemin minimum sont également inclinées sur* XY. En effet, dans le rabattement de la figure autour de XY, le point M restant fixe, et B venant sur son symétrique B′, l'angle BMY recouvre l'angle B′MY; et, comme ce dernier est opposé par le sommet à AMX, on voit que les angles AMX, BMY sont égaux.

Fig. 130.

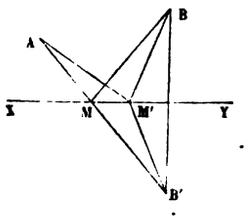
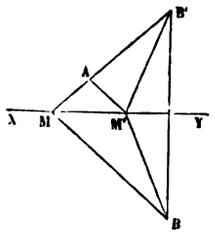


Fig. 131.



2° *Étant donnés deux points* A *et* B *et une droite* XY, *trouver sur cette droite un point* M, *tel que* BM — AM *soit un maximum.*

Si les deux points donnés sont, comme A et B′ (*fig.* 131), situés d'un même côté de XY, la droite AB′ résout la question; elle coupe XY au point cherché M. En effet, M′ étant un point quelconque de XY, on a dans le triangle B′M′A

$$AB' \quad \text{ou} \quad B'M - AM > B'M' - AM'.$$

Si les deux points A et B sont de part et d'autre de XY (*fig.* 131), on voit, en substituant, comme précédemment, au point B son symétrique B′ par rapport à XY, qu'il suffit de tirer AB′, qui coupe XY au point cherché M.

3° Le premier des deux problèmes que nous venons de traiter se présente en Optique dans la *théorie des miroirs* plans. L'angle d'incidence étant égal à l'angle de réflexion, pour qu'un rayon lumineux issu du point B vienne, après réflexion sur le miroir XY, passer par A, il faut qu'il soit dirigé vers le point M où le miroir est rencontré par la droite qui joint le point A au symétrique B′ du point B. On voit par là que le *chemin décrit par la lumière est le plus court* parmi ceux qui vont de B en A en passant par un point de XY.

Il en est de même lorsqu'un corps élastique, comme une bille de billard, vient se réfléchir sur la bande XY; pour que, lancée du point B, elle arrive en A, il faut qu'elle frappe la bande au point M où cette bande est rencontrée par AB'. Il est aisé, d'après cela, de résoudre le *problème du billard polygonal :*

Deux points P *et* Q *étant marqués sur un billard polygonal* XYZU...T, *de n côtés, vers quel point* M *de la bande* XY *faut-il lancer une bille du point* P, *pour qu'après réflexions sur les bandes successives* XY, YZ, ZU, ..., *elle vienne passer par le point* Q?

Quel que soit le point de la bande XY vers lequel on lance la bille, le prolongement de la route suivie par la bille après la réflexion passera par le point P_1 symétrique de P par rapport à XY; après la seconde réflexion, la bille se mouvra sur une droite issue du symétrique P_2 de P_1 par rapport à YZ, ...; en continuant ainsi, on obtiendra un point P_n par lequel doit passer le prolongement de la droite que suit la bille après la dernière réflexion; comme cette droite doit aussi passer par Q, la droite P_nQ déterminera par son intersection avec la dernière bande le point où la bille doit la frapper; et l'on pourra dès lors, en remontant, tracer la route complète de la bille. Le problème ne sera évidemment possible que si les points d'incidence se trouvent sur les bandes elles-mêmes et non sur leurs prolongements.

En faisant la figure pour le cas du *billard rectangulaire,* on pourra constater que, *pour que la bille revienne au point de départ,* il faut la lancer parallèlement à l'une des diagonales du rectangle.

4° *Construire un polygone connaissant en position les perpendiculaires* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *élevées sur les milieux des côtés* (PETERSEN).

Soit A le sommet inconnu qui est situé sur le côté perpendiculaire à α_1; prenons dans le plan un point arbitraire P, et construisons successivement le symétrique P_1 de P par rapport à α_1, le symétrique P_2 de P_1 par rapport à α_2, ..., et ainsi de suite jusqu'au symétrique P_n par rapport à α_n. Si l'on avait opéré sur A comme l'on vient de le faire sur P, le point A_n auquel on serait parvenu serait le point A lui-même, car $A_1, A_2, \ldots, A_n$ seraient les sommets successifs du polygone. Or la longueur d'une portion de droite étant égale à celle de la droite symétrique, on aurait donc $AP \triangleq AP_n$; la perpendiculaire élevée sur le milieu de PP_n passe donc par le sommet inconnu A. Un deuxième point arbitraire, Q sur lequel on opérera comme sur P, fournira un deuxième lieu du sommet A, qui sera ainsi déterminé par l'intersection de deux droites.

On résout par des considérations analogues la question qui consiste à *tracer le polygone de périmètre minimum ayant respectivement un sommet sur chacune des droites indéfinies qui forment les côtés d'un polygone donné,* attendu que deux côtés consécutifs du polygone inconnu doivent

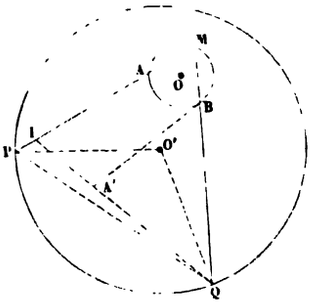
(1°) être également inclinés sur la droite qui contient leur point d'intersection.

Nous ne donnerons qu'un exemple de l'emploi des *rotations*, nous proposant de revenir sur ce sujet après la théorie de l'homothétie.

Étant donnés deux cercles O *et* O′ *et deux points* A *et* B *situés sur la circonférence du cercle* O, *trouver sur cette même circonférence un point* M *tel que, si* P *et* Q *sont les points où* AM *et* BM *rencontrent respectivement la circonférence* O′, *la droite* PQ *ait une longueur donnée* (*fig.* 131 *bis*).

L'angle PO′Q est connu de grandeur, puisqu'il fait partie d'un triangle PO′Q dont on connaît les trois côtés. L'angle AMB est aussi

Fig. 131 *bis*.



connu, puisqu'il est inscrit dans un arc donné. Faisons tourner le triangle O′PA, autour de O′, d'un angle ω égal à PO′Q, de manière à amener O′P sur O′Q. Si A′ est la position que prend ainsi le point A, et si l'on désigne par I l'intersection de PA et de QA′, l'angle MIQ sera égal à l'angle de rotation ω ou à son supplément. On connaîtra donc dans le triangle MIQ deux angles M et I et, par suite, l'angle BQA′. Mais B est donné, et le point A′ s'obtient en faisant tourner O′A de l'angle ω autour de O′. Donc le point Q sera sur le segment capable de l'angle connu BQA′, décrit sur une droite connue BA′; comme ce point Q appartient, en outre, à la circonférence O′, il sera déterminé.

II. — Polygones égaux et de même sens ou de sens contraires.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

173. Plusieurs points étant distribués d'une manière quelconque dans un plan, si on les joint successivement, dans un ordre déterminé, par des lignes droites, de manière à revenir au point de départ, on obtient

une figure rectiligne à laquelle on donne, par extension, le nom de *polygone ;* ainsi quand nous dirons le polygone ABCDE, il faudra entendre la figure rectiligne obtenue en joignant par des lignes droites le premier point A au second point B, le second point B au troisième C, ..., et enfin le dernier point E au premier A.

Considérons, dans un plan, deux systèmes de points A et A′, B et B′, C et C′, ..., qui se correspondent un à un d'après une loi géométrique d'ailleurs quelconque. Soient AB...PQR..., un polygone formé avec les points du premier système, et A′B′...P′Q′R′..., le polygone formé avec les points correspondants ou *homologues* du second système. Supposons enfin que deux observateurs parcourent simultanément, l'un le chemin bien déterminé AB...PQR..., l'autre le chemin correspondant A′B′...P′Q′R.... Nous dirons que les deux polygones AB...PQR..., A′B′...P′Q′R′... sont *de même sens* ou *de sens opposés* suivant que deux sommets homologues quelconques R et R′ sont vus de la même manière (c'est-à-dire tous deux à droite ou tous deux à gauche), ou de manières différentes (c'est-à-dire l'un à droite, l'autre à gauche) par les observateurs parcourant les deux côtés homologues PQ, P′Q′ qui précèdent immédiatement R et R′.

Nous désignons, en général, deux sommets homologues de deux polygones correspondants par une même lettre, en accentuant celle qui est relative au second polygone; toutefois cette notation n'est pas toujours possible, quand les deux figures ont des points communs, à moins de mettre deux lettres à un même point, ce qui serait une complication inutile. On évite toute ambiguïté en convenant d'attribuer, dans les symboles ABC..., MNS... qui désignent deux polygones correspondants, le même rang aux deux lettres qui répondent à deux points homologues; ainsi, A est l'homologue de M, B l'homologue de N, etc.

Deux polygones correspondants ABC..., A′B′C′... sont dits *égaux* lorsqu'on peut les superposer soit directement, soit par retournement, de manière que chaque sommet vienne sur son homologue. Dès que le mode de correspondance des sommets est fixé, il est clair que la superposition n'est possible que d'une seule manière.

174. *Deux polygones égaux et de même sens* ABC..., A′B′C′... *coïncident dès qu'ils ont deux couples* A *et* A′, B *et* B′ *de sommets consécutifs communs.*

En effet, dès que A est en A′ et B en B′, BC prend la direction B′C′, puisque BC et B′C′ sont du même côté par rapport à AB et font des angles égaux avec cette droite; d'ailleurs, B′C′ = BC; donc C′ tombe en C, et l'on verrait de même que D′ tombe en D, et ainsi de suite.

Si les polygones étaient de sens opposés, ils seraient symétriques par rapport au côté commun AB; car si l'on imagine le polygone $ABC_1D_1...$

symétrique de ABCD... par rapport à AB, ce nouveau polygone sera de même sens que A'B'C'D'..., lui sera égal et aura avec lui deux points homologues communs A et A', B et B'; donc il coïncidera avec lui, d'après la proposition précédente.

THÉORÈME I.

175. *Lorsque deux polygones égaux et de même sens* ABC..., A'B'C'... *sont situés dans un même plan, on peut amener le premier sur le second par une rotation autour d'un point du plan* (*fig.* 132).

Il suffit, d'après le n° 174, de montrer qu'on peut, par une rotation, amener A sur A' et B sur B'.

Or construisons sur A'B' un triangle A'B'A'' égal à ABA' et de même sens, et soit O le centre du cercle qui passe par les trois points A, A', A''. Les triangles OAA', OA'A'' sont égaux comme ayant les trois côtés égaux; ils sont, en outre, de même sens, car deux cordes égales et consécutives AA', A'A'' d'un cercle comprennent le diamètre A'O qui aboutit à leur point commun. Donc, si, par une rotation autour de O, on amène OA sur OA', le triangle OAA' coïncidera (174) avec OA'A''; et, par suite, le triangle ABA' coïncidera avec A'B'A''.

Fig. 132.

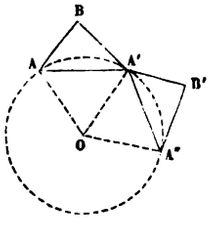
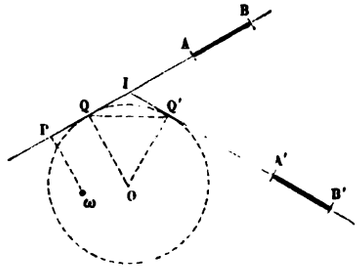


Fig. 133.



Il importe de remarquer que le centre de rotation O doit être équidistant de deux points homologues quelconques; il est donc le point de concours des perpendiculaires élevées sur les milieux des droites qui joignent deux points homologues quelconques.

Enfin le raisonnement et la conclusion supposent que les points A, A', A'' ne soient pas en ligne droite, c'est-à-dire, d'après la construction du point A'', que AB et A'B' ne soient pas parallèles et de même sens; s'il en était ainsi, la figure AA'BB' serait un parallélogramme, AA' et BB' seraient donc égales, parallèles et de même sens, et alors, pour amener A sur A' et B sur B' et, par suite, la première figure sur la seconde, il suffirait d'opérer sur la première figure une *translation*, c'est-à-dire de faire décrire à chaque sommet une droite égale et parallèle à AA'.

COROLLAIRES.

176. Quand une figure de forme et de grandeur invariables se déplace dans son plan d'un mouvement continu, chaque point décrit une trajectoire; soient ABC... une position quelconque de la figure, A'B'C'... une position voisine; si la seconde figure tend vers la première, les cordes AA', BB', CC', ... deviennent les tangentes en A, B, C, ..., aux trajectoires de ces points, et les perpendiculaires élevées sur les milieux des cordes deviennent les normales aux trajectoires; comme ces perpendiculaires passent par un même point O dont la situation dépend à la fois des deux positions successives ABC.... A'B'C'... de la figure, à la limite, ces perpendiculaires, c'est-à-dire les normales, passeront par un même point ω dont la situation ne dépend plus que de la position ABC... de la figure considérée. Donc, *quand une figure se déplace dans son plan, les normales aux trajectoires des divers points, pour une position déterminée quelconque de la figure, passent par un même point* ω; ce point ω a reçu le nom de *centre instantané de rotation* relatif à la position considérée de la figure.

Si l'on sait mener les normales aux trajectoires de deux points de la figure mobile, on aura par l'intersection de ces droites le point ω, et il suffira de joindre ω à tout autre point de la figure pour avoir la normale et, par suite, la tangente à la trajectoire de ce point.

177. Considérons, en particulier, le déplacement d'une droite AB (*fig.* 133). Soient ω le centre instantané relatif à la position AB, et P la projection de ω sur la droite AB, c'est-à-dire le pied de la perpendiculaire abaissée de ω sur AB. Quand AB se déplace, le point P, considéré comme invariablement lié à la portion de droite AB, décrit une trajectoire qui, d'après le numéro précédent, a pour normale Pω et, par suite, pour tangente en P la droite PAB. Donc, *quand une droite se déplace dans un plan suivant une loi déterminée quelconque, elle reste constamment tangente à une ligne* qu'on nomme son *enveloppe;* et, pour une position quelconque de la droite, *le point où elle touche son enveloppe est la projection sur cette droite du centre instantané de rotation correspondant.*

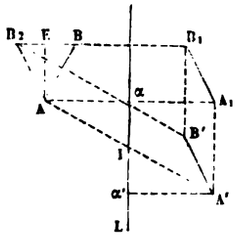
Ce point de contact est aussi la limite du point I *où la droite* AB *est rencontrée par sa position infiniment voisine* A'B'. En effet, soient O le point autour duquel il faut faire tourner AB pour amener A en A' et B en B', Q et Q' les projections de O sur AB et A'B'. Le point I est l'intersection des tangentes AB, A'B' au cercle décrit du point O comme centre avec OQ = OQ' pour rayon; la distance QI, moindre que QQ', tend donc vers zéro quand A'B' tend vers AB; donc le point I a la même

limite que le point Q, c'est-à-dire a pour limite la projection P sur AB du centre instantané ω relatif à AB.

THÉORÈME II.

178. *Lorsque deux polygones égaux et de sens opposés* ABC..., A'B'C'... *sont situés dans un même plan, on peut amener le premier sur le second au moyen du retournement du plan autour d'un certain axe et d'une translation rectiligne parallèle à cet axe* (*fig.* 134).

Fig. 134.



En effet, achevons le parallélogramme $AA'B'B_2$ dont AA' et A'B' sont deux côtés consécutifs; puis, par le milieu I de AA', menons la parallèle L à la bissectrice AE de l'angle B_2AB. Le polygone $A_1B_1C_1\ldots$, symétrique de ABC... par rapport à L, étant égal à A'B'C'... et de même sens, il suffit de prouver que la figure $A'B'B_1A_1$ est un parallélogramme, et que AA_1 est parallèle à L; car, alors, en repliant le plan autour de L, on amènera ABC... sur $A_1B_1C_1\ldots$; puis une translation rectiligne égale et parallèle à A_1A' et, par conséquent, parallèle à L amènera A_1 sur A', B_1 sur B' et, par suite (174), $A_1B_1C_1\ldots$ sur A'B'C'....

Or A_1B_1 et AB_2, étant les symétriques d'une même droite AB par rapport à deux axes parallèles L et AE, sont égales, parallèles et de même sens; d'ailleurs A'B' et AB_2 sont aussi égales, parallèles et de même sens; il en est donc de même pour A_1B_1 et A'B', de sorte que la figure $A'B'B_1A_1$ est bien un parallélogramme. D'autre part, α étant le milieu de AA_1, c'est-à-dire le point de rencontre des deux droites rectangulaires AA_1 et L, et α' étant la projection de A' sur L, les triangles rectangles AIα, A'Iα' sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et les angles égaux; il en résulte $A'\alpha' = A\alpha = \alpha A_1$, de sorte que la figure $A_1A'\alpha'\alpha$ est un rectangle, ce qui prouve que A_1A' est parallèle à L.

La droite L est également inclinée sur deux côtés homologues quelconques des deux polygones, et elle contient les milieux des droites qui joignent les sommets homologues.

LIVRE III.

LES FIGURES SEMBLABLES.

§ I. — LIGNES PROPORTIONNELLES.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

179. Supposons qu'un mobile parcoure de gauche à droite une ligne droite indéfinie XY, sur laquelle sont marqués deux points fixes A et B, et étudions les variations du rapport des distances du mobile aux points A et B (*fig.* 135).

Fig. 135.

Pour toute position M′ du mobile à gauche de A, on a

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{M'B - AB}{M'B} = 1 - \frac{AB}{M'B}.$$

On voit par là que si M′ est très-loin, le dénominateur M′B est très-grand; par suite, la fraction $\frac{AB}{M'B}$ est très-petite, et le rapport $\frac{M'A}{M'B}$ est aussi voisin qu'on veut de l'unité. A mesure que le mobile se rapproche du point A, le dénominateur M′B diminue en tendant vers AB; la fraction $\frac{AB}{M'B}$ augmente en se rapprochant de l'unité, et le rapport $\frac{M'A}{M'B}$ diminue jusqu'à 0, valeur qu'il atteint lorsque le mobile arrive en A. Ainsi, *à gauche du point* A, *le rapport considéré décroît d'une manière continue de* 1 *à* 0.

Au delà du point A, le rapport $\frac{MA}{MB}$ augmente, puisque son numérateur croît et que son dénominateur diminue; et il devient égal à 1, lorsque le mobile est au point O milieu de AB.

Ainsi, *de* A *en* O, *le rapport considéré croît d'une manière continue de* 0 *à* 1.

A partir du point O, le rapport $\frac{NA}{NB}$ continue à croître pour les mêmes motifs; à mesure que le mobile se rapproche de B, le numérateur NA tend vers AB, le dénominateur NB diminue en tendant vers 0; et, par suite, le rapport acquiert des valeurs de plus en plus grandes et peut même surpasser tel nombre qu'on voudra. On exprime ce fait en disant que la valeur du rapport devient *infinie*, et l'on représente par le symbole ∞ cet état limite. Ainsi, *de* O *en* B, *le rapport considéré croît d'une manière continue de* 1 *à l'*∞.

Enfin, pour toute position N′ du mobile au delà de B, on a

$$\frac{N'A}{N'B} = \frac{N'B + AB}{N'B} = 1 + \frac{AB}{N'B};$$

lorsque le point N′ s'éloigne de B, le dénominateur N′B augmente de plus en plus jusqu'à l'infini; la fraction $\frac{AB}{N'B}$ diminue graduellement jusqu'à zéro, et le rapport $\frac{N'A}{N'B}$ décroît successivement jusqu'à 1. Ainsi, *à droite de* B, *le rapport considéré décroît d'une manière continue de l'*∞ *à* 1.

En résumé, le rapport considéré prend deux fois à gauche du point O toutes les valeurs numériques moindres que 1, et deux fois à droite du point O toutes les valeurs numériques supérieures à 1.

Donc enfin, *étant donnés deux points fixes* A *et* B, *il existe toujours sur la droite indéfinie* XY *qui les contient, deux points, et seulement deux, tels que les rapports des distances de chacun d'eux aux points* A *et* B *aient une même valeur donnée. Ces deux points sont situés d'un même côté du milieu* O *de* AB, *l'un entre* A *et* B, *l'autre en dehors; ils sont d'ailleurs à gauche de* O, *comme* M *et* M′ *ou à droite de* O, *comme* N *et* N′, *suivant que la valeur donnée du rapport est inférieure ou supérieure à l'unité.*

180. Le point N, situé entre A et B, divise réellement la droite AB dans le rapport donné; par extension, on dit que le point extérieur N′ divise aussi la droite AB dans ce même rapport. Pour éviter toute confusion, on qualifie alors d'*additifs* les

segments NA et NB déterminés par le point N, et dont AB est la somme, et de *soustractifs* les segments N'A et N'B déterminés par le point N', et dont AB est la différence.

Lorsqu'une droite AB est ainsi divisée par deux points N et N', de façon que les segments additifs NA et NB soient proportionnels aux segments soustractifs N'A et N'B, on dit que ces deux points N et N' divisent *harmoniquement* la droite AB ou sont *conjugués harmoniques* par rapport à la droite AB.

THÉORÈME.

181. ***Deux droites quelconques sont coupées en parties proportionnelles par une série de droites parallèles;*** en d'autres termes, ***lorsque deux droites*** AG, A'G', ***sont coupées par une série de parallèles*** AA', BB',..., GG', ***le rapport de deux segments quelconques de la première droite est égal au rapport des segments correspondants de la seconde*** (*fig.* 136, 137).

Fig. 136.

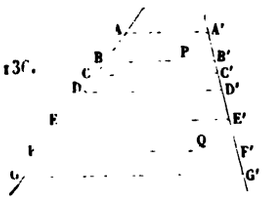
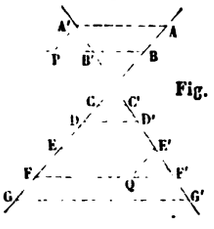


Fig. 137.



Il suffit (note 1) de prouver :

1° Que, *si deux segments* AB *et* EF *de la première droite sont égaux entre eux, les segments correspondants* A'B' *et* E' F' *de la seconde droite sont aussi égaux entre eux ;*

2° Que, *si sur la première droite, un segment* EG *est égal à la somme de deux autres* AB *et* CD, *sur la seconde droite, le segment* E'G', *correspondant à* EG, *est aussi égal à la somme des segments* A'B' *et* C'D' *qui correspondent à* AB *et à* CD.

1° Menons A'P et E'Q parallèles à AG; A'P et AB seront égales comme parallèles comprises entre parallèles; E'Q sera égale à EF pour la même raison; par suite, on aura A'P = E'Q, puisqu'on a par hypothèse AB = EF. D'ailleurs, les angles PA'B', QE'F', sont égaux comme correspondants, et les angles A'PB', E'QF', comme ayant les côtés parallèles et de même sens; donc, les triangles PA'B', QE'F', ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, sont égaux, et l'on a A'B' = E'F'.

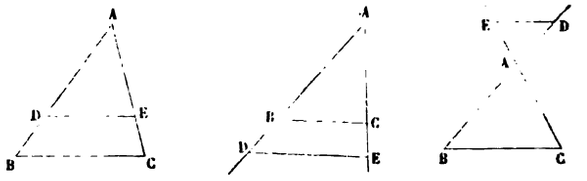
2° Puisque, par hypothèse, $EF = AB$, et $GF = CD$, on a, d'après l'alinéa qui précède, $E'F' = A'B'$ et $F'G' = C'D'$; le segment $E'G'$ est donc égal à la somme de $A'B$ et de $C'D'$.

La figure peut offrir deux dispositions différentes; mais la démonstration ne change pas.

THÉORÈME.

182. *Toute parallèle* DE *à l'un des côtés* BC *d'un triangle* ABC *divise les deux autres côtés en parties proportionnelles* (*fig.* 138, 139, 140).

Fig. 138. Fig. 139. Fig. 140.



En effet, en concevant par le sommet A une parallèle à BC, on voit (181) qu'on a

$$\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}, \tag{1}$$

ou encore

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \tag{2}$$

$$\frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CE}. \tag{3}$$

Chacune de ces proportions se trouve ici démontrée directement; mais il convient de remarquer qu'en vertu des règles de l'Arithmétique, l'une quelconque d'entre elles entraîne les deux autres.

Nous avons indiqué les trois dispositions que peut présenter la figure.

183. Réciproquement, *si deux points* D *et* E, *situés respectivement sur deux côtés* AB *et* AC *d'un triangle* ABC, *divisent ces côtés en parties proportionnelles, la droite* DE *qui unit ces deux points est parallèle au troisième côté* BC.

Puisque chacune des proportions (1), (2), (3), entraîne les

deux autres, on peut partir de l'une quelconque d'entre elles comme hypothèse; nous choisirons par exemple la première

$$\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}. \qquad (1)$$

Cela posé, il faut distinguer plusieurs cas:

Supposons d'abord les points D *et* E *situés sur les côtés eux-mêmes*, c'est-à-dire l'un D entre A et B, et l'autre E entre A et C (*fig.* 138); et concevons par le point D une parallèle à BC. Cette parallèle déterminera (181) entre A et C un point dont les distances à A et C formeront un rapport égal à $\frac{DA}{DB}$. Or, entre A et C (179), il n'existe qu'un seul point dont le rapport des distances à A et C soit égal à $\frac{DA}{DB}$, et ce point est par hypothèse le point E. Donc la parallèle à BC, menée par le point D, passe par E et coïncide avec DE. Donc enfin DE est parallèle à BC.

Supposons, en second lieu, les points D *et* E *situés sur les prolongements des côtés.* Si D est, par exemple, au-dessous de AB (*fig.* 139), le rapport $\frac{DA}{DB}$ sera supérieur à 1; il en sera donc de même de son égal $\frac{EA}{EC}$ et, par suite, le point E sera pareillement au-dessous de AC. Dès lors la démonstration s'achèvera comme ci-dessus.

On verrait de même que si D était au-dessus de BA (*fig.* 140), la proportion (1) exigerait que E fût au-dessus de CA; puis, on achèverait la démonstration comme dans le premier cas.

Cette réciproque demande une certaine attention; l'hypothèse renferme en réalité deux parties: la première consiste dans l'existence de la proportion (1), et l'autre est relative à la situation des points D et E qui doivent être placés de la même manière sur les côtés AB et AC. Bien que sous-entendue d'ordinaire pour plus de brièveté, cette seconde partie est indispensable; car si l'un des points D était, par exemple, sur le côté lui-même et l'autre E sur l'un des prolongements, la droite DE ne saurait être parallèle à BC, bien que la proportion (1) fût satisfaite.

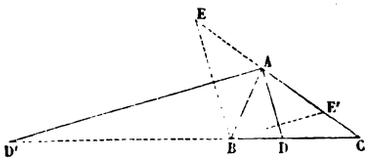
THÉORÈME.

184. *Dans tout triangle* ABC (*fig.* 141) :

1° *La bissectrice* AD *d'un angle quelconque* BAC *divise le côté opposé* BC *en deux segments additifs* DB *et* DC *proportionnels aux côtés adjacents;*

2° *La bissectrice* AD′ *d'un angle extérieur* BAE *divise le côté opposé* BC *en deux segments soustractifs* D′B, D′C, *proportionnels aux côtés adjacents.*

Fig. 141.



En effet :

1° En menant BE parallèle à la bissectrice AD, on a dans le triangle BEC (182)

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AE}{AC}.$$

D'autre part, l'angle BEA est le correspondant de l'angle DAC, et les angles EBA et DAB sont alternes-internes; or, AD étant bissectrice de l'angle BAC, les angles DAC, DAB, sont égaux; par suite, les angles BEA, EBA, sont aussi égaux, et le triangle BAE est isocèle. En remplaçant dès lors, dans la proportion qui précède, le côté AE par son égal AB, on a

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

2° En menant BE′ parallèle à la bissectrice AD′ de l'angle extérieur BAE, on a dans le triangle D′AC (182)

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AE'}{AC}.$$

D'autre part, l'angle BE′A est le correspondant de l'angle D′AE, et les angles E′BA et D′AB sont alternes-internes; or, AD′ étant bissectrice de l'angle BAE, les angles D′AE, D′AB, sont

égaux; par suite, les angles BE'A, E'BA, sont aussi égaux, et le triangle BAE' est isocèle. En remplaçant dès lors, dans la proportion qui précède, le côté AE' par son égal AB, on a

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}.$$

185. RÉCIPROQUEMENT, *si une droite, issue du sommet d'un angle d'un triangle, divise le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés adjacents, cette droite est la bissectrice de l'angle considéré ou de l'angle supplémentaire, suivant qu'elle rencontre le côté opposé lui-même ou l'un de ses prolongements.*

En effet, entre B et C il n'existe qu'un point D qui divise BC dans le rapport de AB à AC (179); le théorème direct exige donc que ce point appartienne à la bissectrice de l'angle BAC (*fig.* 141).

De même, sur les prolongements de BC, il n'existe qu'un point D' qui divise BC en deux segments soustractifs proportionnels à AB et AC (179); dès lors, le théorème direct exige que ce point appartienne à la bissectrice de l'angle extérieur BAE (*fig.* 141).

COROLLAIRE.

186. Les deux points D et D' satisfont à la proportion

$$\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C};$$

ils sont donc (180) conjugués harmoniques par rapport à la droite BC. Ainsi, *les deux côtés d'un angle, la bissectrice de cet angle et celle de son supplément, déterminant quatre points sur une sécante quelconque, les deux derniers sont conjugués par rapport aux deux autres.*

THÉORÈME.

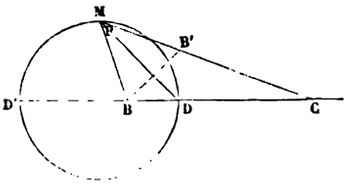
187. *Le lieu géométrique des points dont les distances à deux points fixes sont dans un rapport donné est une circonférence* (*fig.* 142).

Soient B et C les deux points fixes, $\frac{m}{n}$ le rapport donné et M un point quelconque du lieu, c'est-à-dire un point tel qu'on ait

$$\frac{MB}{MC} = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Il existe d'abord, sur la droite indéfinie BC, deux points du

Fig. 142.



lieu, c'est-à-dire (179) deux points D et D′ qui satisfont aux relations

$$\frac{DB}{DC} = \frac{m}{n}, \quad \frac{D'B}{D'C} = \frac{m}{n};$$

on déduit de là

$$\frac{DB}{DC} = \frac{MB}{MC} \quad \text{et} \quad \frac{D'B}{D'C} = \frac{MB}{MC}.$$

Ces proportions prouvent (185), la première que MD est la bissectrice de l'angle BMC, et la seconde que MD′ est la bissectrice de l'angle adjacent supplémentaire. Or, les bissectrices de deux angles adjacents et supplémentaires sont rectangulaires. Donc, le point variable M est le sommet d'un angle droit DMD′ dont les deux côtés passent constamment par deux points fixes D et D′; tout point M du lieu est donc situé sur la circonférence décrite sur DD′ comme diamètre.

Réciproquement, tout point M de cette circonférence DD′ appartient au lieu.

En effet, B′ étant le symétrique de B par rapport à la droite DM, désignons provisoirement par P le point où CB′ rencontre DM; DP sera la bissectrice de l'angle BPC, et l'on aura

$$\frac{PB}{PC} = \frac{DB}{DC} = \frac{m}{n}.$$

Donc, le point P appartient au lieu; mais, comme tel, il est sur la circonférence DD′ et, par suite, il coïncide avec M qui est le seul point, autre que D, commun à DM et à la circonférence DD′. Donc, M appartient au lieu.

188. Lorsque le rapport donné est égal à l'unité, D devient le milieu de BC et D′ passe à l'infini (179); le cercle devient la perpendiculaire élevée sur le milieu de BC (49).

§ II. — LIGNES PROPORTIONNELLES DANS LE CERCLE.

DÉFINITIONS.

189. On dit que deux droites, tracées entre les côtés d'un angle ou de son opposé par le sommet, sont *anti-parallèles*, lorsque la première fait avec l'un des côtés de l'angle donné un angle égal à celui que la seconde droite fait avec l'autre côté.

Ainsi, les deux droites DE et BC (*fig.* 143) sont anti-parallèles par rapport à l'angle BAC, si l'angle ADE est égal à l'angle

Fig. 143.

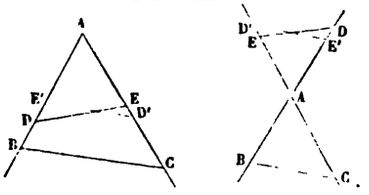
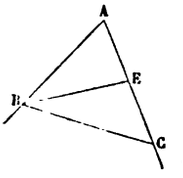


Fig. 144.



ACB. Alors l'angle AED, que la premiere droite forme avec le second côté AC, est égal à l'angle ABC que la seconde droite fait avec le premier côté AB (76).

THÉORÈME.

190. *Lorsque les deux côtés d'un angle sont coupés par deux droites anti-parallèles, le produit des distances du sommet aux deux points où chacun des côtés est rencontré par les deux transversales est constant* (*fig.* 143).

Ainsi, BAC étant l'angle proposé et les deux droites BC et DE étant anti-parallèles, on a la relation

$$AB.AD = AC.AE.$$

En effet, prenons $AD' = AD$ et $AE' = AE$, et menons $D'E'$. L'égalité des triangles ADE, AD'E', qui ont un angle commun compris entre deux côtés égaux, entraîne celle des angles ADE, A'D'E'. D'ailleurs, les angles ADE, ACB, sont égaux par hypothèse (189); donc les angles correspondants AD'E', ACB, sont égaux, et les droites BC, D'E' sont parallèles (65); on a donc (182) la proportion

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AD'},$$

qui, lorsqu'on remplace les quantités AE' et AD' par les quantités égales AE et AD, devient

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} \quad \text{ou} \quad AB.AD = AC.AE.$$

191. Réciproquement, *si deux droites* DE *et* BC, *tracées entre les côtés d'un angle* BAC, *sont telles, que le produit des distances du sommet aux deux points où elles coupent chacun des côtés soit constant,* c'est-à-dire sont telles, qu'on ait

$$(1) \qquad AB.AD = AC.AE \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD},$$

ces droites sont anti-parallèles par rapport à cet angle.

En effet, concevons (*fig* 143) la droite qui, menée par le point E, serait anti-parallèle à BC par rapport à l'angle BAC; cette droite coupe le côté AB en un point (190) dont la distance au sommet A sera une quatrième proportionnelle à AB, AE, AC. Or, la distance AD est précisément, en vertu de l'égalité (1), cette quatrième proportionnelle; donc la droite DE est anti-parallèle à BC.

Corollaire.

192. Si les deux points D et B se confondaient (*fig.* 144), on aurait $\overline{AB}^2 = AC.AE$.

Donc, *lorsque deux droites anti-parallèles par rapport à un angle se coupent sur l'un des côtés de cet angle, la distance du sommet à ce point est moyenne proportionnelle entre les distances du sommet aux points où le second côté de l'angle coupe les deux droites anti-parallèles.*

RÉCIPROQUEMENT, *si par un point* B, *pris sur l'un des côtés d'un angle* BAC, *on mène dans l'intérieur de l'angle deux droites* BC, BE, *telles, que* $\overline{AB}^2 = AC.AE$, *ces deux droites sont anti-parallèles par rapport à cet angle.*

THÉORÈME.

193. ***Si, d'un point pris dans le plan d'un cercle, on mène des sécantes à ce cercle, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la circonférence est constant, quelle que soit la direction de la sécante.***

Fig. 145.

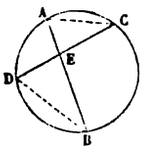


Fig. 146.

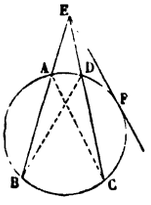
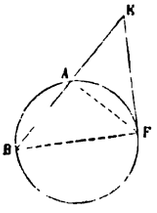


Fig. 147.



Ainsi, soient EA, ED, deux sécantes issues du point fixe E; il s'agit de démontrer qu'on a

(1) $$EA.EB = EC.ED.$$

La figure peut se présenter de deux manières, suivant que le point E est intérieur (*fig.* 145) ou extérieur au cercle (*fig.* 146); mais la démonstration est la même dans les deux cas.

Menons les cordes AC et BD; les angles ACD, ABD, étant inscrits dans le même segment, sont égaux, et par suite les cordes AC, BD, sont anti-parallèles par rapport à l'angle AED. On a donc (190) la relation (1)

Le produit constant EA.EB a reçu le nom de *puissance du point* E *par rapport au cercle considéré.*

194. RÉCIPROQUEMENT, *lorsque deux droites* AB *et* CD, *prolongées, s'il le faut, concourent en un point* E *tel qu'on ait la relation*

$$EA.EB = EC.ED,$$

les extrémités A, B, C, D, *sont situées sur une même circonférence.*

En effet, d'après le n° 191, la relation donnée prouve que les deux droites AC et BD sont anti-parallèles par rapport à l'angle AED; par suite, les angles ACD, DBA, sont égaux, et si sur la droite AD on décrit un segment capable de l'angle ACD, la circonférence qui passe par les trois points A, C, D, renferme le point B.

COROLLAIRE.

195. Reprenons le cas où le point E est extérieur (*fig.* 146), et supposons que la sécante EDC tourne autour du point E jusqu'à ce qu'elle coïncide avec la tangente EF; la sécante entière EC et sa partie extérieure ED deviendront l'une et l'autre égales à la longueur EF de la tangente, et la relation

$$EA.EB = EC.ED,$$

prise à la limite, sera la suivante

$$EA.EB = \overline{EF}^2$$

Donc, *si, par un point extérieur à un cercle, on mène à ce cercle une sécante et une tangente, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.*

On peut d'ailleurs appliquer directement à ce cas particulier la démonstration du cas général : les angles EBF, AFE (*fig.* 147), l'un inscrit, l'autre formé par une tangente et une corde, ont l'un et l'autre pour mesure la moitié de l'arc AF; l'égalité de ces angles prouve l'anti-parallélisme des droites AF et BF par rapport à l'angle E, et par suite (192) entraîne la relation

$$\overline{EF}^2 = EA.EB.$$

196. RÉCIPROQUEMENT, *si trois points* A, B, F, *situés, les deux premiers* A *et* B *sur un côté de l'angle* E, *et le troisième* F *sur l'autre côté, sont tels, qu'on ait la relation*

$$\overline{EF}^2 = EA.EB,$$

la circonférence qui passe par ces trois points est tangente en **F** *au côté* **EF**.

En effet, d'après le n° 192, la relation donnée prouve l'antiparallélisme des droites AF et BF par rapport à l'angle E; les angles AFE, EBF, sont donc égaux; par suite, si l'on décrit une circonférence passant par A et F et tangente en F à la droite EF, cette circonférence, d'après la construction connue du segment capable (162), passera par le point B.

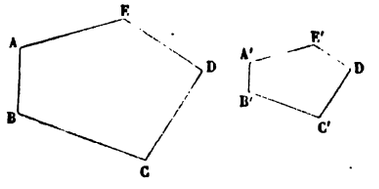
§ III. — SIMILITUDE DES POLYGONES.

DÉFINITIONS.

197. Deux polygones d'un même nombre de côtés sont dits *semblables* lorsqu'ils ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels.

On entend par *côtés homologues* ceux qui sont adjacents à des angles respectivement égaux, et l'on donne à ces angles eux-mêmes le nom d'*angles homologues;* enfin, on appelle *rapport de similitude* des deux polygones le rapport de deux côtés homologues quelconques.

Fig. 148.



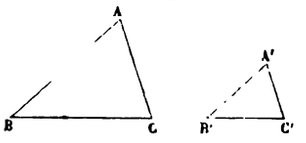
Ainsi les deux pentagones ABCDE, A'B'C'D'E' (*fig.* 148), sont semblables, s'ils satisfont aux relations

$$A = A', \quad B = B', \quad C = C', \quad D = D', \quad E = E',$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

Dans les triangles semblables, tels que ABC, A′B′C′ (*fig.* 149), les côtés homologues sont opposés aux angles égaux.

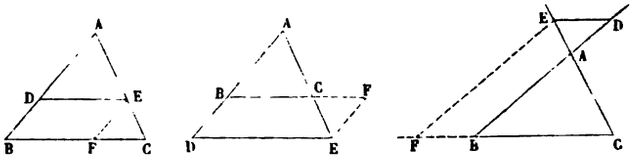
Fig. 149.



LEMME.

198. *En coupant un triangle* ABC *par une parallèle* DE *à l'un des côtés* BC, *on détermine un nouveau triangle* ADE *semblable au premier* (*fig.* 150, 151, 152).

Fig. 150. Fig. 151. Fig. 152.



En effet :

D'abord les deux triangles ADE, ABC (*fig.* 150), ont leurs angles respectivement égaux; car l'angle A est commun et les angles ADE, ABC, sont correspondants, ainsi que les angles AED, ACB.

En second lieu, les côtés homologues sont proportionnels; car, DE étant parallèle à BC, on a (182)

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}; \tag{1}$$

puis, en menant EF parallèle à AB, on a encore

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC};$$

ou, comme les parallèles DE, BF, comprises entre parallèles, sont égales,

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}; \tag{2}$$

la réunion des proportions (1) et (2), qui ont un rapport commun, donne la suite de rapports égaux

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

SCOLIE.

199. La proposition énoncée subsiste lorsque la parallèle DE est située au-dessous de BC (*fig.* 151), ou au-dessus de A (*fig.* 152). La démonstration est absolument la même dans le cas de la *fig.* 151; et, dans le cas de la *fig.* 152, toute la différence consiste en ce que les angles ADE, ABC, ainsi que les angles AED, ACB, sont alternes-internes au lieu d'être correspondants.

THÉORÈME.

200. *Deux triangles* ABC, A'B'C', *sont semblables :*

1° *Lorsqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun ;*

2° *Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels;*

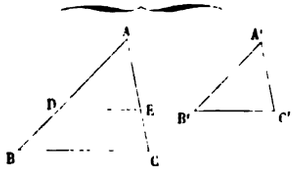
3° *Lorsqu'ils ont les côtés proportionnels.*

1° Supposons qu'on ait (*fig.* 153)

$$A = A', \quad B = B'.$$

Prenons sur le côté AB homologue de A'B' une longueur AD égale à A'B', et menons DE parallèle à BC. Le triangle ADE

Fig. 153.



est semblable à ABC (198), et il suffit de démontrer l'égalité des triangles ADE, A'B'C'.

Or, les angles A et A' sont égaux par hypothèse; l'angle ADE est correspondant de l'angle ABC, qui, par hypothèse, est égal à B'; enfin, le côté AD est égal à A'B' par construction. Donc

les deux triangles ADE, A'B'C', sont égaux, comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux.

2° Supposons qu'on ait

$$(1) \qquad A = A', \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'};$$

prenons sur le côté AB homologue de A'B' une longueur AD égale à A'B', et menons DE parallèle à BC. Le triangle ADE est semblable au triangle ABC (198), et il suffit de démontrer l'égalité des triangles ADE, A'B'C'.

Or, la similitude des triangles ABC, ADE, donne la proportion

$$(2) \qquad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

qui a les mêmes numérateurs que la proportion (1); les dénominateurs AD et A'B' des deux premiers rapports étant en outre égaux par construction, il faut que AE = A'C'; les deux triangles ADE, A'B'C', sont donc égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux.

3° Supposons qu'on ait

$$(1) \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'};$$

prenons sur le côté AB une longueur AD égale à A'B', et menons DE parallèle à BC. Le triangle ADE est semblable à ABC (198), et il suffit de démontrer l'égalité des triangles ADE, A'B'C'.

Or, la similitude des triangles ADE, ABC, donne la série de rapports égaux

$$(2) \qquad \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{CA}{EA},$$

qui présente les mêmes numérateurs que la série (1). Par suite, les dénominateurs AD, A'B', des deux premiers rapports étant égaux par construction, il faut qu'on ait aussi

$$DE = B'C', \quad EA = C'A';$$

les deux triangles ADE, A'B'C', sont donc égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun.

COROLLAIRES.

201. *Deux triangles sont semblables, lorsqu'ils ont leurs côtés respectivement parallèles ou respectivement perpendiculaires;* car, dans l'un et l'autre cas, ces triangles ont leurs angles égaux chacun à chacun (77).

202. *Deux triangles rectangles sont semblables, lorsqu'ils ont un angle aigu égal.*

SCOLIES.

203. Il résulte du n° 200 que, *dans les triangles, l'égalité des angles entraîne la proportionnalité des côtés, et réciproquement.* Cette propriété fondamentale, dont la découverte est attribuée à Thalès (639-548 av. J.-C.), ne subsiste pas pour des polygones quelconques. Par exemple, un carré et un rectangle ont leurs angles égaux, et cependant leurs côtés homologues ne sont pas proportionnels. De même, un carré et un losange ont leurs côtés proportionnels, et cependant leurs angles ne sont pas égaux.

204. Le tableau suivant, dans lequel nous avons réuni les cas d'égalité et les cas de similitude de deux triangles, en les faisant correspondre un à un, permet de comparer les deux théories.

Deux triangles sont :

égaux,	semblables.
lorsqu'ils ont :	
1° Deux angles égaux comprenant un côté égal ;	1° Deux angles égaux ;
2° Un angle égal compris entre deux côtés égaux ;	2° Un angle égal compris entre deux côtés proportionnels ;
3° Les trois côtés égaux.	3° Les trois côtés proportionnels.

On voit que chaque cas de similitude ne renferme que *deux* conditions, tandis que l'égalité en exige toujours *trois*.

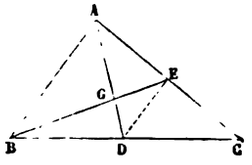
205. Il importe en outre de remarquer le mode uniforme de démonstration que nous avons adopté au n° 200. Le procédé consiste à prendre, sur un côté du premier triangle, a

partir du sommet, une longueur égale au côté homologue du second; puis à mener, par le point ainsi déterminé, une parallèle à l'un des deux autres côtés du premier triangle. On construit ainsi un triangle auxiliaire qui, d'après le lemme du n° 198, est semblable au premier; et les conditions renfermées dans l'hypothèse permettent ensuite de démontrer aisément que ce triangle auxiliaire est égal au second triangle, en vertu du cas d'égalité qui correspond au cas de similitude que l'on étudie.

206. Enfin, il reste à montrer l'usage de cette théorie, c'est-à-dire à indiquer de quelle manière les cas de similitude interviennent dans la démonstration des théorèmes. Deux triangles semblables satisfont à cinq conditions, et chaque cas de similitude comprend deux de ces conditions groupées de telle sorte que, lorsqu'elles sont satisfaites, les cinq soient remplies. Par suite, quand, dans une certaine figure, on aura reconnu la similitude de deux triangles par l'application de l'un des trois cas, on devra en conclure immédiatement que les trois autres conditions sont remplies, et l'on aura acquis de cette manière de nouvelles données qui permettront d'aller plus loin.

207. Cherchons, par exemple, dans quel rapport se coupent deux médianes d'un triangle ABC, c'est-à-dire les droites AD et BE qui joignent deux sommets aux milieux des côtés respectivement opposés (*fig.* 154).

Fig. 154.



Soit G le point commun aux deux médianes AD, BE; la droite DE est parallèle à AB (183); par suite, les triangles DEC,

ABC sont semblables, ainsi que les triangles GED, AGB. D'ailleurs, E étant le milieu de AC, le rapport de similitude des deux premiers triangles est $\frac{1}{2}$; donc ED est égale à la moitié de AB, et le rapport de similitude des seconds triangles est aussi $\frac{1}{2}$. On a donc

$$DG = \frac{1}{2}AG, \quad GE = \frac{1}{2}BG$$

ou bien

$$DG = \frac{1}{2}AD, \quad GE = \frac{1}{2}BE.$$

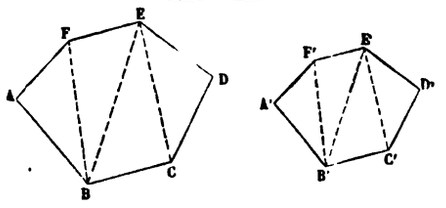
Ainsi, *deux médianes quelconques se coupent en un point situé au tiers de chacune d'elles à partir du côté qu'elle divise en deux parties égales.*

Donc *les trois médianes d'un triangle concourent en un même point.*

THÉORÈME.

208. *Deux polygones, composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et semblablement disposés, sont semblables* (*fig.* 155).

Fig. 155.



Soient ABF. FBE. EBC, CED, et A'B'F', F'B'E', E'B'C', C'E'D', deux séries de triangles respectivement semblables et semblablement disposés; le polygone ABCDEF, formé par les premiers triangles, est semblable au polygone A'B'C'D'E'F' que forment les seconds.

En effet :

1° Les angles des deux polygones sont égaux, soit comme

angles homologues de deux triangles semblables, soit comme sommes d'angles homologues de plusieurs triangles semblables. Ainsi, les angles A et A′ sont égaux comme angles homologues des deux triangles semblables BAF, B′A′F′, tandis que l'angle B est égal à l'angle B′ comme étant la somme des trois angles ABF, FBE, EBC, respectivement égaux aux trois angles A′B′F′, F′B′E′, E′B′C′, qui composent l'angle B′.

2° Les côtés homologues sont proportionnels, car on a successivement :

A cause des triangles semblables ABF, A′B′F′,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'F'}{AF} = \frac{B'F'}{BF};$$

A cause des triangles semblables BFE, B′F′E′,

$$\frac{B'F'}{BF} = \frac{F'E'}{FE} = \frac{E'B'}{EB};$$

A cause des triangles semblables EBC, E′B′C′,

$$\frac{E'B'}{EB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'E'}{CE};$$

A cause des triangles semblables CED, C′E′D′,

$$\frac{C'E'}{CE} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE};$$

d'où, en supprimant les rapports communs,

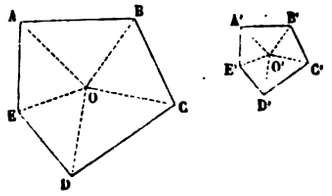
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'F'}{AF} = \frac{F'E'}{FE} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE}.$$

209. Réciproquement, *deux polygones semblables peuvent être décomposés en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés* (*fig.* 156).

Soient ABCDE, A′B′C′D′E′, deux polygones semblables. Prenons à l'intérieur du premier un point quelconque O, et joignons ce point aux extrémités du côté AB; puis, sur le côté A′B′ homologue de AB, et dans l'intérieur du polygone A′B′C′D′E′, construisons les angles B′A′O′, A′B′O′, res-

pectivement égaux aux angles BAO, ABO. Le point O′ sera le sommet d'un triangle O′A′B′ semblable au triangle OAB (200).

Fig. 156.



et situé, par rapport au second polygone A′B′C′D′E′, de la même manière que le triangle OAB par rapport au polygone ABCDE.

Cela posé, joignons le point O à tous les sommets du premier polygone, et le point O′ à tous les sommets du second; les deux polygones seront ainsi décomposés en un même nombre de triangles semblablement disposés, dont il s'agit de démontrer la similitude respective.

Or, les deux premiers triangles OAB, O′A′B′, semblables par construction, donnent

$$\frac{O'B'}{OB} = \frac{A'B'}{AB};$$

la similitude des polygones proposés donne à son tour

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC};$$

on a donc

$$\frac{O'B'}{OB} = \frac{B'C'}{BC}.$$

D'ailleurs, l'angle O′B′C′, différence des angles A′B′C′, A′B′O′, qui sont respectivement égaux aux angles ABC, ABO, est égal à l'angle OBC, différence de ces deux derniers. Donc les triangles OBC, O′B′C′, sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

De la similitude des triangles O′B′C′, OBC, on déduirait de même celle des triangles suivants O′C′D′, OCD; et ainsi de suite.

Scolies.

210. Deux points O et O′, situés dans le plan de deux polygones semblables, sont dits *homologues*, lorsqu'en joignant l'un d'eux O aux extrémités d'un côté AB et l'autre O′ aux extrémités du côté homologue A′B′, on obtient deux triangles OAB, O′A′B′, semblables et semblablement disposés par rapport aux deux polygones.

Il résulte de la démonstration précédente que deux points homologues quelconques peuvent être pris pour centres de décomposition de deux polygones semblables en triangles semblables et semblablement disposés.

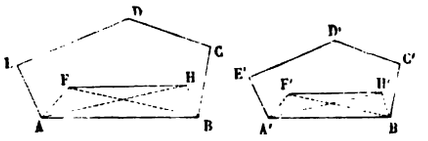
Si le point O était extérieur au polygone ABCDE, son homologue O′ serait aussi extérieur au polygone A′B′C′D′E′; il faudrait alors considérer les deux polygones comme composés de triangles additifs et de triangles soustractifs.

Si le point O coïncidait avec l'un des sommets A, son homologue O′ coïnciderait avec le sommet A′.

211. Deux droites situées dans le plan de deux polygones semblables sont dites *homologues*, lorsque leurs extrémités sont deux à deux des points homologues; telles sont, par exemple, les diagonales relatives à des sommets homologues.

Le rapport de deux droites homologues quelconques est égal au rapport de similitude des deux polygones.

Fig. 157.



Soient en effet ABCDE, A′B′C′D′E′ (*fig.* 157), deux polygones semblables, et FH, F′H′, deux droites homologues quelconques. La similitude (210) des triangles FAB, F′A′B′, prouve l'égalité des angles ABF, A′B′F′, et celle des rapports $\frac{F'B'}{FB}$, $\frac{A'B'}{AB}$. De même, la similitude des triangles HAB, H′A′B′,

entraîne l'égalité des angles HBA, H'B'A', et celle des rapports $\frac{H'B'}{HB}$, $\frac{A'B'}{AB}$. On a par suite

$$\frac{F'B'}{FB} = \frac{H'B'}{HB},$$

et

angle FBH ou HBA — FBA = angle F'B'H' ou H'B'A' — F'B'A'

Donc, les triangles FBH, F'B'H', sont semblables (200), et le rapport $\frac{FH}{F'H'}$ est égal à chacun des rapports égaux $\frac{F'B'}{FB}$, $\frac{A'B'}{AB}$, c'est-à-dire au rapport de similitude des deux polygones considérés.

THÉORÈME.

212. *Le rapport des périmètres de deux polygones semblables est égal à leur rapport de similitude.*

En effet, ABCDE, A'B'C'D'E' (*fig.* 157), étant deux polygones semblables, les rapports

$$\frac{AB}{A'B'}, \quad \frac{BC}{B'C'}, \quad \frac{CD}{C'D'}, \quad \frac{DE}{D'E'}, \quad \frac{EA}{E'A'},$$

sont tous égaux par définition (197) au rapport de similitude; donc, en vertu d'une propriété connue, la somme de leurs numérateurs et celle de leurs dénominateurs, c'est-à-dire les périmètres des polygones ABCDE, A'B'C'D'E', forment un rapport égal à chacun des précédents, c'est-à-dire au rapport de similitude.

THÉORÈME.

213. *Deux parallèles quelconques sont coupées en parties proportionnelles par une série de sécantes issues d'un même point.*

Soient AD, A'D', deux parallèles, et une série de sécantes OAA', OBB', OCC', ODD', issues d'un point O placé, soit entre les deux parallèles, soit extérieurement (*fig.* 158); on a la suite de rapports égaux

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD}. \tag{1}$$

En effet, les triangles semblables OAB, OA′B′ (198), donnent

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB}.$$

De même, par les triangles semblables OBC, OB′C′, on a

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{OC'}{OC}.$$

Enfin, les triangles semblables OCD, OC′D′, donnent à leur tour

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{C'D'}{CD}.$$

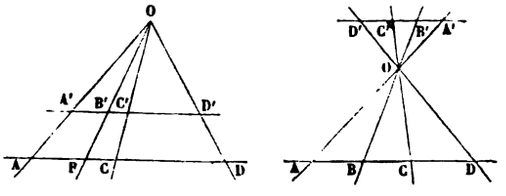
En supprimant les rapports communs, on a la série de rapports égaux (1) qu'il fallait démontrer.

214. On voit, par la démonstration même, que cette série de rapports est encore égale à la suite

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD}.$$

En d'autres termes, *le rapport de deux parties correspondantes quelconques des deux parallèles est le même que celui des distances du point* O *aux deux points où l'une quelconque des sécantes rencontre les deux parallèles.*

Fig. 158.



215. Réciproquement, *lorsque plusieurs sécantes* AA′, BB′, CC′, DD′, *coupent deux parallèles en parties proportionnelles, ces sécantes concourent en un même point* (*fig.* 158).

Appelons $\frac{a}{b}$ le rapport de deux parties correspondantes quel-

conques des deux parallèles, de sorte qu'on ait

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \ldots = \frac{a}{b}.$$

1° Si les deux séries de points A, B, C, D, et A′, B′, C′, D′, présentent une disposition inverse l'une de l'autre (*fig.* 158), deux sécantes quelconques AA′ et CC′ se coupent en un point O intérieur aux deux parallèles; de plus, les triangles semblables OAC, OA′C′, donnent

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{a}{b}.$$

Ainsi, l'une quelconque CC′ des sécantes coupe la première d'entre elles AA′, en un point O situé entre A et A′ et tel que

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{a}{b}.$$

Toutes les sécantes concourent donc en ce point O (179).

2° Si les deux séries de points A, B, C, D et A′, B′, C′, D′, sont disposées de la même manière (*fig.* 158), on verra de même qu'une sécante quelconque CC′ coupe la première AA′ en un point O situé hors de AA′ et tel que

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{a}{b}.$$

Toutes les sécantes concourent donc aussi en ce point O (179).

216. Lorsque le rapport $\frac{a}{b}$ est égal à l'unité, les parties correspondantes des deux parallèles sont égales entre elles, et les sécantes sont toutes parallèles. Le théorème énoncé subsiste donc, à la condition de regarder deux *parallèles* comme *deux droites qui concourent à l'infini.*

THÉORÈME.

217. *Le lieu des points dont les distances à deux droites fixes ont un rapport donné est un système de deux droites passant par le point de concours des deux premières* (*fig.* 159)

En effet, soient OU et OV les deux droites, et M un point

quelconque pris dans l'intérieur de l'angle VOU ou de son opposé par le sommet;

Fig. 159.

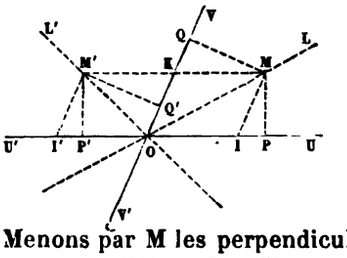
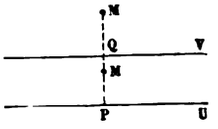


Fig. 159'.



Menons par M les perpendiculaires MP et MQ sur OU et OV et les parallèles MK et MI aux mêmes droites. Quand le point M se déplace d'une manière quelconque dans l'angle UOV, le triangle MPI reste semblable à lui-même, puisque ses côtés conservent leurs directions; le rapport $\frac{MI}{MP}$ reste donc constant; il en est de même du rapport $\frac{MK}{MQ}$ et, par suite, de leur quotient $\frac{MI}{MK}\frac{MQ}{MP}$. Le lieu des points M pour lesquels $\frac{MQ}{MP}$ reste constant est donc le même que celui des points pour lesquels $\frac{MI}{MK}$ ou $\frac{MI}{OI}$ est invariable; mais alors, le triangle MOI restant semblable à lui-même, puisqu'il a un angle constant OIM compris entre deux côtés dont le rapport est fixe, l'angle MOI de ce triangle reste constant; donc le lieu du point M est une droite OL passant par O.

De même, dans l'angle VOU′ et dans son opposé par le sommet, le lieu est une droite OL′ passant par O.

Scolies.

218. Lorsque le rapport donné est égal à l'unité, le lieu est l'ensemble des bissectrices des angles VOU, VOU′ (53).

219. Au lieu de mesurer les distances du point M à OU et OV perpendiculairement à ces droites, on pourrait les estimer suivant des directions déterminées quelconques, la démonstration et, par suite, le théorème subsisteraient.

220. Enfin, si les deux droites données U et V étaient parallèles (*fig.* 159'), le rapport constant $\frac{MP}{MQ}$ étant égal à $\frac{PQ \pm MQ}{MQ} = \frac{PQ}{MQ} \pm 1$, la distance MQ serait constante, et le lieu se composerait de deux droites parallèles aux proposées.

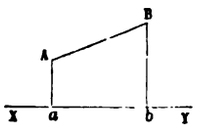
§ IV. — RELATIONS MÉTRIQUES ENTRE LES DIFFÉRENTES PARTIES D'UN TRIANGLE.

DÉFINITIONS.

221. On appelle *projection* d'un point A sur une droite indéfinie XY le pied *a* de la perpendiculaire abaissée de ce point sur cette droite (*fig.* 160).

Si l'on considère une droite limitée AB, la projection de cette droite sur XY est l'intervalle *ab* qui sépare les projections de ses extrémités A et B.

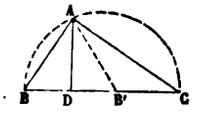
Fig. 160.



THÉORÈME.

222. *Si du sommet* A *de l'angle droit d'un triangle rectangle* ABC *on abaisse la perpendiculaire* AD *sur l'hypoténuse,* 1° *chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre l'hypoténuse et sa projection sur l'hypoténuse;* 2° *la perpendiculaire* AD *est moyenne proportionnelle entre les deux segments* BD *et* CD *de l'hypoténuse* (*fig.* 161).

Fig. 161.



En effet :

1° Les droites AC et AD sont antiparallèles par rapport à l'angle B (189), puisqu'elles font un angle droit, l'une avec le

côté BA, l'autre avec le côté BC. On a donc (192).

$$\overline{BA}^2 = BC.BD,$$

et l'on démontrerait de même la relation $\overline{CA}^2 = BC.CD$.

2° Les droites AC et AD étant antiparallèles par rapport à l'angle B, les angles BAD et C sont égaux (189); par suite, si l'on amène le triangle ADB en ADB′ en le faisant tourner autour de AD, l'angle B′AD sera égal à l'angle C, et les deux droites AB′ et AC seront antiparallèles par rapport à l'angle ADC. On aura donc

$$\overline{AD}^2 = B'D.CD \quad \text{ou} \quad \overline{AD}^2 = BD.CD.$$

COROLLAIRE.

223. En joignant un point quelconque A d'une circonférence aux extrémités B et C d'un diamètre (*fig.* 161), on forme un triangle rectangle (131). De là, une nouvelle manière d'énoncer la proposition précédente :

1° *Toute corde* AB *d'un cercle est moyenne proportionnelle entre le diamètre* BC *qui passe par l'une de ses extrémités et sa projection* BD *sur ce diamètre;*

2° *La perpendiculaire* AD, *abaissée d'un point quelconque* A *d'une circonférence sur un diamètre* BC, *est moyenne proportionnelle entre les deux segments* BD *et* CD *de ce diamètre.*

THÉORÈME.

224. *Les trois côtés d'un triangle rectangle étant évalués en nombres au moyen d'une unité commune, le carré du nombre qui mesure l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des nombres qui mesurent les deux côtés de l'angle droit;* ou plus brièvement, *dans tout triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*

En effet, en ajoutant les deux relations (222, 1°) :

$$\overline{AB}^2 = BC.BD, \quad \overline{AC}^2 = BC.CD,$$

on obtient

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC(BD + CD) \quad \text{ou} \quad \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2.$$

COROLLAIRES.

225. Ce théorème permet de calculer l'un des côtés d'un triangle rectangle quand on connaît les deux autres.

Si l'on connaît les deux côtés b et c de l'angle droit, l'hypoténuse a résulte de la formule

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad \text{d'où} \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Ainsi, soient $b = 3$, $c = 4$, on a $a = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

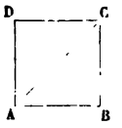
Si l'on connaît l'hypoténuse a et l'un des côtés b de l'angle droit, on trouve l'autre côté c par la formule

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad \text{d'où} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ainsi, pour $a = 5$ et $b = 3$, on a $c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.

Il résulte encore de la proposition précédente que *le rapport de la diagonale d'un carré au côté de ce carré est égal*

Fig. 162.



à $\sqrt{2}$. La diagonale AC est en effet l'hypoténuse d'un triangle rectangle et isocèle ABC (*fig.* 162), dans lequel on a

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2.\overline{AB}^2,$$

d'où

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{AC}{AB} = \sqrt{2}.$$

Ainsi, la diagonale et le côté d'un carré sont deux droites *incommensurables* entre elles, puisque leur rapport est un nombre incommensurable. C'est ce que nous avons déjà démontré par la Géométrie pure (139).

THÉORÈME.

226. *Dans tout triangle, le carré d'un côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres*

côtés, moins deux fois le produit de l'un de ces côtés par la projection du second sur le premier.

Fig. 163.

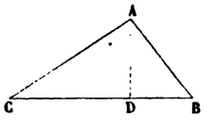
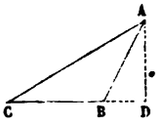


Fig. 163'



Soient ABC le triangle proposé, C un angle aigu et CD la projection du côté AC sur CB; il s'agit de démontrer la relation

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC.CD.$$

Deux cas peuvent se présenter, suivant que la perpendiculaire AD tombe à l'intérieur ou à l'extérieur du triangle ABC; le premier cas a lieu lorsque l'angle ABC est aigu, et le second lorsque cet angle est obtus (44).

Dans le premier cas (*fig.* 163), le triangle rectangle ABD donne

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2. \qquad (1)$$

Or, puisque le point D est, par hypothèse, situé entre C et B, on a

$$BD = BC - CD,$$

et, par suite, d'après un théorème connu d'Arithmétique (1),

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2BC.CD.$$

En portant cette valeur de $\overline{BD}^2$ dans la relation (1), on trouve

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 - 2BC.CD;$$

et, comme le triangle rectangle ACD donne

$$\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2,$$

on a finalement

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2BC.CD.$$

(1) Le carré de la différence de deux nombres est égal au carré du premier nombre, plus le carré du second, moins le double produit de ces deux nombres.

Dans le second cas (*fig.* 163'), la démonstration est la même. Il est vrai que, au lieu de

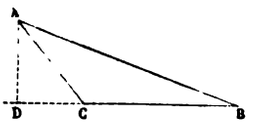
$$BD = BC - CD, \quad \text{on a} \quad BD = CD - BC;$$

mais comme, en vertu du théorème d'Arithmétique cité, le carré de BD reste le même, et que c'est ce carré seul qui figure dans la démonstration, on voit que tout le raisonnement subsiste.

THÉORÈME.

227. *Si l'un des angles d'un triangle est obtus, le carré du côté opposé à cet angle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, plus deux fois le produit de l'un de ces côtés par la projection du second sur le premier* (*fig.* 164).

Fig. 164



Soient ABC le triangle proposé, C l'angle obtus, et CD la projection de AC sur BC; il s'agit de démontrer la relation

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC.CD.$$

Le triangle rectangle ABD donne

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2. \qquad (1)$$

Or, puisque l'angle ACB est obtus, la perpendiculaire AD tombe hors du triangle (44'), et le point D est extérieur à BC; on a donc

$$BD = BC + CD,$$

et, par suite, en vertu d'un théorème connu d'Arithmétique (1),

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2BC.CD.$$

En substituant cette valeur de $\overline{BD}^2$ dans la relation (1), on trouve

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 + 2BC.CD;$$

(1) Le carré de la somme de deux nombres est égal au carré du premier, plus le carré du second, plus le double produit de ces deux nombres.

et, comme le triangle rectangle ACD donne

$$\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2,$$

on a finalement

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC.CD.$$

COROLLAIRES.

228. Il résulte des trois théorèmes précédents que, *dans un triangle, le carré d'un côté est inférieur, égal ou supérieur à la somme des carrés des deux autres, suivant que l'angle opposé à ce côté est aigu, droit ou obtus;* donc, réciproquement (7), *un angle d'un triangle est aigu, droit ou obtus, suivant que le carré du côté opposé à cet angle est inférieur, égal ou supérieur à la somme des carrés des deux autres côtés.*

Par exemple, si $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$, l'angle A est droit et le triangle est rectangle, puisque $25 = 16 + 9$. De même, si $a = 11$, $b = 9$, $c = 8$, l'angle A est aigu, puisque 11^2 ou 121 est moindre que $9^2 + 8^2$, c'est-à-dire que $81 + 64 = 145$.

229. Comme application des théorèmes qui précèdent, nous allons calculer les hauteurs d'un triangle en fonction des côtés. Nous désignerons par ABC le triangle considéré, et par a, b, c, les longueurs des côtés respectivement opposés aux angles A, B, C.

Cherchons la hauteur $AD = h$ issue du sommet A. Des deux angles B et C, l'un au moins est aigu; supposons que ce soit l'angle C (*fig.* 163').

On a d'abord, dans le triangle rectangle ADC (225),

$$h^2 = b^2 - \overline{CD}^2;$$

puis, dans le triangle ABC (226),

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a.CD.$$

On déduit de là

$$CD = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$

et la première relation devient

$$h^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2};$$

ou, en vertu d'un théorème d'Arithmétique (¹)

$$h^2 = \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4a^2}$$
$$= \frac{[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]}{4a^2}$$
$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2}.$$

Or, si l'on désigne par p le demi-périmètre du triangle ABC, c'est-à-dire si l'on pose

$$a + b + c = 2p,$$

on a

$$b + c - a = 2p - 2a = 2(p - a),$$
$$a + c - b = 2p - 2b = 2(p - b),$$
$$a + b - c = 2p - 2c = 2(p - c).$$

En portant ces valeurs dans l'expression de h^2, simplifiant et extrayant la racine carrée, on obtient

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

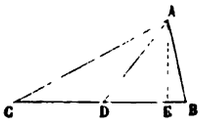
Exemple. Pour les hauteurs h, h', h'', du triangle dont les côtés sont 13, 9 et 6, on trouve, à 1 millième près,

$$h = 3{,}641, \quad h' = 5{,}259, \quad h'' = 7{,}886.$$

THÉORÈME.

230. ***La somme des carrés de deux côtés d'un triangle est égale à deux fois le carré de la médiane relative au troisième côté, plus deux fois le carré de la moitié de ce troisième côté*** (*fig.* 165).

Fig. 165.



Soient ABC le triangle proposé, AD la médiane relative au côté BC, et AE la perpendiculaire abaissée du point A sur BC.

(¹) La différence des carrés de deux nombres est égale au produit de la somme de ces deux nombres par leur différence.

L'angle ADB étant aigu, on a, dans le triangle ADB,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD.DE.$$

L'angle ADC étant obtus, on a, dans le triangle ACD,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + 2CD.DE.$$

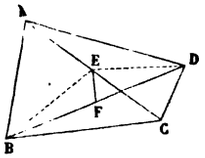
En ajoutant ces deux égalités et en observant que CD = BD, on trouve

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BD}^2. \quad (1)$$

COROLLAIRES.

231. Considérons un quadrilatère ABCD (*fig.* 166), et soient E et F les

Fig. 166.



milieux des deux diagonales AC et BD. En appliquant successivement le théorème qui précède aux triangles ABC et ADC, on a

$$AB + \overline{BC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2,$$
$$\overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{DE}^2;$$

d'où, en ajoutant et en désignant par S la somme des carrés des quatre côtés du quadrilatère,

$$S = 4\overline{AE}^2 + 2\left(\overline{BE}^2 + \overline{DE}^2\right).$$

Or, dans le triangle BED, on a

$$\overline{BE}^2 + \overline{DE}^2 = 2\overline{BF}^2 + 2\overline{EF}^2.$$

Donc, enfin,

$$S = 4\overline{AE}^2 + 4\overline{BF}^2 + 4\overline{EF}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{EF}^2.$$

Ainsi, *dans tout quadrilatère, la somme des carrés des quatre côtés est égale à la somme des carrés des deux diagonales, plus quatre fois le carré de la droite qui unit les milieux de ces diagonales.*

Pour que le quadrilatère soit un parallélogramme, il faut et il suffit que les points E et F coïncident (83, 84). Donc, *dans tout parallélo-*

gramme, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales, et réciproquement, *si la somme des carrés des côtés d'un quadrilatère est égale à la somme des carrés des deux diagonales, ce quadrilatère est un parallélogramme.*

232. Revenons au triangle ABC (*fig.* 165). Si, les points B et C restant fixes, le sommet A se déplace de manière que la somme des carrés des côtés AB et AC reste constante, la relation (1) du n° 230 montre que la valeur de la médiane AD restera constante. Donc, *le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux points fixes est constante est une circonférence ayant pour centre le milieu de la droite qui unit les deux points fixes.* D'ailleurs, pour trouver le rayon AD de ce cercle, il suffit de remplacer dans la relation (1) la somme $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ par la constante donnée K^2; on a ainsi successivement

$$K^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BD}^2, \quad \overline{AD}^2 = \frac{K^2}{2} - \overline{BD}^2, \quad AD = \sqrt{\frac{K^2}{2} - \overline{BD}^2}.$$

On voit que le lieu n'existe qu'autant que la condition

$$\frac{K^2}{2} > \overline{BD}^2 \quad \text{ou} \quad K > BD\sqrt{2}$$

est satisfaite.

233. Enfin, comme dernière application du théorème précédent, nous calculerons les médianes d'un triangle en fonction des côtés.

m étant la médiane relative au côté $BC = a$, on a, par la relation (1),

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad \text{d'où} \quad m = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Exemple. Pour les médianes m, m', m'', du triangle dont les côtés sont 13, 9 et 6, on obtient, à 1 millième près,

$$m = 4{,}031, \quad m' = 9{,}069, \quad m'' = 10{,}770.$$

THÉORÈME.

234. *La différence des carrés de deux côtés d'un triangle est égale au double produit du troisième côté par la projection de la médiane correspondante sur ce même côté.*

Soit ABC le triangle proposé (*fig.* 165); reprenons les deux égalités

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD.DE,$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + 2CD.DE,$$

considérées au n° 230, et retranchons la première de la seconde, en observant que BD = CD; il viendra

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = 4BD.DE \quad \text{ou} \quad \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = 2BC.DE.$$

COROLLAIRE.

235. Si, les points B et C restant fixes, le sommet A se déplace de façon que la différence $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$ reste constante, la relation précédente prouve que la projection DE de la médiane ne change pas, c'est-à-dire que la projection E du sommet mobile A sur la droite BC reste fixe. Donc, *le lieu des points* A, *dont la différence* $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$ *des carrés des distances à deux points fixes* C *et* B *est constante, est une droite perpendiculaire à la droite* BC *qui unit les deux points fixes.* D'ailleurs, pour avoir la valeur de DE, il suffit de remplacer dans la relation qui précède la différence $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$ par la constante donnée K^2; on a ainsi successivement

$$K^2 = 2BC.DE, \quad DE = \frac{K^2}{2BC}.$$

THÉORÈME.

236. *Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au produit des deux segments additifs que la bissectrice de leur angle détermine sur le troisième côté, augmenté du carré de cette bissectrice.*

En effet, soient (*fig.* 167) ABC le triangle proposé, ACEBE' le cercle circonscrit, et AD la bissectrice de l'angle BAC qui passe évidemment par

Fig. 167.

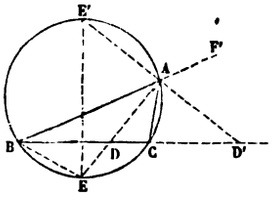
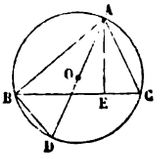


Fig. 168.



le milieu E de l'arc BC; les triangles ABE, ADC, ont deux angles égaux chacun à chacun, savoir : l'angle BAE égal à l'angle DAC, puisque la droite AE est, par hypothèse, bissectrice de l'angle BAC, et les angles BEA, DCA, égaux entre eux comme inscrits dans le même segment BECA.

Ces triangles sont donc semblables, et l'on a

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$$

ou (193)

$$AB.AC = AE.AD = (AD + DE)AD = \overline{AD}^2 + DA.DE = \overline{AD}^2 + DB.DC.$$

237. En considérant la bissectrice AD′ de l'angle extérieur CAF′, qui passe évidemment par le milieu E′ de l'arc BAC, on déduirait de la similitude des triangles ACD′, ABE′, la relation

$$AB.AC = AE'.AD',$$

qu'on transformerait ensuite dans la suivante :

$$AB.AC = D'B.D'C - \overline{AD'}^2.$$

Donc, *le produit de deux côtés d'un triangle est égal au produit des deux segments soustractifs que la bissectrice de leur angle extérieur détermine sur le troisième côté, diminué du carré de cette bissectrice.*

238. Ces théorèmes permettent de calculer les longueurs des bissectrices en fonction des côtés du triangle.

S'agit-il, par exemple, de la bissectrice $AD = \alpha$, il suffit de remplacer dans la relation

$$bc = \alpha^2 + DB.DC,$$

les segments DB et DC par leurs valeurs que l'on déduit (184) des équations

$$\frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{DB + DC}{b + c} = \frac{a}{b + c}.$$

On trouve ainsi, réductions faites, et en désignant par p le demi-périmètre du triangle,

$$\alpha = \frac{2}{b + c}\sqrt{bcp(p - a)}.$$

Un calcul analogue donnerait pour la bissectrice $AD' = \alpha'$ de l'angle extérieur

$$\alpha' = \frac{2}{c - b}\sqrt{bc(p - b)(p - c)}.$$

Exemple. Pour les bissectrices intérieures α, β, γ, et pour les bissectrices extérieures α', β', γ', du triangle dont les côtés sont 13, 6 et 9, on obtient à 1 millième près

$$\alpha = 3,833, \quad \beta = 7,778, \quad \gamma = 10,407,$$
$$\alpha' = 30,983, \quad \beta' = 7,137, \quad \gamma' = 12,093.$$

SCOLIE.

239. Voici une autre expression souvent utile du produit de deux côtés d'un triangle.

Le produit de deux côtés AB, AC, ***d'un triangle est égal au produit du diamètre*** AD ***du cercle circonscrit par la hauteur*** AE ***relative au troisième côté*** (*fig.* 168).

La relation à démontrer

$$AB.AC = AD.AE \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$$

résulte immédiatement de la similitude des deux triangles rectangles ABD, AEC, dont les angles aigus D et C sont égaux comme inscrits dans le même segment.

Ce théorème permet de calculer, en fonction des côtés du triangle, le rayon R du cercle circonscrit; il suffit pour cela de remplacer, dans l'égalité

$$bc = 2R.AE,$$

la hauteur AE par sa valeur donnée au n° 229; on trouve alors

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Pour $a = 13$, $b = 9$, $c = 6$, on a $R = 7,416$.

THÉORÈME.

240. ***Dans tout quadrilatère inscriptible convexe, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés, et réciproquement.***

En effet, considérons un quadrilatère convexe quelconque ABCD (*fig.* 169), et désignons respectivement par a, b, c, d,

Fig. 169.

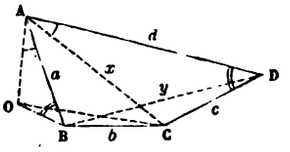
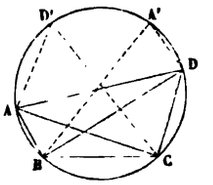


Fig. 170.



x, y les côtés AB, BC, CD, DA et les diagonales AC, BD; enfin, sur AB considéré comme homologue de AD, construisons, extérieurement au quadrilatère, un triangle ABO semblable à

ADC. Nous aurons d'abord

$$\frac{AO}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{OB}{CD}, \tag{1}$$

d'où

$$AO = \frac{ax}{d}, \quad OB = \frac{ac}{d}.$$

La première des proportions (1) et l'égalité évidente des angles OAC, BAD prouvent que les triangles OAC, BAD sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; on en conclut la relation

$$\frac{OC}{BD} = \frac{AC}{AD}, \quad \text{d'où} \quad OC = \frac{xy}{d}.$$

Ainsi, *les trois côtés du triangle* OBC ont respectivement pour valeurs

$$BC = b, \quad OB = \frac{ac}{d}, \quad OC = \frac{xy}{d},$$

et, par conséquent, *sont proportionnels* aux produits bd, ac, xy. Donc, comme OC est moindre que OB + BC, on voit que dans un quadrilatère convexe quelconque le produit xy des diagonales est inférieur à la somme $ac + bd$ des produits des côtés opposés. Pour qu'il soit égal à cette somme, il faut et il suffit que le côté BO soit le prolongement de CB, c'est-à-dire que l'angle ABO, et par suite son égal ADC, soit le supplément de ABC, ou enfin que le quadrilatère ABCD soit inscriptible.

Corollaires.

241. La démonstration qui précède suggère immédiatement le moyen de *construire un quadrilatère convexe inscriptible connaissant les longueurs a, b, c, d des côtés et leur ordre de succession.*

On portera *sur une même droite* à la suite l'une de l'autre des longueurs CB, BO respectivement égales à b et à $\frac{ac}{d}$; puis, on aura le sommet A par l'intersection du cercle décrit du point B pour centre avec a pour rayon et du cercle, lieu des

points dont les distances aux points O et C sont dans le rapport $\frac{AO}{AC} = \frac{a}{d}$. On connaîtra alors les trois côtés du triangle DAC, ce qui déterminera le point D.

Il y a deux points D; mais on choisira celui qui est, par rapport à AC, du côté opposé à B. De même, il y a deux points A; mais ils sont symétriques par rapport à BC; il suffira donc de prendre l'un d'eux, l'autre donnant le même quadrilatère placé symétriquement par rapport à BC. Il y a donc une solution unique.

242. Si l'ordre de succession des côtés n'était pas imposé, on trouverait trois quadrilatères distincts, suivant qu'on opposerait au côté b, le côté d, c ou a: à chacun de ces cas répondent, il est vrai, deux quadrilatères; mais ces deux quadrilatères sont égaux; ils ne diffèrent que par leur disposition symétrique par rapport à la perpendiculaire élevée sur le milieu du côté b.

Lorsqu'on a l'un ABCD (*fig.* 170) des trois quadrilatères, on obtient immédiatement les deux autres ABCD', BCDA', en prenant sur le cercle circonscrit au premier l'arc AD' égal à l'arc CD, et l'arc DA' égal à l'arc AB; les arcs BAD', CDA' étant égaux, leurs cordes BD', CA' sont égales, et, en désignant par z leur valeur commune, on voit que les trois quadrilatères ont respectivement pour diagonales x et y, x et z, y et z. Le théorème ci-dessus (240) appliqué à chacun d'eux donne

$$(2) \qquad xy = ac + bd, \quad xz = ad + bc, \quad yz = ab + cd.$$

En divisant les deux dernières équations membre à membre, on obtient

$$(3) \qquad \frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Donc : *Dans tout quadrilatère inscriptible convexe, les diagonales sont entre elles comme les sommes des produits des côtés qui aboutissent à leurs extrémités.*

La réciproque de cette proposition est vraie : en d'autres termes, si les diagonales et les côtés d'un quadrilatère convexe ABCD satisfont à la relation (3), le quadrilatère est inscriptible. En effet, soient x_1 et y_1 les diagonales du quadrilatère inscriptible

$A_1B_1C_1D_1$ qui a ses côtés égaux à ceux du quadrilatère ABCD et disposés dans le même ordre; en vertu du théorème direct, le rapport $\frac{x_1}{y_1}$ sera égal au second membre de la relation (3); on aura donc

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x}{y}; \tag{4}$$

or, si l'on avait $x_1 > x$, il en résulterait $B_1 > B$ et $D_1 > D$; d'ailleurs, on aurait aussi, en vertu de (4), $y_1 > y$, et, par conséquent, $A_1 > A$ et $C_1 > C$; la somme des angles du quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ l'emporterait donc sur celle des angles du quadrilatère ABCD, ce qui est absurde. On prouverait de même qu'on ne peut avoir $x_1 < x$; donc il y a égalité entre les diagonales x et x_1, et, par suite, entre les quadrilatères ABCD, $A_1B_1C_1D_1$; le quadrilatère ABCD est donc inscriptible.

Indiquons enfin les valeurs des trois diagonales en fonction des côtés :

$$x^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}, \quad y^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc},$$
$$z^2 = \frac{(ab + cd)(ad + bc)}{ac + bd};$$

on les obtient en divisant le produit des trois équations (2) successivement par le carré de chacune d'elles.

Scolie.

243. Le théorème du n° **240** est attribué à Ptolémée qui, dans son *Almageste*, l'a donné comme lemme pour la construction d'une table de cordes. Il offre, en effet, le moyen de calculer la corde u de la somme de deux arcs en fonction des cordes c et c' de ces arcs et du diamètre δ du cercle; les deux cordes et le diamètre qui passe par leur point commun forment deux côtés contigus et une diagonale d'un quadrilatère inscrit dont l'autre diagonale est la corde inconnue u, tandis que les deux autres côtés sont égaux à $\sqrt{\delta^2 - c^2}$, $\sqrt{\delta^2 - c'^2}$; de là, en vertu du théorème de Ptolémée, la relation

$$\delta u = c\sqrt{\delta^2 - c'^2} + c'\sqrt{\delta^2 - c^2},$$

qui permet de calculer u.

§ V. — PROBLÈMES RELATIFS AUX LIGNES PROPORTIONNELLES.

244. *Diviser une droite* **A** *en parties proportionnelles à des droites données* **M, N, P,** *ou en un certain nombre de parties égales.*

Après avoir tracé un angle CBD de grandeur convenable (*fig.* 171), prenez sur le côté BC une longueur BE égale à A, et sur le côté BD des longueurs BF, FG, GH, respectivement

Fig. 171.

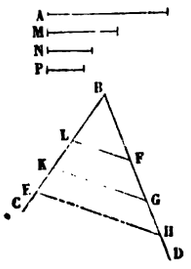
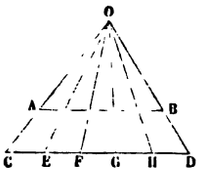


Fig. 172.



égales à M, N, P. Tirez HE, et menez FL, GK, parallèles à HE. La droite BE ou A sera ainsi divisée aux points L et K en parties proportionnelles à M, N, P. On a, en effet (181),

$$\frac{BL}{BF} = \frac{LK}{FG} = \frac{KE}{GH} \quad \text{ou} \quad \frac{BL}{M} = \frac{LK}{N} = \frac{KE}{P}.$$

Si l'on devait partager A proportionnellement à des nombres donnés m, n, p, on représenterait ces nombres par des droites M, N, P, en adoptant une certaine longueur comme unité, et l'on retomberait sur la question précédente.

245. Enfin, le procédé graphique que nous venons d'indiquer permet aussi de diviser une droite A en parties égales; il suffit évidemment de supposer M, N, P, quelconques, mais égales entre elles; ce qui revient à porter sur BD des longueurs BF, FG, GH, égales entre elles, et à mener par F et G des parallèles à HE.

Lorsqu'on a plusieurs droites à diviser en un même nombre de parties égales, on préfère employer le tracé suivant :

5 étant, par exemple, le nombre des parties égales, tirez une

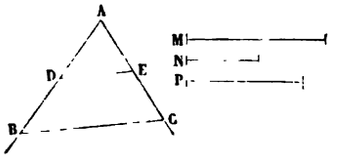
droite indéfinie CD (*fig.* 172) sur laquelle vous porterez cinq fois une même ouverture de compas $CE = EF = FG = GH = HD$. Des extrémités C et D comme centres, avec CD pour rayon, décrivez successivement deux arcs de cercle qui se couperont en un point O, et menez OC, OE, OF, OG, OH, OD. Cela étant, prenez OA et OB égales à l'une des droites que vous voulez diviser, et tirez AB; cette droite AB sera égale à la droite proposée, puisque le triangle OCD étant équilatéral, le triangle OAB qui lui est semblable doit l'être aussi, et de plus AB sera divisée (213), par les sécantes issues du point O, en cinq parties proportionnelles aux parties de CD, c'est-à-dire égales entre elles.

PROBLÈME.

246. *Trouver la quatrième proportionnelle à trois droites données* M, N, P.

Après avoir tracé un angle BAC de grandeur convenable, prenez (*fig.* 173) sur le côté AB des longueurs AB et AD res-

Fig. 173.



pectivement égales à M et à N, et sur le côté AC une longueur AC égale à P; tirez BC et menez DE parallèle à BC; AE sera la quatrième proportionnelle cherchée. On a, en effet (182),

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \text{ou} \quad \frac{M}{N} = \frac{P}{AE}.$$

Scolies.

247. Si les droites N et P étaient égales, AE serait la troisième proportionnelle à M et à N.

PROBLÈME.

248. *Construire la moyenne proportionnelle entre deux droites données* A *et* B.

1° Prenez, à la suite l'une de l'autre (*fig.* 174), sur une droite indéfinie, deux longueurs CD et DE respectivement égales à A et à B. Sur CE, comme diamètre, décrivez une circonférence, et par le point D élevez DF perpendiculaire à CE. La droite DF sera (223) la moyenne proportionnelle entre CD et DE, c'est-à-dire entre A et B.

2° Lorsque les droites données A et B sont un peu grandes, on préfère le procédé suivant : prenez sur une droite indé-

Fig. 174.

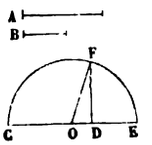
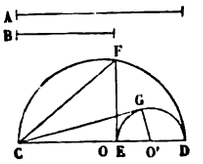


Fig. 175.



finie (*fig.* 175), et à partir du même point C, deux longueurs CD et CE respectivement égales à A et à B; sur CD, comme diamètre, décrivez une circonférence, et élevez EF perpendiculaire à CD; enfin tirez FC. La corde FC sera (223) la moyenne proportionnelle entre CD et CE, c'est-à-dire entre A et B.

3° On pourrait aussi, après avoir pris CD et CE égales à A et à B (*fig.* 175), décrire une circonférence quelconque passant par E et D, par exemple la circonférence dont ED est le diamètre, puis mener la tangente CG à cette circonférence. Cette tangente (195) serait la moyenne proportionnelle entre CD et CE, c'est-à-dire entre A et B. Toutefois, au point de vue graphique, ce procédé est inférieur au précédent, et il convient de ne l'employer que lorsqu'on veut relier la construction à une autre figure qui contient déjà plusieurs des lignes dont ce procédé exige le tracé.

Scolie.

249. La moyenne proportionnelle entre deux longueurs prend souvent le nom de *moyenne géométrique*, tandis qu'on appelle *moyenne arithmétique* de ces deux longueurs leur demi-somme.

Les trois côtés du triangle rectangle CGO' (*fig.* 175) représentent respectivement : CG la moyenne géométrique des deux

droites A et B, CO′ leur moyenne arithmétique et GO′ leur demi-différence. Comme le côté CG est moindre que l'hypoténuse CO′, on voit que *la moyenne géométrique est moindre que la moyenne arithmétique*. Appelons δ leur différence; le triangle O′CG donne

$$\overline{O'G}^2 = \overline{CO'}^2 - \overline{CG}^2 = (CO' + CG)(CO' - CG);$$

or, les moyennes CO′ et CG sont toutes deux supérieures à la plus petite B des deux lignes proposées; on a donc

$$\left(\frac{A-B}{2}\right)^2 > 2B.\delta, \quad \text{d'où} \quad \delta < \frac{(A-B)^2}{8B}.$$

Ainsi, *la différence entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de deux longueurs* A *et* B *est moindre que le carré de la différence de ces longueurs, divisé par huit fois la plus petite.*

250. Pour mettre en équation un problème de Géométrie, il suffit de concevoir que toutes les longueurs soient rapportées à une même unité, sans qu'il soit besoin de fixer cette unité commune, qu'on laisse, au contraire, indéterminée. Les raisonnements étant indépendants du choix de cette unité, c'est-à-dire de l'échelle à laquelle a été construite la figure que l'on a sous les yeux, si les raisonnements et les calculs sont justes, l'équation à laquelle on parvient doit pouvoir supporter, sans altération, un changement dans un même rapport de toutes les données linéaires, les données angulaires restant les mêmes. En d'autres termes, l'équation doit être *homogène*, c'est-à-dire telle qu'en y multipliant par un même nombre chaque lettre exprimant la mesure d'une longueur, ce nombre disparaisse de lui-même

Si l'inconnue est une longueur, la formule qui exprime sa mesure doit donc *être homogène et du premier degré;* construire cette formule, c'est trouver la longueur inconnue par des opérations graphiques exécutées sur les longueurs dont les mesures entrent dans la formule. Nous allons montrer qu'*on peut construire, à l'aide de la règle et du compas, toute expres-*

sion rationnelle ou ne renfermant d'autres irrationnelles que des radicaux ayant une puissance de 2 pour indice.

Pour plus de clarté, nous représenterons les longueurs par des lettres majuscules et les nombres qui les mesurent par les lettres minuscules correspondantes.

1° Si la formule est de la forme

$$x = a + b - c + d - e,$$

on portera, à l'aide du compas, à partir d'un point O, sur une droite fixe, les unes à la suite des autres, d'abord les longueurs A et B dans un même sens, puis C en sens contraire, D dans le sens primitif, enfin E en sens contraire; M étant l'extrémité de cette dernière, la longueur OM sera la longueur inconnue X.

2° S'il s'agit d'un monôme fractionnaire

$$\mathrm{X} = \frac{a_0 a_1 a_2 a_3}{b_1 b_2 b_3}$$

(le nombre des facteurs du numérateur surpassant d'une unité celui du dénominateur), on écrira

$$\frac{c}{a_0} = \frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{c_1}{c} = \frac{a_2}{b_2}, \quad \frac{x}{c_1} = \frac{a_3}{b_3},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}_0} = \frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{B}_1}, \quad \frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{B}_2}, \quad \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{C}_1} = \frac{\mathrm{A}_3}{\mathrm{B}_3},$$

en sorte que X s'obtiendra en construisant une suite C, C_1, X de quatrièmes proportionnelles.

3° Le procédé précédent ne suppose pas qu'au numérateur, comme au dénominateur, les facteurs soient inégaux. Il résulte de là que, p étant un monôme quelconque de degré k et u la mesure d'une longueur U donnée, on peut toujours construire une longueur A, telle que

$$a = \frac{p}{u^{k-1}}, \quad \text{ou} \quad p = u^{k-1}.a.$$

Cela posé, soit une fonction rationnelle quelconque (homogène et du premier degré)

$$x = \frac{p_0 + p_1 - p_2 + p_3}{q_0 - q_1 + q_2},$$

p_0, p_1, p_2, p_3 désignant des monômes de degré quelconque k, et q_0, q_1, q_2 des monômes de degré $k-1$. U étant une longueur prise à volonté, on construira d'abord des longueurs $A_0, A_1, A_2, A_3, B_0, B_1, B_2$, telles que l'on ait

$$p_0 = u^{k-1}.a_0, \quad p_1 = u^{k-1}.a_1, \quad p_2 = u^{k-1}.a_2, \quad p_3 = u^{k-1}.a_3,$$
$$q_0 = u^{k-2}.b_0, \quad q_1 = u^{k-2}.b_1, \quad q_2 = u^{k-2}.b_2;$$

on aura alors

$$x = \frac{u^{k-1}(a_0 + a_1 - a_2 + a_3)}{u^{k-2}(b_0 - b_1 + b_2)} = u \cdot \frac{a_0 + a_1 - a_2 + a_3}{b_0 - b_1 + b_2},$$

et enfin, en désignant par S et T les longueurs

$$S = A_0 + A_1 - A_2 + A_3, \quad T = B_0 - B_1 + B_2,$$

il viendra

$$\frac{X}{U} = \frac{S}{T},$$

en sorte que X s'obtiendra par une quatrième proportionnelle à T, S et U.

4° Considérons maintenant les expressions irrationnelles.

Soit le radical du second degré

$$x = \sqrt{\frac{p}{q}},$$

où p et q désignent des expressions entières et homogènes l'une de degré k, l'autre de degré $k-2$. U étant une longueur prise à volonté, on construira d'abord deux longueurs A et B telles que l'on ait

$$p = u^{k-1}.a, \quad q = u^{k-3}.b.$$

On aura dès lors

$$x = \sqrt{\frac{u^2 a}{b}} = \sqrt{u \cdot \frac{u.a}{b}}.$$

X sera donc la moyenne proportionnelle entre U et une longueur L quatrième proportionnelle à B, A et U.

Si l'indice du radical était une puissance de 2 supérieure à la première, la quantité sous le radical étant une fonction rationnelle et homogène de même degré que cet indice, on

remplacerait ce radical par une suite de radicaux du second degré superposés. Soit, par exemple,

$$x = \sqrt[4]{a^4 - b^4};$$

on déterminera, au moyen de quatrièmes proportionnelles successives, une longueur C, telle que

$$a^4 = b^3 . c;$$

on aura alors

$$x = \sqrt[4]{b^3(c-b)} = \sqrt{b\sqrt{b(c-b)}},$$

et X s'obtiendra en construisant deux moyennes proportionnelles successives.

251. On peut avoir à construire une formule non homogène provenant de ce que l'on prend l'une A des lignes de la figure pour unité ; il faut alors commencer par *rétablir l'homogénéité ;* c'est-à-dire par chercher la formule qui remplacerait la proposée, si l'on avait laissé l'unité arbitraire.

Or, soit a le nombre qui mesurerait la longueur A (prise d'abord pour unité) si l'on adoptait une autre unité U d'ailleurs arbitraire. Soient $b, c, \ldots$, les mesures des autres longueurs B, C, ..., l'unité étant A, et $b', c', \ldots$, leurs nouvelles mesures, l'unité étant U. Puisque le rapport de deux grandeurs est toujours égal au quotient des deux mesures quelle que soit l'unité commune, on a

$$b = \frac{b'}{a}, \quad c = \frac{c'}{a}, \quad \ldots.$$

Il suffira donc de remplacer, dans la formule donnée, $b, c, \ldots$. par ces valeurs, ou plus rapidement, en supprimant les accents, de remplacer $b, c, \ldots$, par $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \ldots$.

Par exemple, si l'on donne la formule

$$x = \sqrt[4]{1 - b^4},$$

on la remplacera par la suivante :

$$\frac{x}{a}=\sqrt[4]{1-\left(\frac{b}{a}\right)^4} \quad \text{ou} \quad x=\sqrt[4]{a^4-b^4}$$

que nous avons construite ci-dessus.

Soit encore à construire

$$x=\sqrt{7+\sqrt{3}},$$

étant donnée la longueur A qui a été prise pour unité; on la remplacera par

$$\frac{x}{a}=\sqrt{7+\sqrt{3}},$$

d'où

$$x=\sqrt{7a^2+a\sqrt{3a^2}}=\sqrt{a(7a+\sqrt{3a^2})},$$

et en désignant par B la moyenne proportionnelle entre A et 3A,

$$x=\sqrt{a(7a+b)};$$

X sera donc la moyenne proportionnelle entre A et la longueur $S=7A+B$ qui s'obtient par addition.

PROBLÈME.

252. *Construire sur une droite donnée :* 1° *un triangle semblable à un triangle donné;* 2° *un polygone semblable à un polygone donné* (*fig.* 177).

Fig. 177.

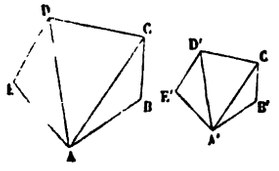
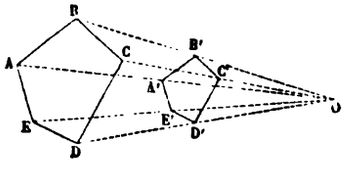


Fig. 178.



1° Pour construire, sur la droite A'B' considérée comme l'homologue de AB, un triangle semblable au triangle ABC, faites un angle B'A'C' égal à l'angle BAC, et un angle A'B'C' égal à l'angle ABC. Le triangle A'B'C' ainsi obtenu et le triangle donné ABC seront semblables comme ayant deux angles égaux chacun à chacun (200).

2° Pour construire, sur la droite A'B' considérée comme l'homologue de AB, un polygone semblable au polygone ABCDE, décomposez ce dernier polygone en triangles, en menant par l'un des sommets A les diagonales AC, AD. Construisez alors sur A'B' un triangle A'B'C' semblable au triangle ABC, puis sur A'C' un triangle A'C'D' semblable au triangle ACD, enfin sur A'D' un triangle A'D'E' semblable au triangle ADE. Le polygone A'B'C'D'E' ainsi obtenu et le polygone donné ABCDE seront semblables comme composés d'un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés.

La similitude de chaque couple de triangles exigeant deux conditions, on voit que la *similitude de deux polygones de n côtés exige* $2(n-2)$ *ou* $2n-4$ *conditions; leur égalité en exige* $2n-3$, c'est-à-dire une de plus; et, en effet, deux polygones égaux sont deux polygones semblables dont le rapport de similitude est égal à l'unité.

253. Si, au lieu de donner un côté A'B' du polygone demandé, on donnait le rapport de similitude $\frac{m}{n}$, on pourrait encore appliquer la solution précédente, en construisant préalablement une droite A'B' dont le rapport à AB fût égal à $\frac{m}{n}$ (246). Dans ce cas, on préfère souvent opérer de la manière suivante :

On joint (*fig.* 178) les divers sommets du polygone donné ABCDE à un point O choisi arbitrairement dans le plan de ce polygone; on prend sur OA une longueur OA' dont le rapport à OA soit égal à $\frac{m}{n}$; puis on mène dans l'angle AOB la parallèle A'B' à AB, dans l'angle BOC la parallèle B'C' à BC, ..., et

ainsi de suite. Les polygones A′B′C′D′E′, ABCDE, sont semblables, car (210) les triangles additifs OB′A′, OA′E′, OE′D′, et les triangles soustractifs OB′C′, OC′D′, dont la réunion constitue le polygone A′B′C′D′E′, sont respectivement semblables aux triangles OBA, OAE, OED, et aux triangles OBC, OCD, qui forment par leur assemblage le polygone ABCDE.

PROBLÈME.

254. ***Construire deux droites, connaissant leur somme et leur produit*** (*fig.* 179).

Soient BC la somme donnée et A une droite dont le carré est égal au produit donné. Supposons le problème résolu, et soient BF et FC les deux droites demandées; si sur BC comme diamètre on décrit un demi-cercle, la perpendiculaire FE sera moyenne proportionnelle entre BF et FC (223), et par suite égale à A; la parallèle menée par E à BC interceptera donc une

Fig 179.

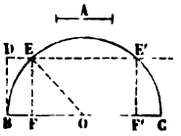
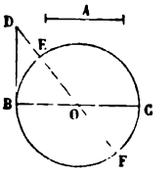


Fig. 180.



longueur BD égale à A sur la tangente en B. De cette analyse, résulte la construction suivante :

Sur BC comme diamètre, décrivez un demi-cercle; au point B, élevez BD perpendiculaire sur BC et égale à A, menez DEE′ parallèle à BC, et projetez en F et en F′ sur BC les points E et E′ où cette parallèle rencontre le cercle. Les deux droites cherchées seront BF et FC, ou, ce qui revient au même, BF′ et F′C.

Ainsi, le problème, quand il est possible, n'a qu'une solution. Pour qu'il soit possible, il faut et il suffit que la parallèle DEE′ rencontre la demi-circonférence, c'est-à-dire que la droite BD ou A ne surpasse pas le rayon OE ou la moitié de BC. Lorsque la quantité A atteint sa valeur maximum $\frac{1}{2}$BC, la parallèle DEE′ est tangente au demi-cercle, et les deux segments

de BC sont OB et OC. On voit par là que *le produit de deux droites, dont la somme est constante, est maximum lorsque ces droites sont égales entre elles.*

SCOLIE.

256. En représentant par p et q la somme et le produit donnés, on a

$$EO = BO = CO = \frac{p}{2}; \quad FE = BD = \sqrt{q},$$

$$OF = \sqrt{\overline{EO}^2 - \overline{EF}^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

et, par suite,

$$BF = BO - OF = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$CF = CO + OF = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

PROBLÈME.

256. *Construire deux droites, connaissant leur différence et leur produit* (*fig.* 180).

Soient EF la différence donnée, et A la droite dont le carré est égal au produit donné. Supposons le problème résolu et soient DE et DF les deux droites demandées. La tangente DB, menée du point D au cercle décrit sur EF comme diamètre, sera moyenne proportionnelle entre DE et DF (195), et par suite égale à A. Et, comme cette tangente est perpendiculaire sur le diamètre BC qui est égal à la différence donnée EF, on est conduit à la construction suivante :

Sur les côtés d'un angle droit, prenez une longueur BD égale à A et une longueur BO égale à la moitié de la différence donnée; du point O comme centre avec OB pour rayon, décrivez un cercle; puis menez DO qui coupe la circonférence aux points E et F; DE et DF seront les droites demandées.

Le problème est toujours possible et n'a qu'une solution.

SCOLIE.

257. En représentant par p et q la différence et le produit

donnés, on a

$$OE = OF = OB = \frac{p}{2},\quad BD = \sqrt{q},\quad OD = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

et, par suite,

$$DE = OD - OE = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{p}{2},$$

$$DF = OD + OF = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} + \frac{p}{2}.$$

258. Les deux problèmes précédents permettent de construire les racines de toute équation du second degré à une inconnue, c'est-à-dire de toute équation de la forme

$$x^2 \pm px \pm q = 0,$$

p **et** q **étant des nombres positifs quelconques.**

En effet, des quatre types

$$x^2 + px + q = 0,$$
$$x^2 - px + q = 0,$$
$$x^2 + px - q = 0,$$
$$x^2 - px - q = 0,$$

le premier se ramène au second, et le troisième au dernier, par le seul changement de x **en** $-x$**. Il suffit donc de construire les racines des équations**

$$x^2 - px + q = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - px - q = 0.$$

En mettant ces équations sous la forme

$$q = x(p - x),\quad q = x(x - p),$$

on voit que, construire les racines de la première, c'est construire deux droites dont la somme est p **et le produit** q**. De même, construire les racines de la seconde, c'est construire deux droites dont la différence est** p **et le produit** q**.**

L'équation bicarrée

$$x^4 + px^2 + q = 0$$

se ramène à l'équation du second degré

$$z^2 + \frac{p}{c} z + \frac{q}{c^2} = 0,$$

en désignant par C une longueur prise à volonté dont la mesure est c**, et en posant**

$$x^2 = cz.$$

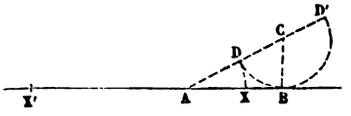
On construira donc les longueurs Z′ et Z″ qui ont pour mesures les racines de cette équation du second degré, puis on aura les valeurs de x par des moyennes proportionnelles entre C et chacune des longueurs Z′ et Z″.

PROBLÈME.

259. *Diviser une droite en moyenne et extrême raison* (*fig.* 181).

On dit qu'un point divise une droite AB *en moyenne et extrême raison,* lorsque sa distance à l'une des extrémités A

Fig. 181.



de cette droite est moyenne proportionnelle entre sa distance à l'autre extrémité B et la droite AB.

On voit *a priori :*

1° Que, entre A et B, il existe un point X, et un seul, jouissant de la propriété énoncée. Car, de A en B, le rapport $\frac{AB}{XA}$ décroît d'une manière continue de l'infini à 1, tandis que le rapport $\frac{XA}{XB}$ croît de zéro à l'infini; ainsi, quand le point X se meut de A en B, le premier rapport diminue, le second augmente, et comme le premier, d'abord supérieur au second, finit par devenir moindre, il y a entre A et B une position de X, et une seule, pour laquelle on a

$$(1) \qquad \frac{AB}{XA} = \frac{XA}{XB} \quad \text{ou} \quad \overline{XA}^2 = AB.XB.$$

2° Que, sur le prolongement de AB à gauche du point A, il existe un point X′, et un seul, jouissant de la propriété énoncée. Car, dans cette région, le rapport $\frac{AB}{X'A}$ croît d'une manière continue de zéro à l'infini, tandis que le rapport $\frac{X'A}{X'B}$ décroît de 1 à zéro; il y a donc à gauche de A une position

de X′, et une seule, pour laquelle on a

$$(2) \qquad \frac{AB}{X'A} = \frac{X'A}{X'B} \quad \text{ou} \quad \overline{X'A}^2 = AB.X'B.$$

3° Que sur le prolongement de AB à droite du point B, il ne peut exister aucun point jouissant de la propriété énoncée. Car la distance d'un point de cette région au point A, étant à la fois plus grande que la distance du point considéré au point B et que la ligne AB, ne saurait être moyenne proportionnelle entre ces deux longueurs.

Ainsi, sur la droite indéfinie qui unit les points A et B, il existe deux points X et X′, et rien que deux, qui divisent la droite AB en moyenne et extrême raison : l'un X *intérieur*, et les deux segments correspondants XA, XB, sont alors *additifs;* l'autre X′ *extérieur*, et les deux segments correspondants X′A, X′B, sont alors *soustractifs*.

Pour déterminer ces deux points X et X′, il suffit de trouver AX et AX′. Or, d'une part, si l'on retranche la relation (1) de la relation (2), on a

$$\overline{X'A}^2 - \overline{XA}^2 = AB(X'B - XB),$$

ou

$$(X'A + XA)(X'A - XA) = AB(X'B - XB),$$

c'est-à-dire

$$XX'(X'A - XA) = AB.XX',$$

et, par suite,

$$X'A - XA = AB.$$

D'autre part, la relation (1) donne

$$\frac{AB + XA}{AB} = \frac{XA + XB}{XA} \quad \text{ou} \quad \frac{X'A}{AB} = \frac{AB}{XA},$$

c'est-à-dire

$$X'A.XA = \overline{AB}^2.$$

Donc, la recherche des droites AX et AX′ revient à construire deux lignes dont la différence est égale à AB et dont le produit est égal à $\overline{AB}^2$; c'est le problème du n° 256 dans un cas particulier. De là, cette construction :

Élevez sur AB, à son extrémité B, une perpendiculaire BC

égale à la moitié de AB. Du point C comme centre, avec CB pour rayon, décrivez une circonférence; menez AC qui coupe cette circonférence en D et en D′; la droite AD sera l'inconnue AX, et la droite AD′ sera l'inconnue AX′. Deux arcs de cercle décrits de A comme centre, avec AD et AD′ pour rayons, couperont la droite indéfinie AB aux points cherchés X et X′.

En désignant par a la droite AB, et en remplaçant dans les formules du n° 257 p par a et q par a^2, on trouve

$$AX = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1), \quad AX' = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Il est bon de remarquer qu'on a, d'après cela,

$$BX = \frac{a}{2}(3-\sqrt{5}), \quad BX' = \frac{a}{2}(3+\sqrt{5}),$$

PROBLÈME.

260. *Mener une tangente commune à deux cercles* (*fig.* 182). Nous avons déjà résolu ce problème au n° **163**. Nous allons suivre ici une autre marche, utile à signaler.

Soient les deux cercles C et C′ de rayons R et R′, et supposons, pour fixer les idées, $R > R'$. AA′ étant une tangente commune extérieure qui coupe la ligne des centres en O, au delà de CC′, les rayons CA, C′A′, sont parallèles et de même sens, et l'on a

$$\frac{OC}{OC'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{R}{R'}. \tag{1}$$

Or, toute droite MM′ qui unit les extrémités de deux rayons parallèles et de même sens CM et C′M′, coupe également la ligne des centres en un point O_1 situé au delà de CC′, et tel que

$$\frac{O_1C}{O_1C'} = \frac{CM}{C'M'} = \frac{R}{R'}.$$

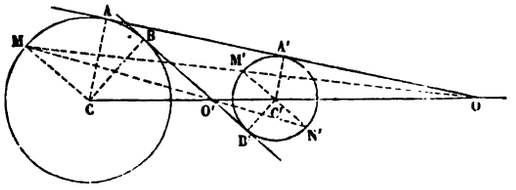
Les deux points O et O_1 se confondent donc (**179**).

De même, BB′ étant une tangente commune intérieure qui coupe la ligne des centres en O′ entre C et C′, les rayons CB, C′B′, sont parallèles et de sens contraires, et l'on a

$$\frac{O'C}{O'C'} = \frac{CB}{C'B'} = \frac{R}{R'}. \qquad (2)$$

Or, toute droite MN′ qui unit les extrémités de deux rayons parallèles et de sens contraires CM, C′N′, coupe également

Fig. 182.



la ligne des centres en un point O'_1 situé entre C et C′, et tel que

$$\frac{O'_1C}{O'_1C'} = \frac{CM}{C'N'} = \frac{R}{R'}.$$

Les deux points O′ et O'_1 se confondent donc (179).

De là, résulte la construction suivante : Menez dans le premier cercle un rayon quelconque CM, et dans le second le diamètre M′N′ parallèle à CM; tirez MM′ et MN′, et des points O et O′, où ces droites coupent la ligne des centres, menez des tangentes à l'un des cercles; elles toucheront également l'autre cercle.

Les deux points O et O′ divisent harmoniquement la droite des centres CC′ (180).

Il y aura deux tangentes communes extérieures, tant que le point O sera situé hors du cercle C. La relation (1), mise sous la forme

$$\frac{OC}{OC - OC'} = \frac{R}{R - R'}$$

ou

$$OC = \frac{CC'}{R - R'} \cdot R,$$

montre que, pour que OC soit plus grand que R, il faut et il suffit que la distance CC′ des centres soit plus grande que la différence R — R′ des rayons, c'est-à-dire que les deux cercles ne soient ni intérieurs l'un à l'autre, ni tangents intérieurement. Quand les deux cercles sont tangents intérieurement, on a CC′ = R — R′; par suite OC = R, et le point O n'est autre que le point de contact des deux cercles; il n'y a alors qu'une tangente commune extérieure.

De même, pour qu'il y ait deux tangentes communes intérieures, il faut que le point O′ soit extérieur au cercle C. La relation (2), mise sous la forme

$$\frac{O'C}{O'C + O'C'} = \frac{R}{R + R'}$$

ou

$$O'C = \frac{CC'}{R + R'} \cdot R,$$

montre que, pour que O′C soit plus grand que R, il faut et il suffit que la distance CC′ des centres soit plus grande que la somme R + R′ des rayons, c'est-à-dire que les deux cercles soient extérieurs l'un à l'autre. Quand les deux cercles sont tangents extérieurement, on a CC′ = R + R′, par suite O′C = R, et le point O′ n'est autre que le point de contact des deux cercles; il n'y a dans ce cas qu'une tangente commune intérieure.

Nous avons supposé les deux cercles inégaux. Si l'on avait R = R′, les formules précédentes deviendraient

$$OC = R.\frac{CC'}{0} = \infty, \quad O'C = \frac{CC'}{2}.$$

Le point O s'éloignant indéfiniment sur la ligne des centres, les tangentes communes extérieures seraient parallèles à cette ligne; et quant aux tangentes communes intérieures, elles se couperaient au milieu de la ligne des centres.

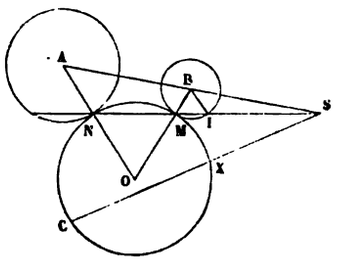
261. On nomme *centres de similitude* de deux cercles les

deux points O et O′ (*fig.* 182) qui divisent la ligne des centres C et C′ dans le rapport des rayons.

Quand un cercle variable O (*fig.* 183) *reste tangent à deux cercles donnés* A *et* B, *la droite* MN *qui joint les deux points de contact passe par un centre de similitude* S *des cercles* A *et* B, *et la puissance de ce point* S *par rapport au cercle variable* O *reste constante.*

En effet, soit I le second point d'intersection de MN avec le cercle B. Les triangles NMO, BMI, étant isocèles, les

Fig. 183.



angles MNO, MIB, sont égaux entre eux comme étant respectivement égaux à deux angles opposés par le sommet M. Ces angles étant alternes-internes, il faut que les rayons AN et BI soient parallèles, et la droite MN passe alors (260) par un centre de similitude S des cercles A et B. On a d'ailleurs

$$SM.SN = SM.SI\,\frac{AN}{BI}.$$

Le second membre de cette égalité étant égal à la puissance du point S par rapport au cercle B (193), multipliée par le rapport des rayons des cercles A et B, est constant; il en est donc de même du premier membre, c'est-à-dire de la puissance du point S par rapport au cercle variable O.

Ce théorème et sa démonstration subsistent quand l'un des cercles donnés, A par exemple, est remplacé par une droite D. Seulement, le centre de similitude S est, dans ce cas, remplacé par l'une des extrémités du diamètre du cercle B qui est perpendiculaire à la droite D.

PROBLÈME.

262. *Décrire une circonférence passant par deux points donnés et tangente soit à une droite donnée, soit à un cercle donné.*

Fig. 183$_1$.

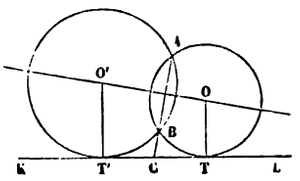
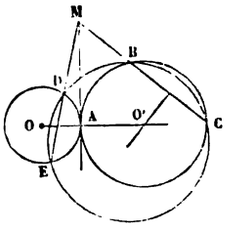


Fig. 183$_2$.



1° Soient A et B (*fig.* 183$_1$) les deux points donnés et KL la droite donnée. Prolongeons AB jusqu'au point C où elle rencontre KL. Si T est le point où le cercle inconnu O touche cette droite KL, CT sera la moyenne proportionnelle (195) entre les deux droites connues CB et CA. De là, cette construction :

Menez AB qui coupe KL en C; déterminez la moyenne proportionnelle entre CB et CA, et portez-la en CT sur la droite CL. Élevez la perpendiculaire TO sur KL et la perpendiculaire OO′ sur le milieu de AB; le point O commun à ces deux perpendiculaires sera le centre du cercle cherché.

En portant la moyenne proportionnelle en CT′ à gauche de C, on a une seconde solution.

Si AB était parallèle à KL, le point de contact serait sur la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB, et il n'y aurait qu'une solution.

Enfin, il est évident que le problème n'est possible que si les points A et B sont situés d'un même côté de la droite KL.

2° Soient B et C les deux points donnés et O la circonférence donnée (*fig.* 183$_2$). Supposons le problème résolu, et désignons par A le point où le cercle demandé O′ touche le cercle O; tout revient à trouver le point M où la tangente AM rencontre la droite BC prolongée. Or, si l'on mène par B et C une circonférence auxiliaire quelconque qui coupe la circon-

férence O en deux points D et E, la corde DE prolongée passera par M. En effet, désignons un moment par ε le point où la droite MD coupe la circonférence O; on aura

$$MD.M\varepsilon = \overline{MA}^2 = MB.MC.$$

Donc (194) le point ε est sur le cercle déterminé par les trois points C, B, D, c'est-à-dire sur la circonférence auxiliaire; il ne diffère donc pas de l'intersection E du cercle O et de cette circonférence auxiliaire. On déduit de cette analyse la construction suivante :

Par les deux points B et C, menez une circonférence quelconque qui coupe la circonférence donnée O en deux points D et E; et du point M, intersection de BC et de ED, menez une tangente MA au cercle O. Le point A sera le point de contact du cercle O et du cercle inconnu, dont le centre O′ se trouvera d'ailleurs à l'intersection de OA prolongée et de la perpendiculaire élevée sur le milieu de BC.

La seconde tangente menée de M au cercle donné O donnera une seconde solution.

Si les points B et C étaient équidistants du centre O, les droites BC et DE seraient parallèles; il suffirait alors de mener au cercle O une tangente parallèle à BC; il y aurait encore deux solutions.

Enfin, pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que M soit extérieur au cercle O, c'est-à-dire tombe sur les prolongements de la corde DE, et non entre D et E. Or, la corde DE décompose la circonférence auxiliaire DBCE en deux arcs a et a', dont l'un est intérieur et l'autre extérieur au cercle O. Pour que M ne soit pas situé entre D et E, il faut et il suffit que B et C ne soient pas, l'un sur l'arc a et l'autre sur l'arc a', mais bien tous deux sur l'arc a ou tous deux sur l'arc a', c'est-à-dire que B et C soient tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs au cercle O.

Scolie.

263. La détermination d'un cercle O astreint à trois conditions prises parmi celles qui consistent à passer par un point donné, ou à toucher une droite ou un cercle donné, répond à dix problèmes qu'on peut dé-

signer par les symboles

PPP (1 sol.),	PDD (2 sol.),	DDC (8 sol.),
DDD (4 sol.),	PCD (4 sol.),	DCC (8 sol.),
PPD (2 sol.),	PCC (4 sol.),	CCC (8 sol.),
PPC (2 sol.),		

en représentant un point par P, une droite par D, un cercle par C. Nous avons indiqué, à côté de chaque symbole, le nombre des solutions dont le problème correspondant est susceptible.

La résolution de ces dix problèmes offre un exemple remarquable de la méthode des substitutions successives.

Les problèmes de la première colonne ont été déjà résolus (154, 161, 262); on a vu d'ailleurs (262) que les deux derniers se ramenaient au premier PPP. — Indiquons ici, en passant, une nouvelle solution du problème PPD, qui n'exige que la connaissance du Livre II. — P et P′ désignant les deux points donnés, et P_1 le symétrique de P′ par rapport à la droite donnée D, il est aisé de constater que la droite PP_1 est vue des deux points de contact cherchés sous des angles qui sont respectivement égaux aux angles des deux droites D et PP′. Il suffit donc, pour avoir ces points de contact, de décrire sur PP_1 un segment capable de l'un de ces angles, et de marquer les intersections de la droite D et du cercle ainsi obtenu.

Le premier problème PDD de la deuxième colonne se ramène à PPD, en observant que la circonférence cherchée doit contenir le symétrique du point donné par rapport à la bissectrice de l'angle que forment les droites données et qui renferme le point donné. — Le problème PCC se ramène à PPC; car on connaît (261) le centre de similitude S des deux cercles donnés et la puissance de ce point par rapport au cercle cherché O. On peut donc déterminer le second point d'intersection de la droite PS et du cercle inconnu O. — Le problème PCD se ramène de la même manière (261) à PPD ou à PPC.

Enfin, les problèmes de la troisième colonne se ramènent respectivement à ceux qui sont placés vis-à-vis dans la deuxième colonne. La marche à suivre reste la même pour tous les trois : c'est la méthode de *translation* (171). Ainsi, pour le problème DDC, on remarquera que, si le rayon du cercle cherché augmentait ou diminuait du rayon R du cercle donné, le nouveau cercle inconnu passerait par le centre du cercle donné et toucherait les droites données *déplacées parallèlement à elles-mêmes* d'une quantité égale à R. — De même, s'il s'agit du problème DCC, on remplacera le plus grand des deux cercles donnés par un cercle ayant pour rayon (suivant la nature des contacts) la somme ou la différence des rayons de ces deux cercles, et l'on déplacera la droite donnée parallèlement à elle-même d'une quantité égale au rayon

du plus petit des deux cercles. — Enfin, pour le problème CCC, on substituera aux deux plus grands cercles des circonférences concentriques dont les rayons différeront des leurs d'une quantité égale au rayon du plus petit des trois cercles donnés.

§ VI. — POLYGONES RÉGULIERS.

DÉFINITIONS.

264. Un polygone est dit *régulier*, lorsqu'il a tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux. Tels sont, par exemple, le triangle équilatéral et le carré.

On nomme *ligne brisée régulière* toute ligne brisée convexe qui a ses côtés égaux et ses angles égaux.

THÉORÈME.

265. *On peut toujours inscrire ou circonscrire à une circonférence donnée un polygone régulier d'un nombre donné de côtés.*

Supposons la circonférence divisée en n parties égales, n étant le nombre de côtés que doit avoir le polygone.

1° En menant (*fig.* 184) les cordes AB, BC, ... qui unis-

Fig. 184.

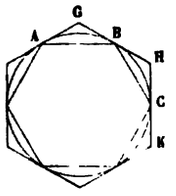
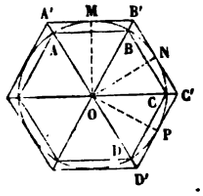


Fig. 185.



sent les points de division, on aura un polygone régulier inscrit de n côtés. En effet, les côtés de ce polygone sont égaux comme cordes d'arcs égaux, et ses angles sont égaux comme inscrits dans des segments égaux; car tout angle ABC du polygone est inscrit dans un segment correspondant à deux divisions consécutives de la circonférence.

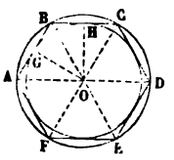
2° En menant des tangentes (*fig.* 184) par les points de division A, B, C, ..., on aura un polygone régulier circonscrit de n côtés. En effet, dans les triangles GAB, HBC, ... les

côtés AB, BC,... sont égaux, et les angles en A, B, C,..., formés par une tangente et une corde, sont aussi égaux comme ayant tous pour mesure la moitié d'une division de la circonférence; dès lors les triangles GAB, HBC.... sont isocèles et égaux, et l'on a d'une part $G = H = K = \ldots$, et de l'autre $AG = GB = BH = HC = CK, \ldots$, d'où l'on déduit $GH = HK = \ldots$. Ainsi le polygone GHK... a ses angles égaux et ses côtés égaux.

D'après cette démonstration, pour avoir le polygone régulier de n côtés circonscrit à un cercle, il suffit de diviser la circonférence en n parties égales et de mener des tangentes par les points de division. Or, les milieux M, N, P,... des arcs AB, BC, CD,..., qui sous-tendent les côtés du polygone régulier inscrit (*fig.* 185), divisent évidemment la circonférence en n parties égales. On aura donc un polygone régulier circonscrit de n côtés en menant des tangentes par ces points. On préfère souvent cette seconde manière d'opérer, parce que le polygone A'B'C'D',..., ainsi obtenu, a ses côtés parallèles à ceux du polygone inscrit ABCD,..., et ses sommets A', B', C',..., sur les mêmes rayons OAA', OBB', .., que les sommets du polygone ABCD.... En effet, d'une part deux côtés tels que BC, B'C', sont parallèles comme perpendiculaires sur la même droite ON, et d'autre part deux tangentes telles que MB', NB', doivent se couper (158) sur la bissectrice OB de l'angle MON.

266. Réciproquement, *on peut toujours inscrire et circonscrire une circonférence à un polygone régulier donné.*

Fig. 186.



Soit ABCDEF le polygone régulier donné (*fig.* 186).

1° Pour démontrer qu'on peut circonscrire une circonfé-

rence à ce polygone, il suffit de prouver que la circonférence qui passe par trois sommets consécutifs quelconques A, B, C, passe par le sommet suivant D. Or, soit O le centre du cercle déterminé par les trois points A, B, C; menons OA, OD, et la perpendiculaire OH sur BC. Replions le quadrilatère ABHO autour de OH; les angles en H étant droits, BH prendra la direction HC, et le point B tombera en C, puisque BH = HC. Mais, le polygone étant régulier, l'angle ABH est égal à l'angle HCD, comme le côté BA au côté CD; par suite, le côté BA prendra la direction CD, et le point A tombera en D. Donc OD est égal au rayon OA, et la circonférence considérée passe par le point D.

2° Les côtés AB, BC,..., étant des cordes égales du cercle circonscrit, les perpendiculaires OG, OH,..., abaissées du centre O sur ces cordes, seront égales (104); donc, si du point O comme centre, avec OH pour rayon, on décrit une circonférence, chacun des côtés du polygone sera touché en son milieu par cette circonférence, alors inscrite au polygone.

Corollaires.

267. On nomme *centre* d'un polygone régulier le centre commun O de la circonférence inscrite et de la circonférence circonscrite. Ce point, étant à égale distance de tous les côtés et de tous les sommets, est à la fois le point de concours des bissectrices de tous les angles et des perpendiculaires élevées sur les milieux des divers côtés.

On appelle *rayon* d'un polygone régulier le rayon du cercle circonscrit, et *apothème* de ce polygone le rayon du cercle inscrit.

On nomme *angle au centre* d'un polygone régulier l'angle AOB de deux rayons consécutifs; cet angle est évidemment égal à l'angle GOH de deux apothèmes consécutifs, et par conséquent est le supplément de l'angle GBH du polygone régulier. D'après cela, si n est le nombre des côtés du polygone, et si l'on prend l'angle droit pour unité, l'angle au centre vaudra $\frac{4}{n}$ et l'angle du polygone $2 - \frac{4}{n}$. On voit ainsi que, sauf le triangle équilatéral dont les angles sont de 60 degrés,

et le carré dont les angles sont droits, tous les polygones réguliers ont leurs angles obtus.

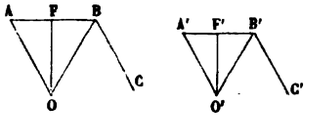
268. On prouverait, par des raisonnements identiques aux précédents, que toute ligne brisée régulière est inscriptible et circonscriptible, et par suite qu'elle a un centre, un apothème et un rayon, qui sont le centre et les rayons des circonférences inscrite et circonscrite. Une ligne brisée régulière ne diffère d'une portion de polygone régulier qu'en ce que son angle au centre n'est pas forcément une partie aliquote de quatre angles droits.

THÉORÈME.

269. 1° *Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables.*

2° *Leur rapport de similitude est égal à celui de leurs rayons ou de leurs apothèmes.*

Fig. 187.



En effet :

1° Ces polygones ont les angles égaux, puisque la valeur de l'angle d'un polygone régulier ne dépend que du nombre des côtés (267), et que le nombre des côtés est le même dans les deux figures; de plus, les côtés sont évidemment proportionnels, puisque, dans l'une et l'autre figure, ils sont égaux. Donc, les polygones considérés sont semblables.

2° Soient (*fig.* 187) AB le côté du premier polygone, O son centre, OB son rayon, OF son apothème; soient de même A'B' le côté du second polygone, O' son centre, O'B' son rayon, et O'F' son apothème. Les triangles rectangles BFO, B'F'O', sont semblables (202), puisque les angles FBO, F'B'O', sont égaux comme moitié des angles égaux ABC, A'B'C' (267). On a donc

$$\frac{BF}{B'F'} = \frac{OB}{O'B'} = \frac{OF}{O'F'};$$

mais, les polygones proposés étant semblables, leur rapport de similitude est égal au rapport des côtés AB, A'B', ou des demi-côtés BF, B'F'; il est donc aussi égal au rapport des rayons OB, O'B', ou au rapport des apothèmes OF, O'F'.

SCOLIE.

270. Supposons la circonférence divisée en m parties égales; désignons par a la longueur de l'une des parties, et joignons les points de division de p en p, à partir de l'un d'eux.

Si p est premier avec m, la circonférence ma et l'arc pa sous-tendu par chacune des cordes successives auront pour plus petit multiple commun pma, et l'on reviendra au point de départ après avoir parcouru p fois la circonférence ou m fois l'arc pa. On aura donc formé ainsi un polygone régulier de m côtés. Par exemple, dans la *fig.* 190 où la circonférence est divisée en 10 parties égales, on obtient, en joignant les points de division de 1 en 1, le décagone convexe, et en joignant ces points de 3 en 3 un décagone régulier *étoilé*.

Si p et m, au lieu d'être premiers entre eux, ont un plus grand commun diviseur θ, le plus petit multiple commun de l'arc pa et de la circonférence ma sera $\frac{mp}{\theta}a$. On reviendra alors au point de départ après avoir parcouru $\frac{p}{\theta}$ fois la circonférence ou $\frac{m}{\theta}$ fois l'arc pa; en d'autres termes, on aura formé ainsi un polygone régulier de $\frac{m}{\theta}$ côtés, et non plus de m côtés.

Au premier abord, il semble résulter de là qu'il existe autant de polygones réguliers (convexes ou étoilés) de m côtés qu'il y a de nombres premiers à m dans la suite 1, 2,..., $m-1$. Mais, si l'on remarque qu'en joignant les points de division de p en p, p étant premier à m, on obtient le même polygone qu'en les joignant de $m-p$ en $m-p$, on voit qu'en réalité *le nombre des polygones réguliers de m côtés est égal au nombre des entiers premiers à m contenus dans la suite*

$$1, 2, 3, \ldots, \frac{m-1}{2}.$$

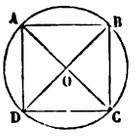
D'après cela, il n'y a qu'un hexagone régulier; il y a deux pentagones réguliers, deux décagones, quatre pentédécagones, etc.

§ VII. — PROBLÈMES SUR LES POLYGONES RÉGULIERS.

PROBLÈME.

271. *Inscrire un carré dans un cercle donné* (*fig.* 188).

Fig. 188.



Il suffit évidemment de mener deux diamètres AC et BD perpendiculaires entre eux, et de joindre leurs extrémités, pour avoir le carré demandé ABCD.

Le triangle AOB, rectangle en O, donne

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 2\overline{OA}^2, \quad \text{d'où} \quad AB = OA.\sqrt{2}.$$

Ainsi, *le côté du carré inscrit dans le cercle de rayon* R *est égal à* $R.\sqrt{2}$.

Il convient de remarquer que l'apothème du carré inscrit est égal à la moitié de son côté, et que le côté du carré circonscrit est égal au diamètre du cercle considéré.

Corollaire.

272. Du carré, on passe à l'octogone régulier inscrit en divisant (*fig.* 188) chacun des arcs AB, BC, CD, DA, en deux parties égales. On déduirait de même de l'octogone le polygone régulier de 16 côtés,..., et ainsi de suite. On peut donc, *avec la règle et le compas,* inscrire les polygones réguliers de 4, 8, 16, 32,...., et, en général, de 2^n côtés.

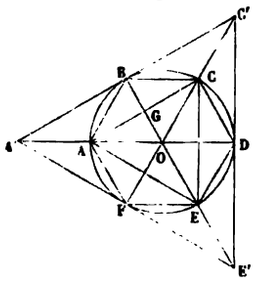
PROBLÈME.

273. *Inscrire un hexagone régulier dans un cercle* (*fig.* 189).

Supposons le problème résolu, et soit ABCDEF l'hexagone

demandé. En menant deux rayons consécutifs OA, OB, on obtient un triangle OAB qui est isocèle, et, par suite, dont

Fig. 189.



les angles A et B sont égaux. Mais, si l'on remarque que le rayon BO prolongé passe par le sommet E de l'hexagone, on voit que l'angle inscrit ABE a pour mesure la moitié de l'arc AFE, c'est-à-dire une division de la circonférence; et comme l'angle au centre AOB a aussi pour mesure une de ces divisions AB, les deux angles ABO et AOB sont égaux, et le triangle OAB est équilatéral. Donc, *le côté de l'hexagone inscrit dans un cercle est égal au rayon* R *de ce cercle.*

Pour inscrire un hexagone régulier dans un cercle, il suffit, d'après cela, de porter six fois sur la circonférence une ouverture de compas égale au rayon, et de joindre les points de division consécutifs ainsi obtenus.

Corollaires.

274. En joignant de deux en deux les sommets de l'hexagone, on obtient le triangle équilatéral inscrit ACE. Le triangle rectangle ACD donne

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2,$$

d'où

$$AC = R\sqrt{3}.$$

Ainsi, *le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon* R *est égal à* $R\sqrt{3}$; son apothème OG est d'ailleurs égal à la moitié du rayon, car la figure ABCO est un losange.

275. En menant des tangentes par les points B, D, F, on forme le triangle équilatéral circonscrit A′C′E′, dont les côtés sont parallèles à ceux du triangle équilatéral inscrit ACE. Le rapport de similitude de ces deux triangles est égal (269) à $\frac{OB}{OG}$, c'est-à-dire à 2. Ainsi, deux lignes homologues quelconques dans le triangle équilatéral circonscrit et dans le triangle équilatéral inscrit sont doubles l'une de l'autre.

276. De l'hexagone, on passe au dodécagone régulier inscrit en divisant en deux parties égales les arcs sous-tendus par les côtés de l'hexagone; on déduirait de même du dodécagone le polygone régulier de 24 côtés,..., et ainsi de suite. On peut donc, *avec la règle et le compas*, inscrire les polygones réguliers de 3, 6, 12, 24,..., et, en général, de 3.2^n côtés.

PROBLÈME.

277. *Inscrire un décagone régulier dans un cercle donné* (*fig.* 190).

Supposons le problème résolu, c'est-à-dire la circonférence divisée en dix parties égales par les points A, B, C, D, E, F, G, H, K, I.

En joignant les points de division consécutifs, on obtient le décagone régulier convexe ABCDEFGHKI; en joignant les points de division de trois en trois, on obtient le décagone régulier étoilé ADGICFKBEH (270). Il s'agit de construire les côtés AB et AD de ces deux décagones.

Fig. 190.

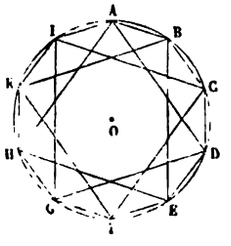
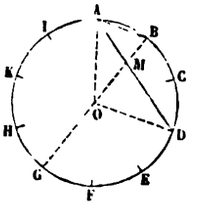


Fig. 191.



Or, en remarquant (*fig.* 191) que le rayon BO prolongé passe

par le sommet G, on voit que l'angle AMB, dont le sommet est à l'intérieur du cercle, a pour mesure la moitié de l'arc AB, plus la moitié de l'arc GD, c'est-à-dire deux divisions de la circonférence. D'ailleurs, l'angle inscrit ABG a pour mesure la moitié de l'arc AG, c'est-à-dire encore deux divisions; l'angle au centre BOD a aussi cette même mesure. Les deux triangles AMB, DMO, sont donc isocèles, et l'on a

$$AM = AB, \quad MD = OD \quad \text{ou} \quad AD - AM = OD.$$

D'un autre côté, les angles OMA, DOA, étant égaux comme ayant l'un et l'autre pour mesure trois divisions, les droites OM et OD sont antiparallèles par rapport à l'angle OAD, et l'on a (192)

$$AD.AM = \overline{AO}^2.$$

Les deux relations précédentes montrent que la recherche des côtés AD et AB = AM revient à celle de deux lignes dont la différence est égale au rayon et dont le produit est égal au carré du rayon; *on obtiendra donc ces deux côtés* (259) *en divisant le rayon en moyenne et extrême raison; le plus grand segment additif sera le côté du décagone régulier convexe, et le plus petit segment soustractif sera le côté du décagone régulier étoilé.*

Si R est le rayon du cercle, on aura (259)

$$AB = R.\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{et} \quad AD = R.\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

COROLLAIRES.

278. La circonférence étant divisée en dix parties égales, en joignant les points de division de deux en deux, on obtient le *pentagone régulier convexe* ACEGK; en les joignant de quatre en quatre, on trace le *pentagone régulier étoilé* AEKCG (*fig.* 192).

Pour calculer les côtés FD et FB (*fig.* 193) du pentagone régulier convexe et du pentagone étoilé, il suffit de remarquer que, si l'on mène le diamètre FA, les cordes AD et AB sont les côtés du décagone étoilé et du décagone convexe. Or les

triangles rectangles FAD, FAB, donnent

$$FD = \sqrt{4R^2 - \overline{AD}^2}, \quad FB = \sqrt{4R^2 - \overline{AB}^2}$$

Fig. 192.

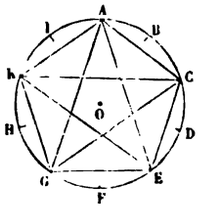
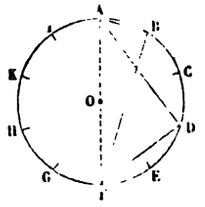


Fig. 193.



d'où, en remplaçant AD et AB par leurs valeurs (277) et réduisant,

$$FD = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad FB = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

279. Du décagone convexe, on passe au polygone régulier de 20 côtés, puis à celui de 40,..., et ainsi de suite, en prenant chaque fois les milieux des arcs sous-tendus par les côtés du polygone précédent. On peut donc, *avec la règle et le compas*, inscrire les polygones réguliers de 5, 10, 20, 40,..., et, en général, de 5.2^n côtés.

PROBLÈME.

280. *Inscrire un pentédécagone régulier dans un cercle donné* (*fig.* 194).

Supposons le problème résolu, c'est-à-dire la circonférence divisée en quinze parties égales par les points A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P.

En joignant les points de division de 1 en 1, de 2 en 2, de 4 en 4, de 7 en 7, on obtient les côtés AB, AO, AE, AI, du pentédécagone convexe et des trois pentédécagones étoilés.

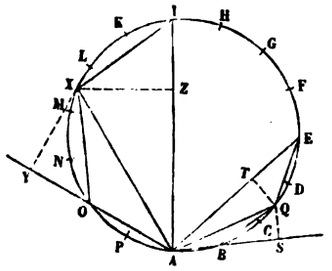
Considérons les côtés AB et AE; Q étant le milieu de l'arc CD, on a

$$\text{arc AQ} = \left(2 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{15} = \frac{1}{6},$$

$$\text{arc QB} = \text{arc QE} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{15} = \frac{1}{10}.$$

Donc, pour construire AB et AE, il suffit de porter, à partir du point A, une corde AQ égale au côté de l'hexagone, puis a

Fig. 194.



partir de Q, et de part et d'autre de ce point, une corde QB = QE égale au côté du décagone convexe.

Pour calculer AB et AE, abaissons du point Q les perpendiculaires QS et QT sur ces côtés; l'égalité des triangles rectangles QAS et QAT, qui ont l'hypoténuse commune et un angle aigu égal QAS = QAT, donne

$$AS = AT, \quad QS = QT;$$

puis, de l'égalité des triangles rectangles BQS, TQE, qui ont l'hypoténuse égale et un côté égal, on déduit

$$ET = BS.$$

On a donc

$$AB = AS - BS \quad \text{et} \quad AE = AT + TE = AS + BS.$$

Mais QS n'est autre que la moitié du côté du décagone convexe, puisque AQ est égal au rayon et que, l'arc BQ étant le dixième de la circonférence, l'angle inscrit BAQ est la moitié de l'angle au centre du décagone convexe; on a donc

$$QS = \frac{R}{4}(\sqrt{5} - 1);$$

par suite,

$$AS = \sqrt{\overline{AQ}^2 - \overline{QS}^2} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$BS = \sqrt{\overline{BQ}^2 - \overline{QS}^2} = \frac{R}{4}(\sqrt{15} - \sqrt{3}).$$

On aura donc, d'après les relations ci-dessus,

$$AB = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}\right),$$

$$AE = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3} + \sqrt{15}\right).$$

On verra de même que, X étant le milieu de ML, AX est le côté du décagone étoilé et XO = XI le côté de l'hexagone, ce qui permettra de construire et de calculer d'une manière analogue les côtés AO et AI des deux autres pentédécagones étoilés. En remarquant que XY est la moitié du côté du décagone étoilé, on trouve

$$AO = \frac{R}{4}\left(\sqrt{15} + \sqrt{3} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right),$$

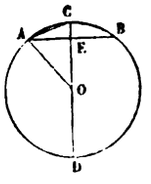
$$AI = \frac{R}{4}\left(\sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right).$$

281. Du pentédécagone convexe, on passe au polygone de 30 côtés, puis à celui de 60,..., et ainsi de suite, en prenant chaque fois les milieux des arcs sous-tendus par les côtés du polygone précédent. On peut donc, *avec la règle et le compas*, inscrire les polygones réguliers de 15, 30, 60, 120,..., et en général de $3.5.2^n$ côtés.

PROBLÈME.

282. ***Connaissant le côté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle donné, calculer le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés double*** (*fig.* 195).

Fig. 195.



Soient AB = a le côté donné et R le rayon du cercle;

CD étant le diamètre perpendiculaire à AB, AC sera le côté cherché, que nous désignerons par a'.

La corde AC est moyenne proportionnelle entre le diamètre CD et sa projection $CE = OC - OE$ sur ce diamètre; on a donc

$$a'^2 = 2R(R - OE) = R(2R - 2OE).$$

Mais le triangle rectangle AEO donne

$$OE = \sqrt{AO^2 - AE^2} \quad \text{ou} \quad OE = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

On a donc finalement

$$a' = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - a^2})}. \tag{1}$$

En particulier, lorsqu'on prend le rayon pour unité, on a

$$a' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}. \tag{2}$$

On peut donner à cette relation une autre forme plus commode pour le calcul numérique. Le produit de la somme $2 + \sqrt{4 - a^2}$, par la différence $2 - \sqrt{4 - a^2}$, est égal à la différence des carrés de 2 et de $\sqrt{4 - a^2}$, c'est-à-dire à

$$4 - (4 - a^2) = a^2.$$

Par suite, on a

$$2 - \sqrt{4 - a^2} = \frac{a^2}{2 + \sqrt{4 - a^2}},$$

et enfin

$$a' = \frac{a}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - a^2}}}. \tag{3}$$

Scolie.

283. En partant d'un polygone dont on connaît le côté, on pourra, par l'application répétée de la formule (3), calculer successivement les côtés, et par suite les périmètres des polygones réguliers inscrits de $2n$, $4n$, $8n$, $16n$,... côtés, n étant le nombre des côtés du premier polygone. Voici les résultats que l'on obtient en partant, soit du carré dont le côté est $\sqrt{2}$

dans le cercle de rayon 1, soit de l'hexagone dont le côté est 1 :

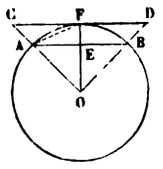
Nombre des côtés.	Demi-périmètres.	Nombre des côtés.	Demi-périmètres.
4.....	2,82842	6.....	3,00000
8.....	3,06146	12.....	3,10582
16.....	3,12144	24.....	3,13262
32.....	3,13654	48.....	3,13935
64.....	3,14033	96.....	3,14103
128.....	3,14127	192.....	3,14145

Ces valeurs sont obtenues par défaut à moins d'une unité du cinquième ordre décimal.

PROBLÈME.

284. ***Connaissant le côté d'un polygone régulier inscrit, calculer le côté du polygone régulier circonscrit semblable*** (*fig.* 196).

Fig. 196.



Soient $AB = a$ le côté donné et R le rayon du cercle; menons la tangente CD au milieu F de l'arc AB et prolongeons-la jusqu'aux points C et D, où elle rencontre les rayons OA et OB prolongés. CD sera le côté cherché (265); désignons-le par x.

Les triangles semblables AOE, COF, donnent

$$\frac{CF}{AE} = \frac{OF}{OE} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{a} = \frac{R}{OE};$$

mais on a (282)

$$OE = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2};$$

il en résulte

$$(1) \qquad x = \frac{2aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

En particulier, lorsqu'on prend le rayon pour unité, on a

$$(2) \qquad \alpha = \frac{2a}{\sqrt{4 - a^2}}.$$

SCOLIE.

283. Connaissant les côtés des polygones réguliers de n, $2n$, $4n$, $8n$, ... côtés, inscrits dans le cercle de rayon 1, on aura par la formule (2) les côtés, et, par suite, les périmètres des polygones réguliers circonscrits semblables. Voici les résultats que l'on obtient pour les séries qui dérivent du carré et de l'hexagone :

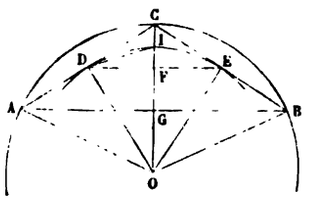
Nombre des côtés.	Demi-périmètres.	Nombre des côtés.	Demi-périmètres.
4.....	4,00000	6.....	3,46411
8.....	3,31371	12.....	3,21540
16.....	3,18260	24.....	3,15967
32.....	3,15173	48.....	3,14609
64.....	3,14412	96.....	3,14272
128.....	3,14223	192.....	3,14188

Ces valeurs sont obtenues par excès à moins d'une unité du cinquième ordre décimal.

PROBLÈME.

286. *Étant donnés le rayon r et l'apothème a d'un polygone régulier de n côtés, calculer le rayon r' et l'apothème a' du polygone régulier qui aurait $2n$ côtés et le même périmètre* (*fig.* 197).

Fig. 197.



Soient AB le côté et O le centre du polygone donné; en menant le rayon OGC perpendiculaire sur AB, on aura

$$OC = r, \quad OG = a.$$

Tirons CA et CB, et joignons les milieux D et E de ces deux cordes. La droite DE, parallèle à AB et égale à sa moitié, sera le côté du polygone régulier qui a même périmètre et deux fois plus de côtés que le premier. D'ailleurs, l'angle DOE étant la moitié de l'angle au centre AOB du polygone primitif, le point O sera encore le centre du nouveau polygone, et l'on aura

$$OD = r', \quad OF = a'.$$

Or, le point F est le milieu de CG; donc

$$(1) \qquad OF = \frac{1}{2}(OG + OC) \quad \text{ou} \quad a' = \frac{1}{2}(a + r).$$

De plus, le triangle rectangle ODC donne (222)

$$(2) \qquad \overline{OD}^2 = OC.OF \quad \text{ou} \quad r'^2 = r.a',$$

d'où

$$r' = \sqrt{r.a'}.$$

Les relations (1) et (2) résolvent le problème proposé; la première permet de calculer a'; puis, a' étant connu, la seconde donne r'.

Scolies.

287. La formule (1) peut encore s'écrire

$$(1') \qquad 2(a' - a) = r - a,$$

$$(1'') \qquad 2(r - a') = r - a.$$

288. On voit sur la figure que OF est plus grand que OG et que OD est moindre que OC. Donc, *quand on passe d'un polygone régulier au polygone régulier isopérimètre d'un nombre de côtés double, l'apothème augmente et le rayon diminue,* de sorte que la différence entre le rayon et l'apothème va en décroissant.

On peut voir que *la différence $r' - a'$ est moindre que le quart de la différence précédente $r - a$.*

En effet, si du point O comme centre, avec OD pour rayon, on trace

l'arc DIE, on a

$$r' - a' = \text{IF} \quad \text{et} \quad r - a = \text{CG} = 2\text{CF};$$

il s'agit donc de prouver que IF est inférieur à la moitié de CF, c'est-à-dire que IF est moindre que CI. Or l'angle inscrit IDE et l'angle IDC formé par une tangente et une corde ont pour mesure, le premier la moitié de l'arc IE, le second la moitié de l'arc DI; ces angles sont donc égaux, et DI est la bissectrice de l'angle CDF. Donc enfin le rapport de IF à IC est égal à celui de la perpendiculaire DF à l'oblique DC, et, par suite, moindre que 1.

Le même fait ressort des formules précédentes.

Nous désignerons par a'' et r'' l'apothème et le rayon du polygone isopérimètre de $4n$ côtés, en sorte que $2a'' = a' + r'$, $r''^2 = a''r'$.

Cela posé, on a, en vertu de (1″),

$$\frac{r' - a'}{r - a} = \frac{r' - a'}{2(r - a')} = \frac{a'(r' - a')}{2(ra' - a'^2)} = \frac{a'(r' - a')}{2(r'^2 - a'^2)} = \frac{a'}{2(a' + r')} = \frac{1}{4}\frac{a'}{a''};$$

or, les apothèmes allant en croisant, le dernier membre est plus petit que $\frac{1}{4}$.

289. On peut encore remarquer (D. ANDRÉ, *Nouvelles Annales*, 1874) que *chacun des rapports*

$$\frac{a'' - a'}{a' - a}, \quad \frac{r' - r''}{r - r'}$$

est aussi inférieur à $\frac{1}{4}$.

Cela est évident pour le premier; car, en vertu de la formule (1″) et de son analogue $a'' - a' = \frac{1}{2}(r' - a')$, il est égal au rapport $\frac{r' - a'}{r - a}$ que nous venons de considérer.

Quant au second, on a

$$\frac{r' - r''}{r'' - r'} = \frac{\dfrac{r''^2}{a''} - r''}{\dfrac{r'^2}{a'} - r'} = \frac{a'}{a''}\,\frac{r''}{r'}\,\frac{r'' - a''}{r' - a'};$$

or, des trois facteurs qui figurent au dernier membre, les deux premiers sont inférieurs à 1 et l'autre est moindre que $\frac{1}{4}$.

THÉORÈME.

290. ***Étant donnés les périmètres p et P de deux polygones réguliers de n côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit à un même cercle, calculer les périmètres p' et P' des polygones réguliers inscrit et circonscrit de 2n côtés.***

Le rapport de similitude ou celui des périmètres étant égal au rapport des apothèmes (269), on a (*fig.* 197)

$$\frac{p}{P} = \frac{OG}{OC}, \quad \frac{p'}{P'} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OD},$$

d'où

$$\frac{OC}{\frac{1}{p}} = \frac{OG}{\frac{1}{P}} \quad \text{et} \quad \frac{OD}{\frac{1}{p'}} = \frac{OF}{\frac{1}{P'}}.$$

D'ailleurs, les triangles semblables ODC, ACG, donnent

$$\frac{OC}{OD} = \frac{AC}{AG} = \frac{p'}{p} \quad \text{ou} \quad \frac{OC}{\frac{1}{p}} = \frac{OD}{\frac{1}{p'}}.$$

On a donc

$$\frac{OC}{\frac{1}{p}} = \frac{OG}{\frac{1}{P}} = \frac{OD}{\frac{1}{p'}} = \frac{OF}{\frac{1}{P'}}.$$

mais (286)

$$OF = \frac{1}{2}(OC + OG) \quad \text{et} \quad OD = \sqrt{OC.OF};$$

donc enfin

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{P}\right), \quad \frac{1}{p'} = \sqrt{\frac{1}{p}.\frac{1}{P'}}.$$

§ VIII. — MESURE DE LA CIRCONFÉRENCE.

DÉFINITIONS.

291. Considérons (*fig.* 198) un arc de courbe plane AB et désignons par C, D, ..., I, divers points situés sur cet arc et pris dans l'ordre suivant lequel un mobile décrivant l'arc AB de A vers B, sans jamais revenir sur ses pas, les rencontre-

rait. C et D étant deux points consécutifs quelconques, nous nommerons angle de la corde CD avec la tangente au point C l'angle dont devrait tourner CD autour du point C supposé fixe pour que le point D vînt se confondre avec C. De même, l'angle de la corde CD avec la tangente au point D sera l'angle dont devrait tourner DC autour du point D supposé fixe pour que le point C vînt se confondre avec D.

Supposons les points A, C, D, ..., I, B, assez rapprochés pour que chacun des arcs partiels AC, CD, ..., IB, soit convexe et que sa corde fasse des angles aigus avec les tangentes menées à ses deux extrémités. Dans ces conditions, nous donnerons à la ligne polygonale ACD...IB le nom de *ligne brisée inscrite dans l'arc* AB, et nous appellerons *ligne brisée circonscrite correspondante* la ligne AM'N'...I'B dont les côtés touchent l'arc AB aux sommets A, C, D, ..., I, B, de la ligne brisée inscrite.

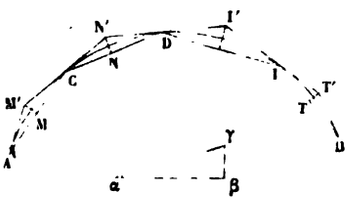
Cela posé, on ramène la notion de la longueur d'un arc de courbe à celle de la longueur d'une ligne droite, à l'aide de la définition suivante :

La longueur d'un arc de courbe est la limite vers laquelle tend le périmètre d'une ligne brisée inscrite dans cet arc, lorsque les côtés de cette ligne tendent vers zéro.

Toutefois, pour justifier cette définition, il faut prouver que *cette limite existe et est unique*, c'est-à-dire indépendante de la loi suivant laquelle les côtés tendent vers zéro.

Pour plus de clarté, nous diviserons la démonstration en deux parties.

Fig. 198.



1° *Le rapport des périmètres d'une ligne brisée inscrite et de la ligne brisée circonscrite correspondante tend vers l'unité, quelle que*

soit la loi suivant laquelle les côtés de la ligne inscrite tendent vers zéro.

En effet, soient M, N, ..., T, les projections des sommets M', N', ..., T', de la ligne circonscrite sur les côtés AC, CD, ..., IB, de la ligne inscrite. Puisque chacune de ces cordes fait des angles aigus avec les tangentes à ses extrémités, les points M, N, ... T, tombent respectivement entre A et C, entre C et D, ... entre I et B (44). Le rapport considéré est donc égal au suivant

$$\frac{AM' + M'C + CN' + \ldots + T'B}{\overline{AM} + \overline{MC} + \overline{CN} + \ldots + \overline{TB}};$$

et, comme la valeur de ce dernier est, d'après un théorème connu d'Arithmétique, comprise entre les valeurs du plus petit et du plus grand des rapports

$$\frac{AM'}{\overline{AM}}, \frac{M'C}{\overline{MC}}, \frac{CN'}{\overline{CN}}, \ldots, \frac{T'B}{\overline{TB}},$$

il suffit de prouver que chacun de ces rapports tend vers l'unité.

Considérons, par exemple, le rapport $\frac{CN'}{\overline{CN}}$. Sur une droite $\alpha\beta$ invariable de grandeur et de position, construisons un triangle $\alpha\beta\gamma$ rectangle en β et dont l'angle aigu α soit égal à N'CN. Les triangles semblables CNN', $\alpha\beta\gamma$ donneront la proportion

$$\frac{CN'}{\overline{CN}} = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta};$$

mais, lorsque le côté CD tend vers zéro, il en est de même de l'angle N'CN ou de son égal α. Par suite, la longueur finie et variable $\alpha\gamma$ tend vers $\alpha\beta$, et le rapport ci-dessus a pour limite l'unité.

2° *Le périmètre d'une ligne brisée inscrite dont les côtés tendent vers zéro, a une limite déterminée et indépendante de la loi d'inscription adoptée.*

En effet, une première ligne brisée étant inscrite dans l'arc AB, joignons un point quelconque de chacun des arcs sous-tendus par ses divers côtés aux extrémités du côté correspondant. Nous formerons ainsi une nouvelle ligne brisée inscrite ayant deux fois plus de côtés que la première. En opérant sur celle-là comme sur la précédente, et ainsi de suite, nous obtiendrons une série illimitée de lignes brisées inscrites *suivant une loi particulière*. Les périmètres $q_1, q_2, q_3, \ldots$, de ces lignes

croîtront sans cesse et, comme ils restent moindres que le périmètre d'une ligne brisée, quelconque circonscrite à l'arc AB, ils tendront vers une limite déterminée L. D'ailleurs (1°), les périmètres Q_1, Q_2, Q_3, ..., des lignes brisées circonscrites correspondantes tendront vers la même limite L.

Considérons maintenant une suite de lignes brisées inscrites dans l'arc AB *suivant une loi quelconque,* et dont les côtés tendent vers zéro.

Soient p le périmètre d'une ligne de cette série et P le périmètre de la ligne brisée circonscrite correspondante. P étant plus grand que l'une quelconque des lignes q_1, q_2, q_3, ..., sera supérieur ou égal à leur limite L. D'autre part, p étant moindre que l'une quelconque des lignes Q_1, Q_2, Q_3, ..., sera au plus égal à leur limite L.

On aura donc

$$p \leqq L \leqq P,$$

d'où

$$1 \leqq \frac{L}{p} \leqq \frac{P}{p}.$$

Mais le rapport $\frac{P}{p}$ a pour limite l'unité (1°). Par conséquent, le rapport $\frac{L}{p}$, étant compris entre 1 et une quantité qui tend vers 1, a l'unité pour limite.

En d'autres termes, p a aussi pour limite L.

292. De là résultent les propositions suivantes :

1° ***La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.***

Nous avons déjà démontré (38) qu'une portion de droite AB est moindre que toute ligne brisée ayant les mêmes extrémités A et B. Considérons maintenant un arc de courbe quelconque AMB; soient L sa longueur et L' la longueur d'une ligne brisée inscrite dans cet arc. L'inégalité (38)

$$AB < L'$$

subsiste quand les côtés de la ligne brisée tendent vers zéro; on a donc à la limite

$$AB < L.$$

2° *Tout arc convexe* α *est moindre qu'une ligne quelconque* β *qui l'enveloppe en partant des mêmes extrémités.*

Il suffit, en effet, de concevoir une ligne brisée convexe α' inscrite dans l'arc α et une ligne brisée β' inscrite dans l'arc β et n'ayant aucun point commun avec l'arc α. On aura alors (39) $\alpha' < \beta'$, et par suite à la limite, lorsque les côtés des lignes brisées tendent vers zéro, $\alpha < \beta$.

On verrait, par un raisonnement analogue, que *le périmètre d'une ligne convexe fermée est moindre que le périmètre de toute ligne qui l'enveloppe.*

3° *Le rapport d'un arc de courbe* AC *à sa corde* (*fig.* 198) *a pour limite l'unité, lorsque l'arc tend vers zéro.* — Car, en menant les tangentes AM′ et CM′, on a (1°)

$$\text{corde AC} < \text{arc AC} < \text{AM}' + \text{M}'\text{C},$$

d'où

$$1 < \frac{\text{arc AC}}{\text{corde AC}} < \frac{\text{AM}' + \text{M}'\text{C}}{\text{AM} + \text{MC}}.$$

Or, on a prouvé (291, 1°) que ce dernier rapport a pour limite l'unité lorsque l'arc AC tend vers zéro. La proposition est donc démontrée.

THÉORÈME.

293. *Le rapport de deux circonférences quelconques est égal au rapport de leurs rayons.*

Soient R et R′ les rayons, et C et C′ les longueurs de deux circonférences; inscrivons dans la première un polygone régulier quelconque et, dans la seconde, un polygone régulier d'un même nombre de côtés. P et P′ étant les périmètres de ces polygones, on aura (212, 269)

$$\frac{\text{P}}{\text{P}'} = \frac{\text{R}}{\text{R}'}.$$

Cette proportion, ayant lieu quel que soit le nombre des côtés des deux polygones, subsistera quand on fera croître ce nombre indéfiniment; mais alors, les périmètres P et P′ tendront vers leurs limites respectives C et C′ (291) et leur rapport tendra vers $\frac{\text{C}}{\text{C}'}$. On aura donc, à la limite,

$$\frac{\text{C}}{\text{C}'} = \frac{\text{R}}{\text{R}'}.$$

COROLLAIRE.

294. La proposition précédente donne

$$\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'} \quad \text{ou} \quad \frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}.$$

Donc, le rapport d'une circonférence à son diamètre est le même pour toutes les circonférences; en d'autres termes :

Le rapport de la circonférence au diamètre est un nombre constant.

Ce nombre, qu'on représente ordinairement par π, est incommensurable (*); on ne peut donc pas l'avoir exactement; mais on peut le calculer, comme nous le montrerons bientôt, avec telle approximation qu'on veut. Voici sa valeur en décimales, ainsi que celle de son inverse et de son logarithme :

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ldots,$$

$$\frac{1}{\pi} = 0,31830\ 98861\ 83790\ 67153\ldots,$$

$$\log\pi = 0,49714\ 98726\ 94133\ 85435\ldots.$$

En donnant à la formule $\frac{C}{2R} = \pi$ les deux formes

$$C = 2\pi R, \quad R = \frac{C}{2\pi},$$

on voit : 1° que, *pour calculer la longueur d'une circonférence, il faut multiplier par le nombre π le double de la longueur du rayon;* 2° que, *pour calculer le rayon d'une circonférence, il faut diviser par π ou multiplier par $\frac{1}{\pi}$ la moitié de la longueur de la circonférence.*

Exemples :

1° *Quelle est la circonférence d'une roue de voiture dont le rayon est de* $0^m,65$?

(*) C'est Lambert qui a démontré pour la première fois (*Mémoires de Berlin*, 1761) que π est incommensurable. Legendre a prouvé plus tard qu'il en est de même du carré de π

En multipliant le rayon $0^m,65$ par $6^m,28$ qui est la valeur de 2π à moins d'un centième, on trouve pour la circonférence cherchée $4^m,08$ à moins d'un centimètre.

2° *Quel est le rayon du méridien de Paris?*

On sait que la demi-circonférence de ce méridien est de 20000000 mètres; en multipliant ce nombre par 0,3183099, qui est la valeur de $\frac{1}{\pi}$ à moins de $\frac{1}{2}$ dix-millionième, on trouve pour le rayon cherché 6366197 mètres à moins de 1 mètre.

295. La longueur de l'arc de 180 degrés dans le cercle de rayon R, c'est-à-dire de la demi-circonférence, étant πR, la longueur de l'arc de 1 degré sera $\frac{\pi R}{180}$, et, par suite, *la longueur l de l'arc de n degrés dans le cercle de rayon* R *a pour expression*

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

Cette formule et les deux suivantes

$$n = \frac{180\,l}{\pi R}, \quad R = \frac{180\,l}{\pi n},$$

qu'on en déduit, servent à calculer l'une quelconque des trois quantités l, n, R, lorsqu'on connaît les deux autres.

Exemples :

1° *Sur une circonférence dont le rayon a* $0^m,90$, *quelle est la longueur de l'arc de* 25°45′?

On a ici

$$n = 25 + \frac{45}{60} = 25 + \frac{3}{4} = \frac{103}{4},$$

et, par suite,

$$l = \frac{\pi . 0,90 . \frac{103}{4}}{180} = \frac{103\pi}{800} = \frac{103 . 3,14}{800} = 0^m,40\ldots.$$

2° *Quel est l'arc dont la longueur est égale au rayon?*

La seconde des formules qui précèdent donne pour le nombre de degrés de cet arc

$$n = \frac{180^\circ}{\pi} = 180^\circ \times 0{,}318309888\ldots = 57^\circ 17' 44'',80\ldots.$$

3° *Quel est le rayon du cercle dans lequel l'arc de* 30 *degrés vaut* 1 *mètre?*

La troisième formule donne

$$R = \frac{180}{\pi . 30} = \frac{6}{\pi} = 6.0{,}3183 = 1^m,910.$$

THÉORÈME.

296. ***Deux arcs semblables,*** c'est-à-dire deux arcs qui répondent à des angles au centre égaux dans des cercles différents, ***sont proportionnels à leurs rayons.***

En effet, soient l et l' les longueurs des deux arcs, R et R′ leurs rayons, O et O′ les angles au centre égaux qui correspondent à ces arcs; on a

$$\frac{l}{2\pi R} = \frac{O}{4 \text{ droits}}, \quad \frac{l'}{2\pi R'} = \frac{O'}{4 \text{ droits}};$$

d'où, en divisant membre à membre et observant que $O = O'$,

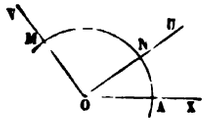
$$\frac{l}{l'} = \frac{R}{R'}.$$

Scolie.

297. Dans la pratique, on évalue les angles en parties aliquotes de la circonférence, c'est-à-dire en degrés, minutes et secondes. Il n'en est plus de même en théorie, lorsqu'on veut introduire un angle dans une formule.

Soient VOX un angle et ω le nombre qui le mesure, c'est-à-dire le rapport de cet angle à l'angle unité UOX (*fig.* 199). Décrivons du sommet commun O comme centre une circonférence, et désignons respectivement

Fig. 199.



par r, l, l', les nombres d'unités linéaires contenues dans le rayon et dans les arcs AM, AN, interceptés entre les côtés des deux angles VOX, UOX.

La proportionnalité des angles au centre aux arcs interceptés (126) donne

$$\frac{\text{VOX}}{\text{UOX}} \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{l}{l'}.$$

Donc

1° *Si on laisse arbitraire l'unité linéaire et l'unité angulaire, un angle quelconque a pour mesure le rapport des nombres d'unités linéaires contenues dans les arcs que l'angle considéré et l'angle unité interceptent sur une circonférence quelconque, décrite de leur sommet commun comme centre.*

2° Si, sans fixer aucune des deux unités, on les fait correspondre l'une à l'autre, c'est-à-dire *si l'on prend pour unité d'arc l'arc intercepté par l'unité d'angle,* on a $l' = 1$, et $\omega = l$.

Dans ce cas, un angle quelconque a même mesure que l'arc compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme centre avec un rayon quelconque; c'est le théorème du n° 127.

3° Souvent, au lieu d'établir la correspondance entre l'unité linéaire et l'unité angulaire, on laisse indéterminée l'unité de longueur, et l'on fixe l'unité d'angle; *on prend pour unité angulaire l'angle qui intercepte sur une circonférence quelconque un arc égal au rayon.* On a alors $l' = r$, et par suite

$$\omega = \frac{l}{r} \quad \text{ou} \quad l = \omega r.$$

Dans ce cas, un angle quelconque a pour mesure le rapport de l'arc qu'il intercepte sur une circonférence quelconque décrite de son sommet comme centre, au rayon de cette circonférence, et inversement, *l'arc est égal à l'angle multiplié par le rayon.*

Pour rendre facile la comparaison entre ce mode de mesure et l'évaluation en degrés, minutes et secondes, il suffit de rappeler (295, 2°) que l'angle unité est alors de $57°17'44'',80\ldots$.

Ajoutons enfin que si, après avoir fixé de la sorte l'unité d'angle, on prend de plus le rayon r pour unité de longueur, on établit ainsi la correspondance des unités linéaire et angulaire, et l'on retombe sur la formule $\omega = l$. L'angle droit est alors mesuré par $\frac{\pi}{2} = 1,5707\ldots$, l'angle de 45 degrés par $\frac{\pi}{4}, \ldots$, etc.

PROBLÈME.

298. *Calculer le rapport de la circonférence au diamètre.*

La formule

$$\pi = \frac{C}{2R} \tag{1}$$

montre que, pour avoir π, on peut :

Soit se donner le rayon R et calculer la longueur de la circonférence C : c'est la *méthode des périmètres;*

Soit se donner la circonférence C et calculer le rayon R : c'est la *méthode des isopérimètres.*

299. *Méthode des périmètres.* — Pour $R = 1$, la formule (1) donne $\pi = \frac{1}{2}C$; le nombre π est donc égal à la demi-circonférence de rayon 1. Par suite, le demi-périmètre de tout polygone inscrit dans cette circonférence est une valeur de π approchée par défaut, et le demi-périmètre de tout polygone circonscrit est une valeur de π approchée par excès. Donc, si on calcule, comme au n° 283, en partant du carré inscrit, les demi-périmètres des polygones réguliers inscrits de 8, 16, 32,..., côtés, les nombres obtenus seront des valeurs par défaut de plus en plus voisines de π; et de même, si, en partant du carré circonscrit, on calcule, comme au n° 285, les demi-périmètres des polygones réguliers circonscrits de 8, 16, 32,..., côtés, on aura des valeurs par excès de plus en plus voisines de π. Par exemple, on trouve (283, 285) pour les demi-périmètres des polygones réguliers inscrit et circonscrit de 128 côtés... 3,14127 et 3,14223; on conclut de là que π est compris entre ces deux nombres et que 3,142 est sa valeur à moins d'un millième.

On peut aussi partir de l'hexagone et calculer, comme aux n°s 283 et 285, les demi-périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits de 12, 24, 48,..., côtés.

Ainsi présentée, la méthode des périmètres est très-laborieuse; mais en revanche elle est très-simple en principe; c'est d'ailleurs la méthode suivie par Archimède, l'illustre géomètre qui vivait à Syracuse 250 ans avant J.-C, et auquel appartient la gloire d'avoir trouvé le premier le rapport de la circon-

férence au diamètre. Archimède, en partant de l'hexagone et en s'arrêtant aux polygones inscrit et circonscrit de 96 côtés, a prouvé que π était compris entre $3 + \frac{10}{71}$ et $3 + \frac{10}{70}$. Ce dernier nombre $3 + \frac{10}{70}$ ou $\frac{22}{7}$, qui surpasse π de moins d'un demi-centième, suffit dans beaucoup d'applications.

Il convient de signaler encore la valeur par excès $\frac{355}{113}$, qui est due à Adrien Métius, et dont l'erreur n'atteint pas un demi-millionième.

Nous allons voir que la méthode des isopérimètres, publiée en 1813, à Nancy, par le géomètre Schwab, conduit à des calculs beaucoup plus simples; nous reviendrons ensuite sur la méthode des périmètres, pour montrer qu'on peut la présenter de telle sorte qu'elle conduise identiquement aux mêmes calculs que celle des isopérimètres.

300. *Méthode des isopérimètres.* — Elle est fondée sur le principe suivant :

Le nombre $\frac{1}{\pi}$ *est compris entre les valeurs a et r de l'apothème et du rayon de tout polygone régulier dont le périmètre est égal à* 2, *et l'on peut prendre le nombre n des côtés du polygone assez grand pour que ces valeurs approchent autant qu'on voudra de* $\frac{1}{\pi}$.

En effet, le périmètre du polygone étant compris entre la circonférence inscrite et la circonférence circonscrite, on a

$$2\pi a < 2 < 2\pi r, \quad \text{d'où} \quad a < \frac{1}{\pi} < r.$$

D'ailleurs, l'excès du rayon $OA = r$ sur l'apothème $OG = a$ (*fig.* 197) étant moindre que la moitié AG du côté du polygone, et le côté ayant pour valeur $\frac{2}{n}$, on a

$$r - a < \frac{1}{n};$$

on peut donc prendre n assez grand pour que les différences

$$\frac{1}{\pi} - a \quad \text{et} \quad r - \frac{1}{\pi},$$

qui sont inférieures à $r - a$, deviennent moindres que toute quantité donnée.

L'application simultanée de ce principe et du problème du n° 286 permet de calculer $\frac{1}{\pi}$ et par suite π avec telle approximation qu'on voudra.

On partira d'un polygone dont on sache trouver directement l'apothème et le rayon, par exemple du carré dont le périmètre est égal à 2; le côté étant égal à $\frac{1}{2}$, l'apothème aura pour valeur $a = \frac{1}{4}$ et, le rayon, $r = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Puis, à l'aide des formules du n° 286, on calculera successivement les apothèmes et les rayons a_1 et r_1, a_2 et r_2, ..., a_k et r_k, ..., des polygones réguliers et isopérimètres ayant 4.2, 4.2^2, ..., 4.2^k, ..., côtés.

Voici le Tableau des calculs jusqu'au polygone de 128 côtés :

$a = 0,2500000\ldots$	$r = 0,3535534\ldots$
$a_1 = 0,3017767\ldots$	$r_1 = 0,3266407\ldots$
$a_2 = 0,3142087\ldots$	$r_2 = 0,3203644\ldots$
$a_3 = 0,3172865\ldots$	$r_3 = 0,3188217\ldots$
$a_4 = 0,3180541\ldots$	$r_4 = 0,3184377\ldots$
$a_5 = 0,3182459\ldots$	$r_5 = 0,3183418\ldots$

La dernière ligne montre que $\frac{1}{\pi}$ est compris entre 0,3182 et 0,3184, et par suite a pour valeur 0,3183, à moins d'un dix-millième; quant à π, il est compris entre

$$\frac{1}{0,3182459} = 3,142\ldots \quad \text{et} \quad \frac{1}{0,3183419} = 3,141\ldots,$$

c'est-à-dire entre 3,141 et 3,143; il a donc pour valeur 3,142, à moins d'un millième.

On peut remarquer que $r = \frac{1}{4}$ est la moyenne arithmétique

entre o et $\frac{1}{2}$ et que $r = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ est la moyenne géométrique entre $\frac{1}{2}$ et a, et l'on est ainsi conduit à ce théorème :

Le nombre $\frac{1}{\pi}$ est la limite vers laquelle tend la suite des nombres

$$0, \frac{1}{2}, a, r, a_1, r_1, a_2, r_2, \ldots$$

obtenus en partant de o *et* $\frac{1}{2}$, *et prenant alternativement la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique entre les deux qui précèdent.*

Pour compléter l'exposition de la méthode, il reste à chercher une limite du nombre des opérations à faire pour obtenir π avec une approximation donnée.

Pour obtenir $\frac{1}{\pi}$ à moins de $\frac{1}{10^m}$, il suffit qu'on ait

$$r_k - a_k < \frac{1}{10^m}.$$

Mais la différence $r_k - a_k$ est moindre successivement (288) que

$$\frac{1}{4}(r_{k-1} - a_{k-1}), \quad \frac{1}{4^2}(r_{k-2} - a_{k-2}), \quad \ldots, \quad \frac{1}{4^{k-1}}(r_1 - a_1),$$

et, par conséquent, que

$$\frac{1}{4^k \cdot 10},$$

puisque $r_1 - a_1 = 0{,}0248\ldots$ est inférieur à $\frac{1}{40}$. L'inégalité primitive sera donc vérifiée si l'on a

$$4^k > 10^{m-1}, \quad \text{d'où} \quad k > \frac{m-1}{\log 4},$$

et, *a fortiori*,

$$k > \frac{5}{3}(m-1),$$

puisque $\log 4 = 0{,}602\ldots$ est supérieur à $\frac{3}{5}$. Donc, *pour avoir $\frac{1}{\pi}$ à moins de $\frac{1}{10^m}$, il suffit de pousser les calculs jusqu'au polygone de 4.2^k côtés, k étant l'entier égal ou immédiatement supérieur à $\frac{5}{3}(m-1)$*

D'ailleurs, dès qu'on connaît une valeur approchée de $\frac{1}{\pi}$ avec m déci-

males exactes, m étant plus grand que 2, on peut compter sur $m-1$ décimales exactes dans la valeur approchée qui en résulte pour $\frac{1}{\pi}$ (1).

301. On voit par ce qui précède combien le travail est considérable; toutefois, on peut l'abréger considérablement à l'aide de la proposition suivante :

Le nombre $\frac{1}{\pi}$ *est compris entre les deux quantités*

$$r_1 - \frac{1}{3}(r - r_1), \quad a_1 + \frac{1}{3}(a_1 - a),$$

où a *et* r *désignent l'apothème et le rayon d'un polygone régulier quelconque, dont le périmètre est égal à* 2, *et* a_1 *et* r_1 *l'apothème et le rayon du polygone régulier isopérimètre d'un nombre de côtés double* (E. Rouché, *Nouv. Annales*, 1882).

En effet, n étant le nombre des côtés du premier polygone, désignons par a_k, r_k l'apothème et le rayon du polygone isopérimètre dont le nombre des côtés est $n.2^k$. Les rapports (289)

$$\frac{a_2 - a_1}{a_1 - a} \quad \frac{a_3 - a_2}{a_2 - a_1} \cdots \frac{a_m - a_{m-1}}{a_{m-1} - a_{m-2}}$$

étant moindres que $\frac{1}{4}$, il en est de même du rapport obtenu en divisant la somme des numérateurs par celle des dénominateurs, c'est-à-dire du rapport

$$\frac{a_m - a_1}{a_{m-1} - a}$$

et, par conséquent, de sa limite

$$\frac{\frac{1}{\pi} - a_1}{\frac{1}{\pi} - a}$$

---

(1) En effet, si l'on désigne respectivement par ε' et ε les erreurs correspondantes de π et de $\frac{1}{\pi}$, et par e' et e les valeurs absolues de ces mêmes erreurs, on a

$$\varepsilon' = \frac{1}{\frac{1}{\pi}} - \frac{1}{\frac{1}{\pi} + \varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi} + \varepsilon\right)}, \quad \text{d'où} \quad e' \leqq \frac{e}{\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi} - e\right)};$$

on en conclut

$$e' < 10e,$$

pourvu que l'on ait

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi} - e\right) > \frac{1}{10},$$

c'est-à-dire,

$$e < \frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{10} < \frac{1}{2}(0{,}01).$$

lorsque l'entier m croît indéfiniment; on a donc

$$\frac{\frac{1}{\pi}-a_1}{\frac{1}{\pi}-a}<\frac{1}{4} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\pi}<a_1+\frac{1}{3}(a_1-a).$$

En raisonnant de même sur les rapports

$$\frac{r_1-r_2}{r-r_1}\,\frac{r_2-r_3}{r_1-r_2}\cdots\frac{r_{m-1}-r_m}{r_{m-2}-r_{m-1}},$$

on trouvera

$$\frac{r_1-\frac{1}{\pi}}{r-\frac{1}{\pi}}<\frac{1}{4}, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\pi}>r_1-\frac{1}{3}(r-r_1).$$

C. Q. F. D.

Cela posé, revenons à la suite de Schwab

$$0,\ \frac{1}{2},\ a,\ r,\ a_1,\ r_1,\ a_2,\ r_2,\ a_3\ r_3,\ \ldots$$

Tandis que la méthode *ordinaire* des isopérimètres consiste à prendre a_k et r_k pour une valeur approchée de $\frac{1}{\pi}$, la méthode *perfectionnée* consistera à prendre les limites plus resserrées

$$r_k-\frac{1}{3}(r_{k-1}-r_k) \quad \text{et} \quad a_k+\frac{1}{3}(a_k-a_{k-1}).$$

Pour comparer la marche de l'approximation dans les deux cas, remarquons que la différence entre les deux limites précédentes

$$\frac{1}{3}(r_{k-1}-a_{k-1})-\frac{4}{3}(r_k-a_k)$$

ou (289)

$$\frac{2}{3}\,\frac{r_k+a_k}{a_k}(r_k-a_k)-\frac{4}{3}(r_k-a_k)=\frac{2}{3}\,\frac{(r_k-a_k)^2}{a_k}$$

est moindre que

$$\frac{20}{9}(r_k-a_k)^2,$$

puisque a_k, au moins égal à $a_1=0,301\ldots$, reste supérieur à $\frac{3}{10}$. D'après cela, pour obtenir $\frac{1}{\pi}$ à moins de $\frac{1}{10^m}$, il suffit qu'on ait

$$(r_k-a_k)^2<\frac{9}{2.10^{m+1}}$$

et, *a fortiori*,

$$\left(\frac{1}{4^k.10}\right)^2<\frac{4}{10^{m+1}},$$

puisque $r_k - a_k$ est inférieur (300) à $\frac{1}{4^k \cdot 10}$ et que $\frac{9}{2}$ est supérieur à 4. On déduit de là successivement

$$4^{2k+1} > 10^{m-1}, \quad 2k+1 > \frac{m-1}{\log 4} > \frac{5}{3}(m-1), \quad k > \frac{1}{6}(5m-8).$$

Ainsi, *pour avoir* $\frac{1}{\pi}$ *à moins de* $\frac{1}{10^m}$, *il suffira de pousser les calculs jusqu'au polygone de* 4.2^k *côtés, k étant l'entier égal ou immédiatement supérieur à* $\frac{1}{6}(5m-8)$.

Cette nouvelle limite étant au plus égale à la moitié de celle du numéro précédent, on voit que l'emploi de la *méthode perfectionnée diminue certainement le travail de moitié.*

302. *Retour à la méthode des périmètres.* — Nous avons dit (299) que la méthode des périmètres convenablement dirigée conduisait à des calculs identiques aux précédents.

En effet, p et P étant les périmètres de deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit, et p' et P' étant les périmètres des deux polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double, on a (290)

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{p}\right), \quad \frac{1}{p'} = \sqrt{\frac{1}{P'} \cdot \frac{1}{p}}.$$

Les nombres

$$\frac{1}{P}, \quad \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{P'}, \quad \frac{1}{p'}, \quad \ldots,$$

sont donc, à partir du troisième, alternativement moyens arithmétiques et moyens géométriques entre les deux qui précèdent. D'ailleurs, si l'on prend le rayon du cercle égal à $\frac{1}{2}$, on a

$$\pi = C \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\pi} = \frac{1}{C}$$

et, par suite, $\frac{1}{\pi}$ est la limite de la suite formée par les inverses des périmètres des polygones réguliers circonscrits et inscrits dont le nombre des côtés va en doublant. Enfin, si l'on part des carrés circonscrit et inscrit, les deux premiers termes de la série sont

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{p} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

et l'on retombe sur le théorème de Schwab énoncé au n° 300.

APPENDICE DU LIVRE III.

I. — Principe des signes.

DES SEGMENTS RECTILIGNES.

303. Par définition un *segment* rectiligne désigné par AB est la portion de droite AB parcourue de A vers B; A est l'*origine*, B est l'*extrémité* et la droite indéfinie X qui contient A et B est la *base* du segment.

Deux segments sont dits *consécutifs* lorsque le second a pour origine l'extrémité du premier.

Quand plusieurs segments sont situés sur une même droite ou sont parallèles à une même droite, on choisit, parmi les deux sens dans lesquels cette droite peut être parcourue, celui que l'on veut appeler *sens positif*; puis on attribue au nombre qui mesure la longueur de chaque segment le signe + ou le signe — suivant que le segment considéré est décrit dans le sens positif ou dans le sens opposé. Ce nombre ainsi précédé d'un signe est la *valeur algébrique du segment*. Par exemple, en supposant que la distance des points A et B renferme 5 unités de longueur, et que le sens positif de la droite X (*fig.* 200) soit celui de la flèche, on a

$$AB = +5, \quad BA = -5$$

d'où

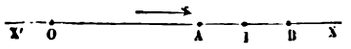
$$AB = -BA. \tag{1}$$

Lorsque dans une question on a à considérer plusieurs segments de même base, il est utile le plus souvent de les *rapporter à une même origine*, c'est-à-dire d'exprimer chacun d'eux en fonction de segments ayant pour origine commune un point O pris à volonté sur la droite X. On y parvient au moyen de la formule

$$AB = OB - OA, \tag{2}$$

qui est vraie quelles que soient les positions relatives des points O, A, B sur

Fig. 200.



la droite X; car, suivant que le point intermédiaire est O, A ou B, on a

$$AB = AO + OB, \quad OB = OA + AB, \quad OA = OB + BA;$$

d'où l'on tire toujours pour AB la valeur (2) si l'on a égard à la formule (1).

La position d'un point A sur une droite OX est déterminée sans ambiguïté dès qu'on connaît le segment OA compté à partir d'un point fixe O.

choisi d'ailleurs à volonté sur la droite. On donne à ce segment OA le nom d'*abscisse* du point A; cette définition permet d'énoncer aisément la formule (2) : *Un segment quelconque* AB *est égal à l'abscisse de son extrémité* B *diminuée de l'abscisse de son origine* A.

Comme application de cette règle, nous proposerons au lecteur de vérifier les relations

$$OA + OB = 2OI, \quad OA.OB = \overline{OI}^2 - \overline{AI}^2$$

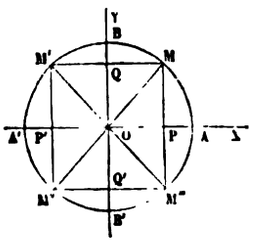
entre trois points quelconques O, A, B situés en ligne droite, I étant le milieu de AB; il suffit de rapporter tous les segments à l'origine I.

L'emploi des signes permet de raisonner d'une manière générale et de se débarrasser de certaines conditions de situation qui rendent les démonstrations pénibles et les énoncés obscurs. Par exemple, quand on a égard aux signes, la proposition du n° 179 s'énonce : *Sur la droite indéfinie* X'X *qui passe par deux points* A *et* B, *il existe un seul point* M *tel que le rapport* $\frac{MA}{MB}$ *ait une valeur assignée*. Ce point est situé entre A et B, ou sur l'un des prolongements de AB, suivant que la valeur du rapport est négative ou positive. Ainsi énoncé, ce lemme permettrait de simplifier notablement les démonstrations des n°s 184, 236, 237.

DES ANGLES.

304. Considérons un cercle de rayon égal à l'unité (*fig.* 201) et deux diamètres perpendiculaires A'A et B'B. Supposons qu'un mobile M partant de A décrive la circonférence en tournant dans un sens déterminé, par exemple dans le sens opposé au mouvement des aiguilles d'une montre; ce mobile décrira un arc x qui, nul au départ, prend successivement les valeurs $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{5\pi}{2}$, ... à mesure que le mobile arrive respectivement aux points B, A', B', A, B. .... Si le mobile, partant toujours du point A que nous prenons pour *origine* des *arcs*, tournait en

Fig. 201.



sens inverse, il décrirait des *arcs négatifs* égaux respectivement en valeur absolue aux arcs positifs décrits dans le premier cas. D'après cela,

l'arc x est une variable qui peut passer par tous les états de grandeur de $-\infty$ à $+\infty$.

Tous les arcs qui, ayant la même origine A, *ont une même extrémité* M, *sont compris dans la formule* $2k\pi + \alpha$, *où* α *désigne le plus petit des arcs positifs qui vont de* A *en* M *et* k *un nombre entier quelconque positif, nul ou négatif;* en effet, deux arcs quelconques de la série diffèrent évidemment d'un certain nombre de tours, c'est-à-dire d'un multiple de 2π.

Cela posé, soient u et v deux *directions* données et OU et OV deux *demi-droites* menées par un point arbitraire O parallèlement à ces directions. Du point O comme centre, décrivons (*fig.* 199) un cercle de rayon 1, et désignons par N et M les points où ce cercle rencontre respectivement OU et OV; enfin prenons pour sens positif sur ce cercle le sens opposé au mouvement des aiguilles d'une montre. On nomme *angle de la direction u avec la direction v* ou *angle de la demi-droite* OU *avec la demi-droite* OV, l'angle qui a pour mesure $\alpha + 2k\pi$, α étant le plus petit arc positif ayant N pour origine et M pour extrémité, et k un nombre entier quelconque positif nul ou négatif. Cet angle, ainsi défini, n'est déterminé qu'à un multiple près de 2π; on le désigne par UOV; OU est le *côté origine* et OV le *côté extrême*.

En vertu de cette même définition, on aura pour l'angle VOU de la direction OV avec la direction OU, la valeur $-\alpha + 2k'\pi$; on a donc alors

$$\text{UOV} = -\text{VOU} + 2k''\pi. \tag{1}$$

305. Deux angles de même sommet sont dits consécutifs lorsque le côté origine du second est le côté extrême du premier.

Quand plusieurs angles ont le même sommet O, il est commode le plus souvent de les rapporter à un même côté origine OX; on y parvient à l'aide de la formule

$$\text{UOV} = \text{XOV} - \text{XOU} + 2n\pi, \tag{2}$$

que l'on démontre de la manière suivante. Désignons respectivement par α, β, γ les plus petites valeurs positives des arcs AN, NM, MA comptés sur le cercle de rayon 1 ayant O pour centre : on a évidemment,

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\lambda\pi,$$

λ étant un entier positif.

Mais les définitions du numéro précédent donnent

$$\text{XOU} = \alpha + 2k\pi,$$
$$\text{UOV} = \beta + 2k'\pi,$$
$$\text{XOV} = -\text{VOX} = -\gamma + 2k''\pi,$$

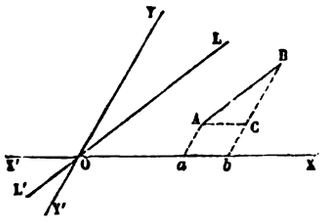
et il suffit de tirer de ces relations α, β, γ et de les porter dans la précédente pour tomber sur la formule (2) qu'on énonce ainsi : *L'angle*

UOV *de la direction* OU *avec la direction* OV *est égal à l'angle qu'une direction quelconque* OX *fait avec le côté extrême* OV, *diminué de l'angle que la même direction* OX *fait avec le côté origine* OU.

THÉORIE DES PROJECTIONS.

306. Soient X'X et Y'Y deux droites qui se coupent en un point O (*fig.* 202); A étant un point quelconque du plan XOY, on nomme *projection du point* A sur X'X le point *a* où cette droite rencontre la parallèle à Y'Y menée par A. La droite A*a* reçoit le nom de *projetante* du point A et la droite X'X celui d'*axe de projection*.

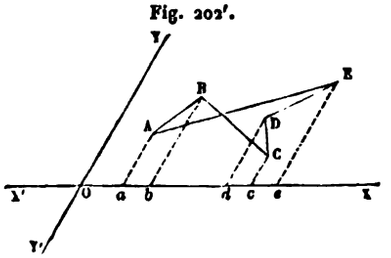
Fig. 202.



La projection est dite orthogonale ou oblique suivant que Y'Y est perpendiculaire ou oblique sur l'axe X'X.

On nomme *projection d'un segment* AB le segment *ab* qui a respectivement pour origine et pour extrémité les projections de l'origine et de l'extrémité du segment AB.

Fig. 202'.



On nomme *résultante* de plusieurs segments consécutifs AB, BC, CD, DE (*fig.* 202'), le segment AE qui a pour origine l'origine du premier, et pour extrémité l'extrémité du dernier; les segments AB, BC, CD, DE prennent le nom de *composantes*.

La projection de la résultante est la somme (*algébrique*) *des projections des composantes*; en d'autres termes, on a, quel que soit le sens positif adopté pour X'X,

$$ae = ab + bc + cd + de,$$

c'est-à-dire

$$ab + bc + cd + de + ea = 0.$$

En effet, en rapportant tous les segments qui figurent dans le premier membre à une origine commune, ce premier membre prend la forme

$$(ob - oa) + (oc - ob) + (od - oc) + (oe - od) + (oa - oe),$$

dans laquelle chaque terme est détruit par un terme égal et de signe contraire.

Tel est le *théorème général des projections*. La Trigonométrie permet de traduire cet énoncé en une relation entre les segments consécutifs et leurs inclinaisons sur l'axe de projection.

307. Pour arriver à ce but, nous commencerons par généraliser la propriété fondamentale des triangles rectilignes (1).

Assignons aux droites qui forment les côtés d'un triangle un sens positif choisi à volonté pour chacune d'elles; les segments et les angles relatifs à ces directions auront dès lors des signes bien déterminés, et l'on pourra énoncer le théorème suivant :

Dans tout triangle rectiligne ABC *on a, en grandeur et en signe, les relations*

$$\frac{AB}{\sin(\alpha, \beta)} = \frac{BC}{\sin(\beta, \gamma)} = \frac{CA}{\sin(\gamma, \alpha)}, \tag{1}$$

dans lesquelles α, β, γ *désignent respectivement les directions positives des droites opposées aux sommets* A, B, C.

En effet : observons d'abord que si les relations (1) sont vraies pour un choix particulier des directions positives, elles subsistent quand on change le sens positif de l'une des trois droites; car, si l'on change, par exemple, le sens positif de la droite opposée au sommet A, les facteurs BC, $\sin(\alpha, \beta)$, $\sin(\gamma, \alpha)$ changent de signe, tandis que les trois autres facteurs restent les mêmes. Pour achever la démonstration du théorème, il suffit donc de prouver qu'il a lieu pour un choix particulier des directions positives. Or, si l'on adopte pour sens positif de chaque droite le sens dans lequel elle est parcourue quand on décrit le contour du triangle en suivant l'ordre alphabétique, on a, en désignant comme à l'ordinaire, par a, b, c, A, B, C les valeurs absolues des côtés et des angles de ce triangle,

$$AB = +c, \quad BC = +a, \quad CA = +b,$$
$$(\alpha, \beta) = \pi - C, \quad (\beta, \gamma) = \pi - A, \quad (\gamma, \alpha) = \pi - B,$$

(1) Nous supposons au lecteur la connaissance des premiers éléments de *Trigonométrie*.

et les relations (1) se réduisent par suite aux formules

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

qui ont été démontrées en Trigonométrie.

Ajoutons que les angles (α, β), (β, γ), (γ, α), satisfont (n° 305) à la relation

$$(2) \qquad (\alpha, \beta) + (\beta, \gamma) + (\gamma, \alpha) = 2n\pi.$$

Le groupe des formules (1) et (2) renferme toute la théorie des triangles rectilignes avec le degré de généralité qu'il convient de lui donner pour les recherches géométriques.

Cela posé, revenons aux projections :

308. *La projection d'un segment sur un axe est égale au produit de ce segment par le rapport des sinus des angles que les directions positives de la base du segment et de l'axe font avec la direction positive des projetantes.*

En effet, imaginons par le point O (*fig.* 202) la parallèle L'OL à la base du segment proposé AB, et soient OX, OY, OL les directions positives de l'axe, des projetantes et de la base du segment. En menant par le point A une parallèle à X'X, on forme un triangle ABC dans lequel les directions positives sont fixées; et l'on a, d'après le numéro précédent,

$$\frac{AB}{\sin YOX} = \frac{CA}{\sin LOY},$$

d'où l'on déduit, en observant que la projection *ab* du segment AB est égale en grandeur et en signe à AC,

$$ab = AB \frac{\sin LOY}{\sin XOY}.$$

formule conforme à l'énoncé.

Quand les projections sont orthogonales, on a

$$XOY = \frac{\pi}{2}, \quad LOY = XOY - XOL = \frac{\pi}{2} - XOL + 2n\pi;$$

par suite,

$$ab = AB \sin\left(\frac{\pi}{2} - XOL\right) = AB \cos XOL.$$

Donc, *la projection orthogonale d'un segment est égale au produit de ce segment par le cosinus de l'angle de la direction positive de l'axe avec la direction positive de la base du segment.*

Il suffit, d'après cela, de remplacer dans le théorème des projections les projections des composantes et de la résultante par leurs expressions trigonométriques pour obtenir une relation entre les segments et les angles de la figure.

II. — Transversales dans le triangle.

309. Lorsqu'une transversale *abc* (*fig.* 203 et 203′) rencontre les trois côtés d'un triangle ABC, regardés comme indéfinis, chacun des points d'intersection a, b, c, est l'origine commune de deux segments ayant pour extrémités les extrémités du côté que l'on considère. Ainsi, sur AB, sont les

Fig. 203.

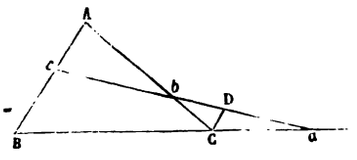
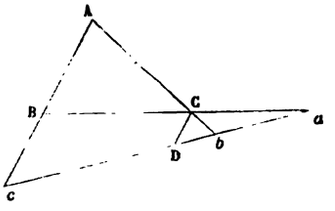


Fig. 203′.



deux segments cA et cB, sur BC les segments aB et aC, et sur CA les segments bC et bA. Les deux segments relatifs à un même côté sont de signes contraires ou de même signe (303), suivant que la transversale coupe le côté lui-même ou son prolongement.

THÉORÈME.

310. *Quand un triangle* ABC *est coupé par une transversale abc* (*fig.* 203 et 203′), *il existe, entre les segments que cette droite détermine sur les côtés, la relation*

$$\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB}=+1. \tag{1}$$

En effet, en menant CD parallèle à AB, on a, dans les triangles semblables aCD, aBc,

$$\frac{aB}{aC}=\frac{cB}{DC},$$

et, dans les triangles semblables bCD, bcA

$$\frac{bC}{bA}=\frac{DC}{cA};$$

il suffit donc de multiplier ces deux proportions membre à membre pour avoir la relation (1), qui se trouve ainsi démontrée en valeur absolue.

Il reste à prouver que, eu égard aux signes des segments, c'est le signe + qui convient au second membre de cette égalité. Or il ne peut se présenter que deux cas : la transversale coupe deux côtés et le prolongement du troisième (*fig.* 203), ou elle coupe les prolongements des trois côtés (*fig.* 203′). Dans le premier cas, deux des rapports qui figurent dans le premier membre sont négatifs, et le troisième positif; dans le second cas, les trois rapports sont positifs. Le produit des trois rapports a donc toujours le signe +.

Réciproquement, *si sur les trois côtés d'un triangle* ABC *considérés comme indéfinis, on prend trois points a, b, c, tels que la relation* (1) *soit satisfaite, ces trois points seront en ligne droite.*

En effet, en désignant par c' le point où la droite ab rencontre AB, on a, d'après ce qui précède,

$$\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{c'A}{c'B}=1;$$

par suite, en comparant cette relation à la relation (1), qui est satisfaite par hypothèse, on a

$$\frac{c'A}{c'B}=\frac{cA}{cB}.$$

Donc (303) c' coïncide avec c, et les trois points a, b, c, sont en ligne droite.

Observons que la relation (1), qu'on prend ici pour hypothèse, exige que le nombre des rapports négatifs du premier membre soit pair, c'est-à-dire que, parmi les trois points a, b, c, il y en ait un nombre pair situé sur les côtés et, par suite, un nombre impair sur les prolongements.

On peut encore remarquer que les numérateurs des trois rapports sont trois segments sans extrémités communes; il en est de même pour les dénominateurs.

Le théorème qui précède, attribué à Ménélaüs, géomètre grec antérieur de près d'un siècle à Ptolémée, sert à prouver que trois points d'une figure sont en ligne droite; outre cet usage spécial, il intervient souvent d'une manière utile comme intermédiaire dans certaines démonstrations.

Dans ce théorème, les seuls signes qui interviennent sont ceux des trois rapports formés par les couples de segments relatifs à chaque côté du triangle; il n'est donc pas nécessaire de fixer les signes des segments eux-mêmes. Il suffit, par exemple, dans la *fig.* 203, de donner à bC et à bA des signes opposés, que le sens positif des segments comptés sur AC soit AC ou CA.

Toutefois, il est souvent commode dans les applications de fixer le sens positif pour chaque côté du triangle ABC. Supposons, par exemple, qu'on adopte pour sens positif de chaque côté le sens dans lequel ce côté est parcouru quand on décrit le contour du triangle dans l'ordre alphabétique ABC; alors, dans la *fig.* 203, les segments cB et bA seront seuls positifs, les autres seront négatifs; dans la *fig.* 203′, tous les segments seront négatifs; dans les deux cas, le nombre des segments négatifs étant pair, le premier membre de la relation (1) aura le signe +, comme cela doit être.

THÉORÈME.

311. *Les droites menées d'un même point* O (*fig.* 204 et 205) *aux trois sommets d'un triangle* ABC *rencontrent les côtés opposés, considérés comme indéfinis, en trois points a, b, c, qui satisfont à la relation*

$$\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB}=-1. \tag{2}$$

En effet, le triangle ACa, coupé par la transversale Bb, donne

$$\frac{Ba}{BC}\cdot\frac{OA}{Oa}\cdot\frac{bC}{bA}=1.$$

Fig. 204.

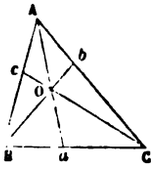
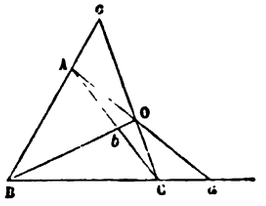


Fig. 205.



Le triangle ABa, coupé par la transversale Cc, donne à son tour

$$\frac{CB}{Ca}\cdot\frac{Oa}{OA}\cdot\frac{cA}{cB}=1.$$

En multipliant membre à membre ces deux égalités, on obtient la relation

$$\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\,\frac{cA}{cB}\cdot\frac{CB}{BC}=1,$$

qui ne diffère pas de la relation (2), puisque $\frac{CB}{BC}=-1$.

Réciproquement, *si, par les sommets d'un triangle* ABC, *on mène trois droites* Aa, Bb, Cc, *telles que la relation* (2) *soit vérifiée, ces trois droites passent par un même point.*

En effet, en désignant par O le point de concours de Aa et de Bb, et par c' le point où CO rencontre le côté AB, on a, d'après ce qui précède,

$$\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{c'A}{c'B}=-1;$$

d'où, en comparant avec la relation (2) qui est satisfaite par hypothèse,

$$\frac{cA}{cB}=\frac{c'A}{c'B}.$$

Les points c et c' coïncident donc (303); en d'autres termes, la droite Cc passe par l'intersection O de Aa et de Bb.

COROLLAIRE.

312. Le théorème qui précède, dû à Jean de Céva, géomètre italien du XVIe siècle, sert à prouver que trois droites d'une figure sont concourantes; il peut aussi intervenir comme auxiliaire utile dans certaines démonstrations.

Voici quelques exemples :

1° *Dans tout triangle* ABC, *les trois médianes* Aa, Bb, Cc, *passent par un même point;* car chacun des rapports qui figurent dans le premier membre de la relation (2) est alors égal à -1.

2° *Dans tout triangle* ABC, *les bissectrices* Aa, Bb, Cc, *des trois angles passent par un même point.*

En effet, en vertu du n° 184, les rapports négatifs qui figurent dans le premier membre de la relation (2) sont, en valeur absolue, respectivement égaux aux rapports

$$\frac{AB}{AC},\quad\frac{BC}{AB},\quad\frac{AC}{BC},$$

dont le produit est égal à 1.

On verrait de même que *les bissectrices des suppléments de deux angles et la bissectrice du troisième angle passent par un même point.*

3° *Dans tout triangle* ABC, *les trois hauteurs* Aa, Bb, Cc, *passent par un même point.*

En effet, les triangles semblables BAb, CAc donnent

$$\frac{cA}{bA}=\frac{AC}{AB},$$

et l'on a de même

$$\frac{aB}{cB} = \frac{AB}{BC}, \quad \frac{bC}{aC} = \frac{BC}{AC};$$

d'où l'on voit, en multipliant membre à membre, que le produit $\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB}$ est, en valeur absolue, égal à 1. D'ailleurs, chacun de ces trois rapports est négatif; donc leur produit est égal à -1.

SCOLIE.

313. *Si par les sommets d'un triangle* ABC *on mène trois droites quelconques rencontrant respectivement les côtés opposés en a, b, c, on a la relation* (*fig.* 205)

$$(3) \qquad \frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB} = \frac{\sin aAB}{\sin aAC}\cdot\frac{\sin bBC}{\sin bBA}\cdot\frac{\sin cCA}{\sin cCB}.$$

En effet, les triangles aAB et aCA donnent (307)

$$\frac{aB}{\sin BAa} = \frac{BA}{\sin AaB}, \quad \frac{aC}{\sin CAa} = \frac{CA}{\sin AaC};$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$\frac{aB}{aC} = \frac{AB}{AC}\frac{\sin aAB}{\sin aAC};$$

et il suffit de transporter cette valeur et les valeurs analogues de $\frac{bC}{bA}$, $\frac{cA}{cB}$ dans le premier membre de (3) pour tomber sur le second membre.

De ce lemme et des théorèmes de Ménélaüs et de Jean de Céva, résultent immédiatement les propositions suivantes :

1° *Si par les trois sommets d'un triangle* ABC *on mène trois droites rencontrant les côtés opposés aux trois points a, b, c situés en ligne droite, on a la relation*

$$\frac{\sin aAB}{\sin aAC}\cdot\frac{\sin bBC}{\sin bBA}\cdot\frac{\sin cCA}{\sin cCB} = 1.$$

2° *Quand trois droites issues des sommets d'un triangle* ABC *passent par un même point* O, *on a*

$$\frac{\sin OAB}{\sin OAC}\cdot\frac{\sin OBC}{\sin OBA}\cdot\frac{\sin OCA}{\sin OCB} = -1.$$

QUADRILATÈRE COMPLET.

314. On appelle *quadrilatère complet* la figure formée par le système de quatre droites ou, en d'autres termes, la figure formée en prolongeant jusqu'à leurs points de rencontre E et F les côtés opposés d'un quadrilatère ordinaire ABCD. Un quadrilatère complet ABCDEF (*fig.* 206) a six sommets et trois diagonales : les sommets sont les points d'intersection A, B, C, D, E, F, des quatre droites considérées, et les diagonales sont les droites AC, BD, EF, qui joignent les trois couples de sommets opposés.

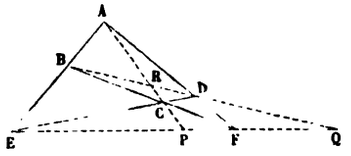
Nous allons démontrer, comme application de la théorie des transversales, deux propriétés fondamentales du quadrilatère complet.

THÉORÈME.

315. *Dans tout quadrilatère complet, chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres* (PAPPUS, *Math. coll.*, lib. III, propositio 129).

Soit, par exemple, la diagonale EF qui est coupée en P et en Q par les

Fig. 206.



diagonales AC et BD (*fig.* 206); il s'agit de prouver la relation (180, 303)

$$\frac{PE}{PF} : \frac{QE}{QF} = -1. \tag{1}$$

Il suffit, pour cela, de diviser membre à membre les deux égalités

$$\frac{QE}{QF} \cdot \frac{DF}{DA} \cdot \frac{BA}{BE} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{PE}{PF} \cdot \frac{DF}{DA} \cdot \frac{BA}{BE} = -1,$$

dont la première s'obtient en appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle AEF coupé par la transversale BD, et dont la seconde résulte de l'application du théorème de Céva au même triangle AEF et aux trois droites CA, CE, CF.

COROLLAIRE.

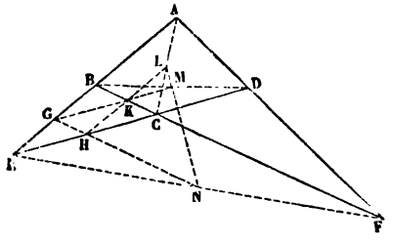
316. Ce théorème fournit un moyen très simple pour construire, avec la règle seule, le conjugué harmonique Q d'un point P par rapport à une droite EF. On mène par P une droite quelconque PCA ; en joignant deux points A et C pris à volonté sur cette droite aux points E et F, on obtient un quadrilatère complet dont la diagonale BD va couper EF au point demandé Q.

THÉORÈME.

317. *Dans tout quadrilatère complet, les milieux des trois diagonales sont en ligne droite.*

En effet, soient (*fig.* 207) ABCDEF un quadrilatère complet, et L, M, N, les milieux des diagonales AC, BD, EF. Les milieux G, H, K des côtés du

Fig. 207.



triangle BCE sont les sommets d'un nouveau triangle dont les côtés passent respectivement par L, M, N, et tout revient à démontrer (310) l'égalité

$$\frac{MG}{MK}\cdot\frac{LK}{LH}\cdot\frac{NH}{NG}=1.$$

Or l'exactitude de cette relation résulte de ce que les six longueurs qui composent son premier membre sont respectivement les moitiés des segments que la transversale ADF détermine sur les côtés du triangle BCE.

III. — Rapport anharmonique de quatre points.

318. On appelle *rapport anharmonique* de quatre points A, B, C, D, situés en ligne droite, le quotient des rapports des distances de deux quelconques de ces points aux deux autres. Tels sont, par exemple (*fig.* 208), les quotients

$$\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB},\quad \frac{DA}{DC}:\frac{BA}{BC},\ldots,$$

que nous désignerons respectivement par (ABCD), (ACDB), ...

Il importe de se familiariser avec cette notation. En appelant *premier point* celui qui répond à la première lettre à gauche dans la parenthèse, *deuxième point* celui qui répond à la seconde lettre à gauche, etc., on prend toujours le rapport des distances du troisième point au premier et au deuxième, et on le divise par le rapport des distances du quatrième point au premier et au deuxième.

Trois points A, B, C, étant donnés d'une manière quelconque sur une droite indéfinie, on peut déterminer sur cette droite un quatrième point D tel, que le rapport anharmonique des quatre points A, B, C, D, ait une valeur donnée λ en grandeur et en signe. Car la relation

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \lambda, \quad \text{ou} \quad \frac{DA}{DB} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{CA}{CB},$$

dont le second membre est entièrement connu, détermine (303) le point D. Toutefois, pour que ce point D soit distinct des trois premiers, il faut que λ n'ait aucune des trois valeurs $0, \infty$ ou $+1$. En effet, si λ était nul, on aurait, en vertu de la relation précédente, $DB = 0$, et D coïnciderait avec B; si λ était infini, on aurait $DA = 0$, et D coïnciderait avec A; enfin, si λ était égal à $+1$, on aurait $\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB}$, et D coïnciderait avec C. Ainsi, le *rapport anharmonique de quatre points distincts peut avoir une valeur quelconque, positive ou négative, excepté les valeurs* $0, \infty$ *et* $+1$.

Le rapport anharmonique de quatre points ABCD n'est pas altéré lorsqu'on échange entre eux deux de ces points, pourvu qu'en même temps on échange entre eux les deux autres. Ainsi l'on a

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA \cdot DB}{CB \cdot DA},$$

$$(CDAB) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC},$$

et par suite

$$(ABCD) = (CDAB).$$

Avec les quatre mêmes points A, B, C, D, on peut former vingt-quatre rapports anharmoniques, dont six seulement sont distincts. Lorsque, dans un théorème, nous parlerons du rapport anharmonique de quatre points, sans indiquer spécialement l'un de ces rapports, il faudra entendre que le théorème s'applique indifféremment à l'un quelconque d'entre eux.

319. On donne le nom de *faisceau* à un système quelconque (*fig.* 208) de droites OM, ON, OP, OQ, issues d'un même point O. Le point O est

dit le *centre* du faisceau, dont les droites OM, ON, OP, OQ, sont appelées les rayons.

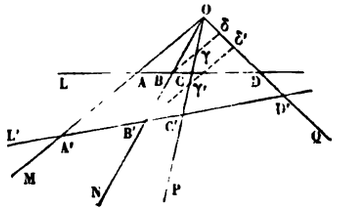
THÉORÈME.

320. *Lorsqu'un faisceau de quatre droites* OM, ON, OP, OQ, *est coupé par deux transversales* L *et* L', *le rapport anharmonique des quatre points* A, B, C, D, *déterminés sur la première transversale, est égal au rapport anharmonique des quatre points* A', B', C', D', *déterminés sur la seconde* (*fig.* 208).

Nous allons démontrer, par exemple, l'égalité (ABCD) = (A'B'C'D').

Les rapports $\frac{CA}{CB}$, $\frac{C'A'}{C'B'}$, ayant le même signe ainsi que les rapports $\frac{DA}{DB}$, $\frac{D'A'}{D'B'}$, il en sera de même pour les quotients ou rapports anharmoniques $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$, $\frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'}$, et il reste à démontrer l'égalité des valeurs absolues de ces derniers rapports.

Fig. 208.



Or, en menant par le point B la parallèle Bγδ à OA, on a, par les triangles semblables CAO et CBγ, DAO et DBδ, les proportions

$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{\gamma B}, \quad \frac{DA}{DB} = \frac{OA}{\delta B},$$

qui, divisées membre à membre, donnent

$$(ABCD) = \frac{\delta B}{\gamma B}.$$

En menant par B' la parallèle B'γ'δ' à OA, on obtiendrait de même

$$(A'B'C'D') = \frac{\delta' B'}{\gamma' B'}.$$

L'égalité manifeste des seconds membres des deux relations qui précèdent prouve l'égalité de leurs premiers membres.

On peut considérer la figure rectiligne A'B'C'D' comme la *perspective* ou *projection concourante* de la figure rectiligne ABCD, cette projection étant faite du centre O et suivant les rayons projetants OA, OB, OC, OD. De là, cet autre énoncé fort commode du théorème qui nous occupe : *le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est projectif*. Si le centre O est à l'infini, les rayons OA, OB, OC, OD, sont parallèles, et le théorème subsiste.

Voici de ce théorème fondamental une démonstration un peu différente qui a l'avantage de fournir une expression trigonométrique utile de la valeur du rapport anharmonique

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}.$$

Les triangles CAO, CBO donnent (307)

$$\frac{CA}{\sin AOC} = \frac{AO}{\sin OCA}, \quad \frac{CB}{\sin BOC} = \frac{BO}{\sin OCB},$$

d'où, en divisant,

$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{OB} \frac{\sin COA}{\sin COB};$$

on obtiendra de même

$$\frac{DA}{DB} = \frac{OA}{OB} \frac{\sin DOA}{\sin DOB},$$

et par suite

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{\sin COA}{\sin COB} : \frac{\sin DOA}{\sin DOB}.$$

Le rapport anharmonique qui figure dans le premier membre ne dépend donc que des angles du faisceau et nullement de la position de la transversale L; il a donc la même valeur pour la transversale L'.

RAPPORTS ANHARMONIQUES D'UN FAISCEAU.

321. On nomme *rapports anharmoniques d'un faisceau* de quatre droites les rapports anharmoniques des quatre points déterminés par ce faisceau sur une transversale quelconque. Ainsi, (ABCD), (ACDB), ... (318) sont des rapports anharmoniques du faisceau formé par les droites OM, ON, OP, OQ (*fig.* 208). On désigne ces rapports anharmoniques du faisceau par la notation (O.ABCD), (O.ACDB), ...

Il résulte d'ailleurs du n° 318 que le rapport anharmonique d'un faisceau ne change pas de valeur lorsqu'on échange deux rayons quelconques, pourvu qu'on échange en même temps les deux autres; de sorte qu'on a, par exemple, (O.ABCD) = (O.CDAB).

Il résulte de la seconde démonstration donnée au numéro précédent que le rapport anharmonique (O.ABCD) du faisceau a pour expression

$$\frac{\sin \mathrm{COA}}{\sin \mathrm{COB}} : \frac{\sin \mathrm{DOA}}{\sin \mathrm{DOB}}.$$

Il est évident, d'après cela, que deux faisceaux qui ont respectivement les mêmes angles ont les mêmes rapports anharmoniques. Voici deux exemples importants de faisceaux de cette nature :

1° *Si l'on joint un point quelconque* O *d'une circonférence à quatre points fixes* A, B, C, D, *de cette circonférence, le rapport anharmonique du faisceau ainsi obtenu est constant, quelle que soit la position du point* O *sur la circonférence.* Il résulte, en effet, des propriétés des angles inscrits que le point O se déplaçant, et les points A, B, C, D, restant fixes sur la circonférence, le faisceau conserve les mêmes angles. Ce rapport constant est ce qu'on appelle le *rapport anharmonique des quatre points* A, B, C, D, *du cercle.*

2° *Si l'on joint le centre d'un cercle aux points où quatre tangentes fixes sont coupées par une cinquième tangente, le rapport anharmonique du faisceau ainsi obtenu est constant, quelle que soit la cinquième tangente.* En effet, l'angle sous lequel on voit du centre la portion d'une tangente mobile comprise entre deux tangentes fixes est évidemment égal à la moitié de l'angle des deux rayons qui aboutissent aux points de contact de ces tangentes fixes. Cet angle est donc constant, et par suite le faisceau considéré conserve les mêmes angles, quelle que soit la position de la cinquième tangente.

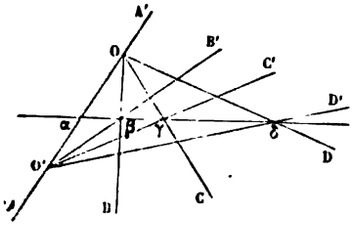
On voit par là que le *rapport anharmonique des points suivant lesquels une tangente mobile est coupée par quatre tangentes fixes est constant.* Ce rapport est ce qu'on appelle le *rapport anharmonique des quatre tangentes fixes.*

Le rapport anharmonique de quatre tangentes à un cercle est égal au rapport anharmonique des quatre points de contact; car le faisceau partant du centre du cercle, et aboutissant aux points d'intersection de ces quatre tangentes avec une cinquième, a ses rayons respectivement perpendiculaires à ceux du faisceau partant du point de contact de la cinquième tangente et aboutissant aux points de contact des quatre tangentes considérées (320, 71).

THEORÈME.

322. *Quand deux faisceaux de quatre droites* OA, OB, OC, OD, *et* O'A', O'B', O'C', O'D', *ont un rapport anharmonique égal et un rayon homologue commun* OO', *les trois points* β, γ, δ, *d'intersection des autres rayons homologues pris deux à deux, sont en ligne droite* (*fig.* 209).

Fig. 209.



En effet, désignons respectivement par α, δ, δ', les points où la droite $\beta\gamma$ rencontre OO', OD, O'D'; on aura, d'après l'hypothèse (320),

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (\alpha\beta\gamma\delta').$$

Donc δ et δ' coïncident (318), et les trois points β, γ, δ, sont en ligne droite.

Corollaire.

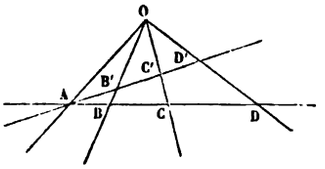
323. *Lorsque deux faisceaux de quatre droites correspondantes ont un rapport anharmonique égal, les autres rapports anharmoniques sont égaux de part et d'autre.*

En effet, en plaçant les deux faisceaux de façon que deux rayons homologues soient sur la même droite, l'égalité de l'un des rapports anharmoniques exigera que les autres rayons homologues se coupent sur

THÉORÈME.

324. *Quand deux figures rectilignes de quatre points* A, B, C, D, *et* A', B', C', D', *ont un rapport anharmonique égal et un point homologue commun* A, *les trois droites* BB', CC', DD', *qui joignent les autres points homologues pris deux à deux, concourent en un même point* O (*fig.* 210).

Fig. 210.



En effet, soit O le point de concours de BB' et de CC', et désignons par δ le point où OD' rencontre la droite ABC; on aura (320)

$$(A'B'C'D') = (ABC\delta).$$

Mais on a, par hypothèse,

$$(A'B'C'D') = (ABCD);$$

donc

$$(ABC\delta) = (ABCD).$$

Par suite (318) δ coïncide avec D, et la droite DD' passe par le point O.

Corollaire.

325. *Lorsque deux figures rectilignes de quatre points correspondants ont un rapport anharmonique égal, les autres rapports anharmoniques sont égaux de part et d'autre.*

En effet, en plaçant les deux droites qui portent les deux figures de manière que deux points homologues coïncident, l'égalité de l'un des rapports harmoniques exigera que les deux figures soient la per-

une même droite, et alors les deux faisceaux auront bien tous leurs rapports anharmoniques égaux, puisque ces rapports ne sont autres (320) que ceux des quatre points déterminés par les deux faisceaux sur une transversale commune.

spective l'une de l'autre, et, dès lors (320), tout rapport anharmonique de l'une sera égal au rapport anharmonique analogue de l'autre

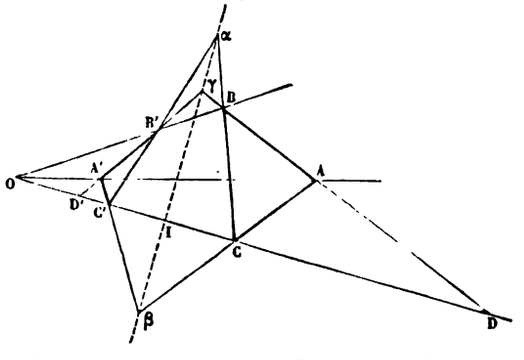
TRIANGLES HOMOLOGIQUES. — HEXAGONE DE PASCAL.

Le *Traité de Géométrie supérieure* de M. Chasles montre tout le parti qu'on peut tirer de la théorie si simple du rapport anharmonique. L'emploi des théorèmes qui précèdent (320, 322, 324) a une grande importance, comme on le verra surtout lorsque nous traiterons de l'homographie et de l'involution. Nous nous bornerons ici à quelques exemples; nous rencontrerons d'ailleurs d'autres applications dans le courant même de cet appendice.

326. *Quand deux triangles* ABC, A′B′C′, *ont leurs sommets situés deux à deux sur trois droites* OA′A, OB′B, OC′C, *concourant en un même point* O, *leurs côtés se rencontrent deux à deux* (BC *et* B′C′, AC *et* A′C′, AB *et* A′B′) *en trois points* α, β, γ, *situés en ligne droite* (*fig.* 211).

327. *Quand deux triangles* ABC, A′B′C′, *sont tels, que leurs côtés se coupent deux à deux* (BC *et* B′C′, AC *et* A′C′, AB *et* A′B′) *en trois points* α, β, γ, *situés en ligne droite, leurs sommets sont situés deux à deux sur trois droites* OA′A, OB′B, OC′C, *concourant en un même point* O (*fig.* 211).

Fig. 211.



En effet, désignons par D et D′ les points où la droite OC′C rencontre respectivement les côtés AB et A′B′. Le faisceau des quatre

En effet, soit I l'intersection de la droite αβγ et de CC′; on aura (320)

$$(C.\alpha\gamma I\beta) = (C'.\alpha\gamma I\beta).$$

droites $O\gamma$, OB, OA, OC, étant coupé par les deux transversales AB et A'B', on a (320)

$$(\gamma BAD) = (\gamma B'A'D'),$$

et par suite (325)

$$(C.\gamma BAD) = (C'.\gamma B'A'D').$$

Or, ces deux faisceaux ont un rayon homologue commun DD'; donc les points de concours γ, α, β, des trois autres couples de rayons homologues (322) sont en ligne droite.

Donc, en coupant le premier faisceau par AB et le second par A'B', et en appelant D et D' les points où ces droites coupent CC', on aura (323)

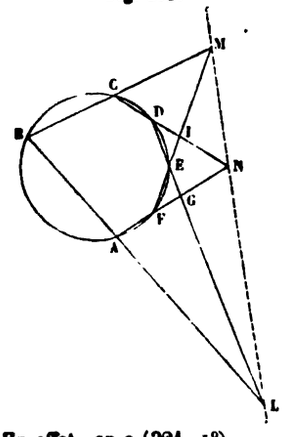
$$(B\gamma DA) = (B'\gamma D'A').$$

Or, ces deux figures rectilignes ont un point homologue commun γ; donc les droites BB', DD', AA', qui joignent les autres points homologues deux à deux, concourent (324) en un même point O.

Ces deux théorèmes, attribués à Desargues, géomètre du XVIIe siècle, ont été repris par Poncelet (*Traité des Propriétés projectives*), qui en a fait la base de sa *Théorie des figures homologiques*. Les deux triangles ABC, A'B'C', qui satisfont aux conditions précédentes, sont dits *homologiques;* le point O et la droite $\alpha\beta\gamma$ sont appelés le *centre et l'axe d'homologie*.

328. *Dans tout hexagone* ABCDEF *inscrit à une circonférence, les points de concours* L, M, N, *des trois couples de côtés opposés* AB *et* DE, BC *et* EF, CD *et* AF, *sont en ligne droite* (*fig.* 212).

Fig. 212.

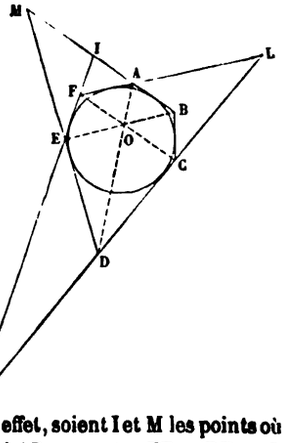


En effet, on a (321, 1°)

$$(A.BFED) = (C.BFED).$$

329. *Dans tout hexagone* ABCDEF *circonscrit à un cercle, les trois diagonales* AD, BE, CF, *qui unissent les sommets opposés, se coupent en un même point* O (*fig.* 213).

Fig. 213.



En effet, soient I et M les points où le côté AB rencontre FE et DE, et L et N les points où CD rencontre AF et

Par suite (320), en coupant le premier faisceau par la droite DE, le second par la droite FE, et nommant G l'intersection de AF et de DE, I l'intersection de EF et de CD, on aura

$$(\mathrm{LGED}) = (\mathrm{MFEI}).$$

Or, ces deux figures rectilignes ont un point homologue commun E; donc (324) les droites LM, GF, DI, qui joignent les autres points homologues deux à deux, se coupent en un même point N. Les trois points L, M, N, sont donc en ligne droite.

Ce théorème, dû à Pascal, et la démonstration si simple que nous venons d'exposer, subsistent quand même l'hexagone cesse d'être convexe.

FE; on aura (321, 2°), en considérant les deux côtés non contigus AB et CD coupés par les quatre autres,

$$(\mathrm{BAIM}) = (\mathrm{CLND}).$$

Par suite,

$$(\mathrm{E.BAIM}) = (\mathrm{F.CLND}).$$

Or, ces deux faisceaux ont un rayon homologue commun IN; donc (322) les points de concours O, A, D, des trois autres couples EB et FC, EA et FL, EM et FD, de rayons homologues, sont en ligne droite. Les trois droites AD, BE, CF, passent donc par un même point O.

Ce théorème est dû à Brianchon (*Journ. de l'École Polyt.*, 13ᵉ cahier), qui l'a déduit du théorème de Pascal par la considération des polaires, comme nous le verrons bientôt.

330. Si l'on considère les théorèmes des nᵒˢ 322, 326, 328 d'une part, et les théorèmes des nᵒˢ 324, 327, 329 de l'autre, on voit que, dans les premiers, il s'agit de *points en ligne droite*, et dans les seconds de *droites qui concourent en un même point*. On distingue en effet, dans la science de l'étendue, deux genres de propositions, les unes se rapportant à des *points*, les autres à des *droites*, et se correspondant en vertu de ce qu'on a nommé le *principe de dualité*. Un des grands avantages du rapport anharmonique est de se prêter indifféremment à ces deux genres de propositions *corrélatives*, et d'en fournir des démonstrations directes et corrélatives à leur tour. On peut voir, en effet, que, dans les propositions que nous avons placées en regard l'une de l'autre, on passe de l'énoncé et de la démonstration de l'une à l'énoncé et à la démonstration de l'autre, en substituant certains faisceaux de droites concourantes à certaines séries rectilignes de quatre points, et réciproquement.

Le théorème fondamental du nº 320 était connu des anciens; il se trouve dans les *Collections mathématiques* de Pappus, qui vivait à Alexandrie à la fin du IVᵉ siècle. « Aucune autre proposition, dit M. Chasles dans la préface du *Traité de Géométrie supérieure*, ne me paraît aussi propre à servir de lien entre les diverses parties d'une figure dont on veut *découvrir* ou *démontrer* les propriétés. La proposition la plus fréquemment employée est celle de la proportionnalité entre les côtés des

triangles semblables; mais ces triangles n'existent pas en général dans les données de la question, et il faut chercher à les former par des lignes auxiliaires, tandis que les rapports anharmoniques s'aperçoivent presque toujours dans la figure même ou peuvent s'y former aisément. »

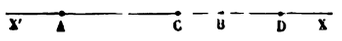
On se convaincra de la vérité de ces assertions en comparant la démonstration que nous venons de donner (328) du théorème de Pascal à celle qui résulterait, par exemple, de l'emploi de la *théorie des transversales*.

Pour démontrer par les transversales le théorème de Pascal, on considère le triangle formé par trois côtés non consécutifs de l'hexagone inscrit. Ce triangle est coupé par chacun des trois autres côtés, et, en appliquant successivement à chacune de ces transversales le théorème du n° 310, on obtient trois relations dont le produit, membre à membre, se réduit à une nouvelle égalité de même forme entre les segments que déterminent, sur les côtés du même triangle, les points de concours des côtés opposés de l'hexagone. La réciproque établie au n° 310 prouve alors que ces trois points de concours sont en ligne droite. On voit combien cette démonstration, que le lecteur rétablira sans peine d'après cette analyse, le cède pour la simplicité à celle du n° 328.

DIVISIONS ET FAISCEAUX HARMONIQUES.

331. Nous avons montré au n° 179 que, A et B étant deux points pris sur une droite indéfinie X'X (*fig.* 214), il existe sur cette droite

Fig. 214.



deux points C et D, situés l'un sur AB, l'autre en dehors, et tels que les rapports

$$\frac{CA}{CB}, \quad \frac{DA}{DB}$$

soient égaux en valeur absolue; les deux rapports étant d'ailleurs (303) le premier négatif, le second positif, on a

$$(1) \qquad \frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB} \quad \text{ou} \quad \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1.$$

Cette relation, que l'on nomme *proportion harmonique*, pouvant être mise sous la forme

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = -1,$$

on voit que, *si deux points* C *et* D *divisent harmoniquement une droite* AB, *les points* A *et* B *divisent à leur tour harmoniquement la droite* CD.

332. Il est souvent commode de rapporter à une même origine O les segments qui figurent dans la proportion harmonique : il suffit, pour cela, de remplacer ces segments par leurs valeurs

$$CA = OA - OC, \qquad CB = OB - OC,$$
$$DA = OA - OD, \qquad DB = OB - OD;$$

on obtient ainsi la relation générale

$$2(OA.OB + OC.OD) = (OA + OB)(OC + OD),$$

qui devient

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}, \quad \text{ou} \quad \overline{IA}^2 = IC.ID,$$

suivant qu'on place l'origine O au point A ou au milieu I de AB.

333. Voici quelques conséquences de la dernière formule :

1° Quand deux points C et D divisent harmoniquement une droite AB, ils sont situés d'un même côté du milieu I de cette droite (179);

2° Le conjugué du milieu de AB est à l'infini, et inversement le conjugué de l'∞ est le milieu de AB, en sorte que *deux points quelconques, le milieu de la droite qui les joint et le point à l'infini sur cette droite, forment une division harmonique.*

3° Lorsque le facteur IC augmente, le facteur ID diminue, A et B restant fixes. Dès lors, si C′ et D′ sont deux nouveaux points conjugués harmoniques par rapport à A et à B, et situés comme C et D à droite de I, les segments CD et C′D′ seront compris l'un dans l'autre. Ils seraient extérieurs l'un à l'autre si C′ et D′ étaient à gauche de I. Donc, *quand deux segments* CD, C′D′, *sont conjugués harmoniques par rapport à un troisième* AB, *ils sont compris l'un dans l'autre, ou ils n'ont aucune partie commune.* Et, par suite, *lorsque deux segments empiètent en partie l'un sur l'autre, on ne peut pas déterminer deux points qui les divisent l'un et l'autre harmoniquement.*

334. C'est l'expression

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

qui figure (331) au premier membre de la proportion harmonique (1). D'après cela (318), quatre points A, B, C, D, en ligne droite forment un système harmonique lorsque leur rapport anharmonique est égal à -1.

335. Quand on a n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, en ligne droite, si, après avoir choisi arbitrairement un point O de cette droite pour origine, on détermine sur la même ligne un point M tel qu'on ait, en grandeur et

en signe,

$$\frac{n}{\overline{OM}} = \frac{1}{\overline{OA_1}} + \frac{1}{\overline{OA_2}} + \ldots + \frac{1}{\overline{OA_n}},$$

le segment OM reçoit, d'après le géomètre anglais Maclaurin (*De linearum curvarum proprietatibus*, etc., 1750), le nom de *moyenne harmonique* des segments OA_1, OA_2, ..., OA_n.

Poncelet a, depuis, appelé le point M *centre des moyennes harmoniques* des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, par rapport à l'origine O (*Journal de Crelle*, t. III).

336. D'après cela, on peut dire (332) que :

Dans tout système harmonique de quatre points, la distance de l'un des points à son conjugué est la moyenne harmonique de la distance du même point aux deux autres;

Dans tout système harmonique de quatre points, un point est, par rapport à son conjugué, le centre des moyennes harmoniques des deux autres points.

337. On appelle *faisceau harmonique* tout faisceau de quatre droites OA, OB, OC, OD, dont le rapport anharmonique (O.ABCD) est égal à -1, c'est-à-dire (321) tout faisceau qui détermine sur une transversale quelconque un système de quatre points harmoniques (*fig.* 215). On dit alors que les *rayons* OC et OD sont *conjugués harmoniques* par rapport aux *rayons* OA et OB, ou qu'ils *divisent harmoniquement l'angle* AOB; et, de même que les *rayons* OA et OB sont *conjugués harmoniques* par rapport aux *rayons* OC et OD ou qu'ils *divisent harmoniquement l'angle* COD.

Il est clair, d'après ce qui précède, que *si, par un point* C *pris d'une manière quelconque dans le plan d'un angle* AOB, *on mène diverses sécantes telles que* ACB, *en prenant sur chaque sécante le point* D *conjugué harmonique du point* C *par rapport au segment* AB *intercepté entre les côtés de l'angle, le lieu du point* D *sera le rayon* OD *conjugué harmonique de* OC *par rapport à l'angle* AOB. Ainsi, pendant que la sécante tourne autour du point C, le conjugué D de ce point fixe décrit une droite fixe OD. On donne à la droite OD le nom de *polaire* du point C *par rapport à l'angle* AOB, et au point C le nom de *pôle* de la droite OD par rapport au même angle AOB.

Steiner a déduit de ce principe une démonstration très-élégante de la propriété fondamentale (315) du quadrilatère complet. Reportons-nous à la *fig.* 206. Soient P′ le conjugué harmonique de P par rapport à EF, et R′ le conjugué harmonique de R par rapport à BD; P′ et R′ devront appartenir l'un et l'autre à la droite conjuguée harmonique de AC par rapport à l'angle EAF et, aussi, à la droite conjuguée harmonique de AC par rapport à l'angle ECF. Les deux points P′ et R′ coïncident donc et ne diffè-

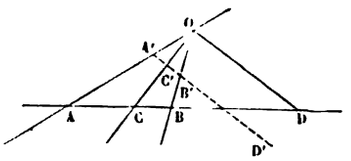
rent pas de l'intersection Q de BD et de EF; les systèmes EPFQ, BRDQ, sont par suite harmoniques; et l'on démontrerait d'une manière analogue qu'il en est de même du système ARCP.

On voit en outre que, *si par un point* Q, *pris dans le plan d'un angle* EAF, *on mène deux transversales* QDB, QFE, *le lieu du point d'intersection* C *des droites* BF, ED, *est la polaire du point* Q *par rapport à l'angle* EAF; de là résulte un moyen fort simple de construire, avec la règle seule, la polaire d'un point par rapport à un angle.

THÉORÈME.

338. *Dans un faisceau harmonique* OA, OB, OC, OD, *toute transversale* A'B'C'D', *parallèle à l'un des rayons* OD, *est coupée par les trois autres rayons en deux parties égales* (*fig.* 215).

Fig. 215.



En effet, dans le système harmonique A'B'C'D', le point D' étant à l'infini, puisque A'D' est parallèle à OD, son conjugué C' doit être au milieu du segment A'B' (333).

Réciproquement, *un faisceau de quatre droites* OA, OB, OC, OD, *est harmonique si une parallèle* A'B'C'D' *à l'un des rayons est divisée en deux parties égales par les trois autres.*

En effet, le point C' étant le milieu du segment A'B', ce segment est divisé harmoniquement par le point C' et par le point D' situé à l'infini sur A'B', c'est-à-dire par le point C' et par le point d'intersection de A'B' et de OD. Le faisceau divisant harmoniquement la transversale particulière A'B'C'D' divise harmoniquement toute autre transversale ACBD (320), et par suite est un faisceau harmonique.

Corollaires.

339. *Lorsque, dans un faisceau harmonique, deux rayons conjugués* OC *et* OD *sont rectangulaires, ces rayons sont les bissectrices des deux angles supplémentaires, formés par les deux autres rayons* OA *et* OB; car une transversale A'C'B', perpendiculaire à OC, étant alors parallèle à OD,

on a A'C' = C'B'; par suite, les triangles rectangles OC'A', OC'B', sont égaux, et OC est la bissectrice de l'angle AOB.

La proposition réciproque : *Un angle quelconque* AOB *est divisé harmoniquement par sa bissectrice* OC *et celle* OD *de son supplément*, résulterait pareillement du n° 338. Elle a d'ailleurs été démontrée directement au n° 193.

POLE ET POLAIRE DANS LE CERCLE.

THÉORÈME.

340. *Si, par un point* O *pris dans le plan d'un cercle* C, *on mène une sécante quelconque* OFE, *et qu'on détermine le conjugué harmonique* I *du point* O *par rapport à* EF, *le lieu géométrique du point* I, *lorsque la sécante tourne autour du point* O, *est une ligne droite perpendiculaire au diamètre* AB *qui passe par le point* O (*fig.* 216 et 217).

Fig. 216.

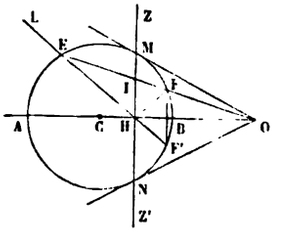
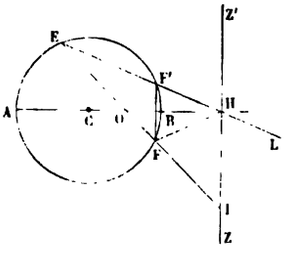


Fig. 217.



En effet, soit H le conjugué harmonique de O par rapport à AB; si l'on joignait EA et EB, le faisceau (EA, EH, EB, EO) serait harmonique et, comme EA et EB sont rectangulaires, EB serait la bissectrice de l'angle HEF (339). Mais dès lors les arcs BF et BF' étant égaux, la droite HO est la bissectrice de l'angle FHF', et, par suite, la perpendiculaire HZ est bissectrice de l'angle supplémentaire FHL. Or, dans tout triangle HEF, la base EF est divisée harmoniquement par les bissectrices HZ et HO de l'angle au sommet et de son supplément. Donc, le point I est situé sur la perpendiculaire HZ au diamètre AB.

341. On dit que le point O est le pôle de la droite HZ, et que la droite HZ est la *polaire* du point O par rapport au cercle C.

Le diamètre AB qui passe par le pôle étant divisé harmoniquement par

le pôle O et le pied H de la polaire, on a (332) en grandeur et en signe la relation

$$CH.CO = R^2,$$

dans laquelle R désigne le rayon du cercle C. Donc *le rayon du cercle est moyen proportionnel entre les distances du centre au pôle et à la polaire.*

De cette relation, ou bien de ce qui a été dit au n° 333 sur les positions relatives des deux points qui divisent harmoniquement un segment donné, résultent les propriétés suivantes :

1° Le pôle et la polaire sont situés d'un même côté du centre C; la polaire est extérieure au cercle si le pôle est intérieur; elle coupe le cercle si le pôle est extérieur. Dans ce dernier cas, *la polaire coïncide avec la corde de contact* MN *des tangentes issues du pôle* O (*fig.* 216); car, lorsque E et F se confondent en M, le point I, qui est toujours compris entre eux, vient aussi en M, de sorte que ce point de contact appartient au lieu des points I, c'est-à-dire à la polaire du point O.

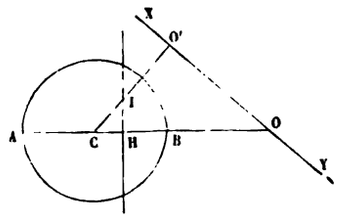
2° *La polaire du centre est à l'infini, et la polaire d'un point qui s'est éloigné indéfiniment dans une direction donnée est le diamètre perpendiculaire à cette direction.* — Inversement, le pôle d'une droite située à l'infini est au centre, et le pôle d'un diamètre est à l'infini sur la perpendiculaire à ce diamètre.

3° *La polaire d'un point du cercle est la tangente en ce point;* et, inversement, le pôle d'une tangente est son point de contact.

THÉORÈME.

342. *Les polaires de tous les points d'une droite passent par le pôle de cette droite;* et, inversement, *les pôles de toutes les droites qui passent par un point sont situés sur la polaire de ce point* (*fig.* 218).

Fig. 218.



En effet, soient XY une droite quelconque, I son pôle par rapport au cercle C, et O l'un quelconque de ses points. Si l'on abaisse du point I la

perpendiculaire IH sur CO, on aura (190), à cause des droites antiparallèles IH, OO',

$$CH.CO = CI.CO',$$

et par suite

$$CH.CO = R^2.$$

Donc la droite IH est la polaire du point O. Il résulte de là : 1° que la polaire IH d'un point quelconque O de la droite XY passe par le pôle I de cette droite ; 2° que le pôle I d'une droite quelconque XY passant par un point O est située sur la polaire IH de ce point.

COROLLAIRE.

343. *Toute droite a pour pôle l'intersection des polaires de deux de ses points. Tout point a pour polaire la droite qui joint les pôles de deux droites menées par ce point.*

THÉORÈME.

344. *Si, par un point* O *pris dans le plan d'un cercle, on mène deux transversales* OAB, OA'B', *qu'on tire les droites* AA', BB', *qui se coupent en* M, *et les droites* AB', BA', *qui se coupent en* N, *le lieu géométrique des points* M *et* N, *lorsqu'on fait varier les sécantes* OAB, OA'B', *est la polaire du point* O (*fig.* 219 et 220).

Fig. 219.

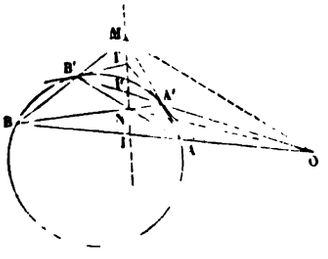
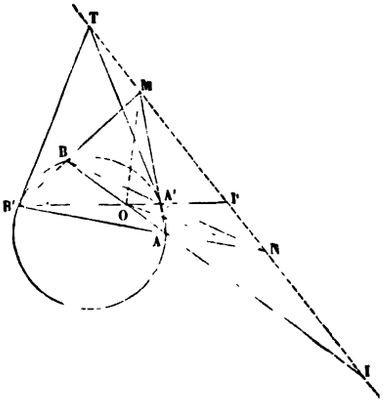


Fig. 220.

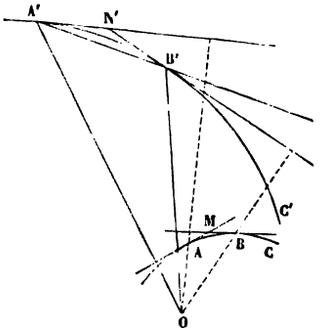


En effet, si l'on tire MN et si l'on nomme I et I' les points où cette droite coupe AB et A'B', on voit, en considérant le quadrilatère complet

qui reçoit le nom de *cercle directeur*. Tels sont, par exemple, un polygone quelconque inscrit dans un cercle et le polygone circonscrit formé en menant des tangentes par les sommets du polygone inscrit (*fig.* 222).

Considérons en second lieu une courbe quelconque ABC (*fig.* 223). En prenant, par rapport à un cercle quelconque O situé dans son plan,

Fig. 223.



les pôles A', B',..., des diverses tangentes MA, MB,..., on obtient une nouvelle courbe A'B'C' dont les tangentes N'A', N'B',... sont les polaires des points A, B,..., de la première. En effet, le point d'intersection des tangentes MA et MB a pour polaire (343) la corde A'B'; et lorsque B tend vers A, la corde A'B' et le point M, qui sont toujours polaire et pôle, tendent respectivement vers la tangente A'N' et vers le point A. Ainsi, on peut considérer la seconde courbe A'B'C' comme obtenue, soit en prenant les pôles des tangentes, soit en prenant les polaires des points de la première courbe ABC. Dans la seconde manière d'opérer, la courbe A'B'C' est *définie par ses tangentes successives* dont on dit qu'elle est l'*enveloppe*. Inversement, si l'on cherchait les pôles des tangentes ou les polaires des points de la seconde figure, on retomberait sur la première.

Ces deux courbes sont dites *polaires réciproques* par rapport au cercle directeur O. *Le rayon du cercle directeur est* d'ailleurs (341) *moyen proportionnel entre les distances de son centre à un point quelconque de l'une des courbes et à la tangente correspondante de l'autre courbe.* Ainsi, la polaire réciproque d'un cercle concentrique au cercle directeur est un autre cercle concentrique, et le rayon du cercle directeur est moyen proportionnel entre les rayons des deux autres cercles. En particulier, le cercle directeur est à lui-même sa polaire réciproque. Lorsque le cercle considéré n'est pas concentrique au cercle directeur, sa polaire réciproque n'est plus un cercle, comme nous le montrerons plus tard.

349. Cela posé, voici en quoi consiste la méthode des polaires réciproques :

Une figure quelconque étant donnée, si l'on forme sa polaire réciproque par rapport à un cercle directeur, on obtiendra une nouvelle figure corrélative de la première, c'est-à-dire telle que ses points et ses droites seront respectivement remplacés par des droites et des points. Ainsi, à une série rectiligne de points dans l'une des figures répondra dans l'autre un faisceau de droites, et réciproquement; à des points en ligne droite sur une courbe, répondront autant de tangentes issues d'un même point et menées à la courbe correspondante; le point d'intersection de plusieurs courbes sera remplacé par une tangente commune aux courbes correspondantes, etc.... Toute propriété *descriptive*, c'est-à-dire n'ayant rapport qu'à la situation des lignes, indépendamment de toute condition de grandeur, conduira à une autre propriété de la figure polaire réciproque que l'on pourra énoncer immédiatement d'après ce qui précède, et qui sera par là même démontrée. Il n'est pas même nécessaire de construire la figure; il suffit, pour passer d'un énoncé à l'autre, de changer les mots *points* et *lignes* en *lignes* et *points*.

C'est ainsi que l'un des deux théorèmes (326, 327) sur les triangles homologiques résulte de l'autre, que la propriété de l'hexagone circonscrit, due à Brianchon, résulte du théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit (328, 329), etc. Toute conséquence de l'un de ces deux derniers théorèmes doit aussi conduire à une conséquence corrélative de l'autre; voici quelques exemples :

Dans tout pentagone inscrit dans un cercle, le point de concours de la tangente menée par un sommet et du côté opposé, et les points de concours des autres côtés non consécutifs, sont trois points en ligne droite.

Dans tout quadrilatère inscrit dans un cercle, si l'on mène des tangentes par deux sommets adjacents, le point de concours de chacune d'elles avec le côté passant par le point de contact de l'autre, et le point de concours des deux autres côtés, sont trois points en ligne droite.

Dans tout quadrilatère inscrit dans un cercle, les points de con-

Dans tout pentagone circonscrit à un cercle, la droite qui joint un sommet au point de contact du côté opposé et les diagonales joignant les autres sommets non consécutifs sont trois droites qui se coupent au même point.

Dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle, si l'on prend les points de contact de deux côtés adjacents et que l'on joigne le point de contact de chaque côté avec le sommet de l'autre côté, et les deux autres sommets opposés, on aura trois droites se coupant au même point.

Dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle, les deux diagonales

cours des tangentes menées par les sommets opposés, et les points de concours des côtés opposés, sont quatre points en ligne droite.

Dans tout triangle inscrit dans un cercle, les points de concours de chaque côté avec la tangente menée par le sommet opposé sont trois points en ligne droite.

et les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés, sont quatre droites se coupant au même point.

Dans tout triangle circonscrit à un cercle, les droites qui joignent le point de contact de chaque côté avec le sommet opposé se coupent au même point.

Les théorèmes de la colonne de gauche sont des corollaires du théorème de Pascal; ce théorème, étant en effet indépendant de la longueur des côtés de l'hexagone inscrit, subsiste lorsque l'on remplace quelques-uns de ces côtés par des tangentes à la circonférence. Les théorèmes de la colonne de droite résultent de ceux de la colonne de gauche, d'après la théorie des polaires réciproques.

On peut aussi considérer les théorèmes de la colonne de droite comme des corollaires du théorème de Brianchon, dans lequel on suppose certains angles égaux à deux droits, et les théorèmes de la colonne de gauche comme résultant alors de ceux de la colonne de droite, d'après la théorie des polaires réciproques.

C'est surtout à propos des coniques qu'on pourra voir toute la fécondité de cette belle méthode des polaires réciproques, due au général Poncelet. Toutefois, il faut remarquer que cette théorie, si utile comme méthode d'invention, puisqu'elle permet, suivant la piquante expression de Gergonne, *de faire en quelque sorte de la Géométrie en partie double*, a, comme tous les procédés de transformation, l'inconvénient de laisser ignorer comment la proposition que l'on découvre se rattache à une théorie, et comment on pourrait s'y prendre pour la démontrer directement. « En général, comme le remarque M. Chasles, il ne suffit pas qu'une proposition soit vraie pour qu'on puisse en faire un usage utile en Mathématiques, il faut encore connaître toutes ses dépendances avec les diverses propositions qui se rattachent au même sujet. »

350. Nous terminerons cet aperçu par quelques mots sur la transformation des propriétés *métriques*, c'est-à-dire des propriétés dans lesquelles on a égard non-seulement à la situation des lignes, mais encore à certaines relations numériques entre les angles ou les segments des diverses lignes de la figure.

D'abord, les *propriétés métriques angulaires* se transforment simplement par la théorie des polaires réciproques, au moyen du principe suivant :

L'angle de deux droites est égal à l'angle des droites qui joignent leurs pôles au centre du cercle directeur, car ces deux angles ont les côtés respectivement perpendiculaires.

Comme exemple, transformons cette proposition si connue : *Dans tout triangle* ABC, *les hauteurs* Aa, Bb, Cc, *se coupent au même point* I.

Soient O le centre du cercle directeur, et A'B'C' le triangle polaire réciproque de ABC, A' étant le pôle de BC, B' celui de CA et C' celui de AB. Les trois hauteurs Aa, Bb, Cc, se coupant au même point I, leurs pôles α, 6, γ, doivent être sur une même droite, polaire de I. Or, le pôle α de Aa doit se trouver d'une part sur B'C' polaire de A, et de l'autre sur la perpendiculaire menée par O à la droite OA', puisque, en vertu du principe énoncé plus haut, l'angle αOA' doit être droit comme l'angle AaB des polaires Aa, BC, des points α et A'. On a donc ce théorème :

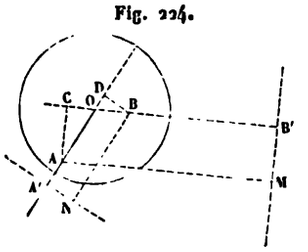
Si l'on joint un point fixe O *pris arbitrairement dans le plan d'un triangle* A'B'C' *aux trois sommets* A', B', C', *les perpendiculaires menées par ce point* O *aux trois droites* OA', OB', OC', *ainsi obtenues, vont couper respectivement les côtés opposés* B'C', C'A', A'B', *en trois points* α, 6, γ, *situés en ligne droite.*

331. Quant aux *relations segmentaires,* on en transforme un assez grand nombre à l'aide des deux principes suivants :

1° *Le rapport anharmonique de quatre points situés en ligne droite dans une figure est égal au rapport anharmonique du faisceau des quatre droites correspondantes de la figure polaire réciproque,* car ce faisceau et celui qu'on obtient en joignant les quatre points au centre du cercle directeur ont respectivement leurs angles égaux, d'après le principe du n° 330.

2° *Le rapport* $\frac{AO}{BO}$ *des distances de deux points quelconques* A *et* B *au centre* O *du cercle directeur est égal au rapport* $\frac{AM}{BN}$ *des distances de chacun de ces points à la polaire de l'autre* (*fig.* 224). Car A'N étant la

Fig. 224.



polaire de A et B'M celle de B, menons AC perpendiculaire sur OB et BD perpendiculaire sur OA ; nous aurons, en désignant par R le rayon du cercle directeur,

$$R^2 = OA.OA' = OB.OB', \quad \text{d'où} \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}.$$

Mais BD et AC étant antiparallèles par rapport à l'angle O, on a

$$OA.OD = OC.OB, \quad \text{d'où} \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD};$$

par suite,

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB' + OC}{OA' + OD} = \frac{CB'}{DA'} = \frac{AM}{BN}.$$

352. On déduit, par exemple, bien simplement du premier principe que *le rapport anharmonique de quatre tangentes d'un cercle est égal au rapport anharmonique des quatre points de contact.* Nous nous bornerons à cette application; mais on sentira aisément la portée de ce premier principe en remarquant qu'il sert à transformer le rapport $\frac{CA}{CB}$ des deux segments formés par trois points quelconques A, B, C, en ligne droite. En effet, l'introduction du point situé à l'infini sur cette droite permet de considérer ce rapport comme égal au rapport anharmonique (A, B, C, ∞); si donc on désigne par A', B', C', les polaires des points A, B, C, par D' la polaire du point à l'infini, et par α, β, γ, δ, les points où une transversale choisie à volonté rencontre le faisceau de ces quatre droites, on aura

$$\frac{CA}{CB} = (ABC\infty) = (\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta} : \frac{\delta\alpha}{\delta\beta}.$$

353. Le second principe est dû à M. Salmon. En voici une application :

ABCD étant un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R, et M étant un point quelconque de ce cercle, on a l'identité

$$(MA.MB)(MC.MD) = (MA.MD)(MB.MC).$$

D'ailleurs, si ME, MF, MG, MH, sont les perpendiculaires abaissées de M sur les côtés AB, BC, CD, DA, du quadrilatère, les produits renfermés entre parenthèses sont respectivement (239) proportionnels à ME, MG, MH, MF; on a donc

$$ME.MG = MH.MF, \tag{1}$$

c'est-à-dire que, *dans tout quadrilatère inscrit dans un cercle, le produit des distances d'un point quelconque de la circonférence à deux côtés opposés est égal au produit des distances du même point aux deux autres côtés.* Transformons ce théorème par la méthode des polaires réciproques; le cercle O étant pris pour cercle directeur, au quadrilatère inscrit ABCD répondra le quadrilatère circonscrit A'B'C'D' et, au point M, la tangente MT en ce point. Soient A'L, B'N, C'P, D'Q, les distances des sommets A', B', C', D', à la tangente MT. Puisque A' est le pôle de AB et

M le pôle de MT, on aura, par le principe de M. Salmon,

$$\frac{ME}{A'L} = \frac{MO}{A'O}, \quad \text{d'où} \quad ME = \frac{MO}{A'O} \cdot A'L.$$

Ainsi, les lignes ME, MG, MH, MF, sont respectivement proportionnelles aux distances A'L, C'P, D'Q, B'N, et la relation (1) devient

$$A'L.C'P = \frac{A'O.C'O}{D'O.B'O} \cdot D'Q.B'N,$$

c'est-à-dire que, *dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle, le produit des distances de deux sommets opposés à une tangente quelconque est dans un rapport constant avec le produit des distances des deux autres sommets à la même tangente.*

Le théorème sur le quadrilatère inscrit peut s'étendre à un polygone inscrit quelconque d'un nombre pair de côtés. En effet, si P est un polygone inscrit de $2n$ côtés, et P' le polygone inscrit de $2n - 2$ côtés qu'on obtient en détachant de P un quadrilatère au moyen d'une diagonale, on voit tout de suite que, si le théorème a lieu pour le polygone P' de $2n - 2$ côtés, il subsiste pour le polygone P de $2n$ côtés.

On peut même appliquer le théorème à un polygone quelconque, en remarquant qu'on peut considérer tout polygone inscrit comme ayant un côté infiniment petit dirigé suivant la tangente en l'un des sommets.

De là résultent les deux propositions suivantes, en regard desquelles nous avons placé les deux propositions corrélatives qui en découlent d'après la méthode des polaires réciproques.

Quand un polygone d'un nombre pair de côtés est inscrit dans un cercle, le produit des distances d'un point quelconque de la circonférence aux côtés de rangs pairs est égal au produit des distances du même point aux côtés de rangs impairs.

Quand un polygone est inscrit dans un cercle, le produit des distances d'un point quelconque de la circonférence aux divers côtés est égal au produit des distances du même point aux tangentes menées par les sommets du polygone.

Quand un polygone d'un nombre pair de côtés est circonscrit à un cercle, le produit des distances des sommets de rangs pairs à une tangente quelconque est dans un rapport constant avec le produit des distances des sommets de rangs impairs à la même tangente.

Quand un polygone est circonscrit à un cercle, le produit des distances de ses sommets à une tangente quelconque est dans un rapport constant avec le produit des distances des points de contact des côtés à la même tangente.

IV. — Homothétie.

PROPRIÉTÉS DES FIGURES HOMOTHÉTIQUES.

354. Étant donné un système quelconque A, B, C,..., de points situés dans un plan (*fig.* 225 et 226), si, sur les rayons SA, SB, SC,..., issus

Fig. 225.

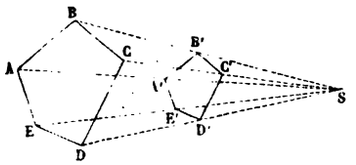
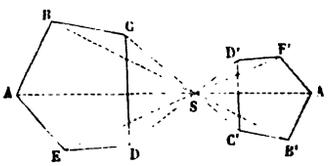


Fig. 226.



d'un point S choisi arbitrairement dans le plan, on prend à partir de ce point des segments SA', SB', SC',..., tels, qu'on ait

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \ldots = K,$$

K étant un nombre quelconque, on dit que le nouveau système de points A', B', C',..., est *homothétique* au système primitif ABC,....

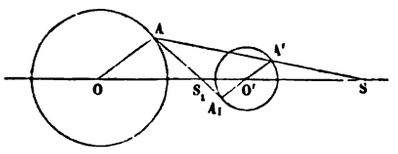
Le point S est dit le *centre*, et le nombre K, le *rapport d'homothétie*. Si K est positif, les deux segments SA et SA' sont de même sens, et les points A et A' sont d'un même côté du point S (*fig.* 225). Si K est négatif, les segments SA et SA' sont de sens contraires, et les points A et A' sont de part et d'autre du point S (*fig.* 226); dans le premier cas (*fig.* 225), les deux systèmes sont dits *homothétiques directs;* dans le second (*fig.* 226), ils sont *homothétiques inverses*. Quand deux systèmes sont homothétiques inverses, il suffit évidemment, pour les rendre homothétiques directs, de faire tourner l'un d'eux de 180 degrés autour du centre S. On obtient donc tous les systèmes homothétiques à un système donné en faisant varier la position du centre S et en donnant à K toutes les valeurs positives de 0 à ∞.

355. Suivant que les points du premier système ABC... sont isolés ou forment des lignes continues, les points du système homothétique A'B'C'... sont à leur tour isolés ou forment des lignes continues.

Supposons, par exemple, que la figure primitive soit une circonférence OA dont le centre est O (*fig.* 227), et cherchons la figure homothétique, c'est-à-dire le lieu des points A', tels, que $\frac{SA'}{SA} = K$. Si l'on prend sur SO une longueur SO' telle, que $\frac{SO'}{SO} = K$, les deux triangles semblables (200)

SOA, SO'A', donnent $\frac{O'A'}{OA} = K$; par suite O'A' est constant comme OA,

Fig. 227.



et le lieu est une circonférence dont le point O' est le centre. Ainsi *la figure homothétique d'une circonférence est une circonférence.*

THÉORÈME.

356. *Dans deux systèmes homothétiques, la droite* AB *qui joint deux points quelconques du premier système et la droite* A'B' *qui joint les points homologues du second système sont parallèles et dans le rapport* K (*fig.* 225 et 226).

En effet, les droites AB et A'B', divisant les rayons SA et SB dans le même rapport K, sont parallèles, et l'on a en outre

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{SA'}{SA} = K.$$

Corollaires.

357. Si trois points M, N, P du premier système sont en ligne droite, il en est de même des trois points homologues M', N', P' du second système; car les droites M'N', M'P' ayant un point commun M' et étant l'une et l'autre parallèles (356) à MNP, coïncident. *La figure homothétique d'une ligne droite est donc une ligne droite parallèle à la première;* ces deux droites sont dites *homologues.*

Si un point M coïncide avec le centre S d'homothétie, il en est de même de son homologue M'; car la relation

$$SM' = K.SM$$

montre que SM' s'annule en même temps que SM. Donc, *si une droite passe par le centre d'homothétie, son homologue* y passe également et, par suite, *coïncide avec elle;* réciproquement, *si deux droites homologues coïncident, elles passent par le centre d'homothétie.*

358. *L'angle de deux droites est égal à celui de leurs droites homologues.* Par suite, *la figure homothétique d'un polygone est un polygone semblable au premier.* Les côtés du nouveau polygone sont parallèles aux côtés homologues du premier, et leur rapport de similitude est égal à K.

359. *Les tangentes en deux points homologues de deux courbes homothétiques sont parallèles* comme limites de sécantes parallèles.

THÉORÈME.

360. *Deux systèmes sont homothétiques s'il existe dans leur plan deux points* O *et* O′ *tels, que les droites qui joignent le point* O *aux divers points du premier système, et les droites qui joignent le point* O′ *aux divers points du second système, soient parallèles et dans un même rapport* K (*fig.* 227).

En effet, si les droites OA et O′A′ sont parallèles et de même sens, la droite AA′ ira couper le prolongement de OO′ en un point S tel, que

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'A'}{OA} = K = \frac{SA'}{SA}.$$

Le point S est donc le même, quel que soit le couple de points homologues A et A′ considéré; et, par suite, les deux systèmes sont homothétiques directs, et ont le point S pour centre et le nombre K pour rapport d'homothétie.

Si les droites OA et O′A_1 sont parallèles et de sens contraire, la droite AA_1 coupe OO′ en un point S_1 tel, que

$$\frac{S_1O'}{S_1O} = \frac{O'A_1}{OA} = K = \frac{S_1A_1}{S_1A},$$

et les deux systèmes, alors homothétiques inverses, ont le point S_1 pour centre et le nombre K pour rapport d'homothétie.

COROLLAIRES.

361. *Deux polygones semblables* ABCDE, A′B′C′D′E′, *qui ont leurs côtés parallèles, sont homothétiques.* En effet (209), si l'on prend dans le plan du premier polygone un point O quelconque et si l'on détermine dans le second polygone le point O′ homologue de O, les droites OA et O′A′, OB et O′B′, OC et O′C′, ..., seront parallèles et dans le rapport K. Donc les polygones seront homothétiques.

L'homothétie est directe (*fig.* 225) ou inverse (*fig.* 226), suivant que les deux polygones ont leurs côtés parallèles de même sens ou de sens contraires.

362. *Deux circonférences quelconques sont homothétiques directes et homothétiques inverses* (*fig.* 227).

En effet, le rapport $\frac{O'A'}{OA}$ de deux rayons parallèles et de même sens étant constant, les deux circonférences sont homothétiques directes, et

elles ont un *centre d'homothétie directe* S situé au delà de la ligne des centres, de telle sorte qu'on ait

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{R'}{R},$$

R′ et R étant les rayons des deux cercles.

De même, le rapport $\frac{O'A_1}{OA}$ de deux rayons parallèles et de sens contraires étant constant, les deux circonférences sont aussi homothétiques inverses, et elles ont un *centre d'homothétie inverse* S_1 situé sur la ligne des centres, de telle sorte qu'on ait

$$\frac{S_1O'}{S_1O} = -\frac{R'}{R}.$$

La comparaison des deux relations précédentes donne

$$\frac{SO'}{SO} : \frac{S_1O'}{S_1O} = -1.$$

Donc *les deux centres d'homothétie divisent harmoniquement la ligne des centres* OO′ *des deux cercles.*

Les tangentes communes extérieures passent par le centre d'homothétie directe, et les tangentes communes intérieures par le centre d'homothétie inverse. C'est sur cette propriété qu'est fondée la construction du n° 260.

Lorsque les deux cercles sont tangents, leur point de contact est un centre d'homothétie, *directe* si le contact est *intérieur*, *inverse* si le contact est *extérieur*.

THÉORÈME.

363. *Deux systèmes* P′ *et* P″, *homothétiques à un troisième* P, *sont homothétiques entre eux* (*fig.* 228 et 229).

Soient A un premier point du système P, et A′ et A″ ses points homologues dans les systèmes P′ et P″. Joignons le point A à un point quelconque M du système P, et joignons A′ et A″ aux points M′ et M″ homologues de M dans les systèmes P′ et P″. Les systèmes P′ et P étant homothétiques, les droites A′M′ et AM seront parallèles et dans un certain rapport K″; de même, les droites A″M″ et AM seront parallèles et dans le rapport K′ d'homothétie des systèmes P″ et P. Donc les droites A′M′ et A″M″ sont parallèles, et dans le rapport constant $\frac{K''}{K'}$. Donc (360), les systèmes P′ et P″ sont homothétiques.

COROLLAIRES.

364. Si $K'' = K'$, les systèmes P′ et P″ ont un rapport d'homothétie égal à l'unité; ils sont donc superposables. Il résulte de là que, pour avoir tous les systèmes homothétiques à un système donné, il n'est pas nécessaire de faire varier le centre (354) : il suffit, en conservant le même centre, de faire varier K de zéro à l'infini.

365. Si P est homothétique direct avec chacun des systèmes P′ et P″, AM et A′M′ sont de même sens, comme AM et A″M″, et par suite aussi A′M′ et A″M″; de sorte que P′ et P″ sont homothétiques directs (*fig.* 228).

On verra de même que, si P″ est homothétique inverse avec chacun des systèmes P et P′, P et P′ sont homothétiques directs (*fig.* 229).

Si P est homothétique direct avec l'un des systèmes P′ et P″, et homothétique inverse avec l'autre, P′ et P″ sont homothétiques inverses (*fig.* 229).

Parmi les trois systèmes homothétiques ainsi formés, il y en a donc toujours un nombre impair (1 ou 3) dont l'homothétie est directe.

Dans tous les cas, *les trois centres d'homothétie* S, S′, S″, *sont en ligne droite* (*fig.* 228 et 229).

Fig. 228.

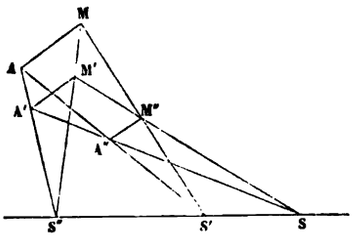
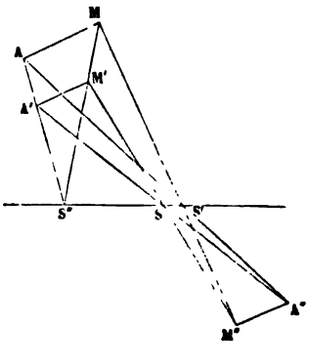


Fig. 229.



En effet, la droite S′S″, considérée comme appartenant au système P, a pour homologue dans le système P′ cette droite elle-même, puisque (357) elle passe par le centre d'homothétie S′ de P et de P′. Cette droite, considérée comme appartenant au système P, est aussi à elle-même son homologue dans le système P″, puisqu'elle passe par S″, centre d'homothétie de P et de P″. Donc, cette droite S′S″ (357) passe par le centre S d'homothétie des systèmes P′ et P″.

366. Trois cercles considérés deux à deux ont trois centres d'homothétie directe et trois centres d'homothétie inverse (362). Les trois centres d'homothétie directe sont sur une même droite (365), qu'on nomme *axe d'homothétie directe*. De même, deux centres d'homothétie inverse et le centre direct qui répond au troisième centre inverse sont sur une même droite qu'on nomme *axe d'homothétie inverse;* il y a, d'après cela, trois axes d'homothétie inverse.

DÉFINITION GÉNÉRALE DE LA SIMILITUDE. — PÔLE DOUBLE DE DEUX FIGURES SEMBLABLES.

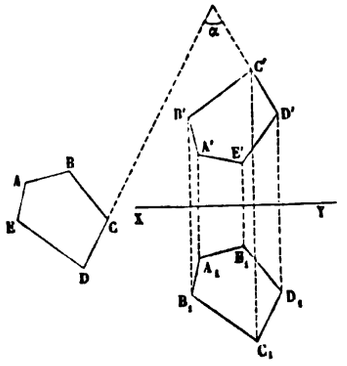
367. Pour étendre aux figures curvilignes la notion de la similitude, il faut prendre pour point de départ une propriété *essentielle* des polygones semblables qui soit immédiatement applicable aux courbes. Voici comment on parvient à faire cette généralisation :

1° *Deux polygones semblables* P *et* P′ *étant donnés dans un plan, on peut toujours amener le polygone* P′ *à avoir ses côtés parallèles aux côtés homologues de* P (*fig.* 230).

Deux cas peuvent se présenter, suivant que les deux polygones sont de même sens ou de sens opposés.

On dit que P et P′ sont de même sens lorsque deux mobiles, astreints à décrire respectivement leurs contours ABCDE, A′B′C′D′E′, en suivant l'ordre alphabétique, marchent tous les deux dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre ou tous les deux dans le sens opposé.

Fig. 230.



Considérons alors deux côtés homologues quelconques CD et C′D′ et faisons tourner le polygone P′ autour du point C′ d'un angle α égal à celui des deux côtés considérés; C′D′ deviendra parallèle à CD, puis, comme les angles C′D′E′, CDE sont égaux et que D′E′ tombe par rap-

port à C'D' du même côté que DE par rapport à CD, le côté D'E' deviendra parallèle à DE, et ainsi de suite.

On dit que P et P' sont de sens opposés lorsque deux mobiles astreints à décrire leurs contours respectifs ABCDE, $A_1B_1C_1D_1E_1$, en suivant l'ordre alphabétique, marchent l'un dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre et l'autre dans le sens contraire. Dans ce cas, en prenant le symétrique de $A_1B_1C_1D_1E_1$ autour d'un axe quelconque XY du plan, c'est-à-dire en rabattant ce polygone $A_1B_1C_1D_1E_1$ autour de cet axe, on obtiendra évidemment un second polygone A'B'C'D'E', qui présentera, relativement au polygone ABCDE, la même disposition que dans le premier cas. Un rabattement suivi d'une rotation amènera donc alors le polygone $A_1B_1C_1D_1E_1$ à avoir ses côtés parallèles à ceux de ABCDE.

2° On a vu que *deux polygones semblables qui ont les côtés parallèles sont homothétiques* (361). Deux polygones semblables peuvent donc (1°) être rendus homothétiques; et réciproquement, la figure homothétique d'un polygone est un polygone semblable au premier (358).

Par suite, pour qu'un polygone P' soit semblable à un autre polygone P, il faut et il suffit que ce polygone P' soit égal à l'un des homothétiques de P.

Voilà donc une propriété *caractéristique* des polygones semblables. D'ailleurs, la définition de l'homothétie est immédiatement applicable aux figures curvilignes (354). On est ainsi conduit à cette définition générale :

On dit qu'*une figure est semblable à une autre lorsqu'elle est égale à l'une des figures homothétiques de cette autre.*

On comprend d'après cela pourquoi on donne, en général, les noms de *centres de similitude*, d'*axes de similitude* et de *rapport de similitude* aux centres, aux axes et au rapport d'homothétie.

368. On nomme *pôle double de deux figures* F *et* F' *semblables et de même sens* le point du plan de ces deux figures qui est son propre homologue.

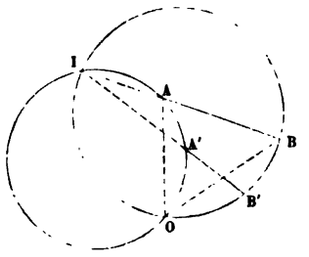
Il faut montrer qu'un tel point existe et qu'il est unique.

Rappelons d'abord qu'on appelle *homologues* deux points O et O' tels, qu'on puisse les rattacher à deux côtés homologues AB et A'B' par deux triangles semblables AOB, A'O'B'; et alors (209), les triangles qui rattachent ces mêmes points à tout autre couple de côtés homologues sont par là même semblables. Nous n'avons donc qu'à prendre à volonté deux côtés homologues AB et A'B' des polygones F et F', et à montrer qu'il existe un point O, et un seul, tel que les triangles AOB et A'OB' soient semblables, c'est-à-dire que les angles IAO, IA'O soient égaux, ainsi que les angles IBO, IB'O, I désignant l'intersection des

droites AB, A'B'. Or l'égalité des deux premiers angles impose seulement au point O (*fig.* 230$_1$) la condition de se trouver sur le cercle circonscrit au triangle IAA'; l'égalité des deux autres angles indique à son tour, comme autre lieu géométrique du point O, le cercle circonscrit au triangle IBB'. Ces deux cercles, passant par I, ont un second point commun et un seul : c'est le point cherché O.

On donne parfois à ce point double O le nom de *centre de rotation des deux figures semblables* F *et* F'. C'est qu'en effet *il suffit de faire*

Fig. 230$_1$.



tourner, d'un angle convenable, l'une des figures, F' *par exemple, autour du point* O, *pour rendre les deux figures homothétiques,* O *étant lui-même le centre d'homothétie.* Cela résulte immédiatement de ce que les triangles OAB et OA'B', OAC et OA'C', ..., étant semblables deux à deux, les côtés OA et OA', OB et OB', OC et OC', ... sont proportionnels, et les angles AOA', BOB', COC', ... sont égaux comme étant la somme ou la différence d'angles égaux.

Ainsi, on obtient la seconde figure A'B'C'... en joignant le point double O aux divers points A, B, C, ... de la première, puis en faisant tourner les rayons OA, OB, OC, ..., d'un même angle V autour de O, tandis qu'on augmente ou qu'on diminue les rayons dans un même rapport K.

D'ailleurs, puisque la rotation V amène toute droite BC de la figure F à être parallèle à son homologue B'C' de la figure F', on voit que deux droites homologues quelconques BC, B'C', des deux figures font entre elles un angle égal à l'angle de rotation V.

Les triangles AOA', BOB', COC', ..., ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, sont semblables, et l'on peut dire encore qu'on obtient les divers points A', B', C', ... de la figure F', en construisant sur les droites OA, OB, OC, ..., de la figure F des triangles semblables AOA', BOB', COC', ...

La construction donnée ci-dessus pour obtenir le point double de deux figures semblables est, en général, la plus simple; mais on peut,

dans certains cas, mettre à profit la propriété suivante : *Le rapport des distances du point double à deux points homologues quelconques est égal au rapport de similitude des deux figures.* Cette propriété est évidente, puisque les distances en question sont des droites homologues. Il en résulte que le cercle, lieu des points dont le rapport des distances à deux points homologues des deux figures est égal au rapport de similitude (187), passe par le point double.

Il convient encore de remarquer, en vue des applications, que, lorsque les points B et A′ se confondent et, par suite, coïncident avec I (*fig.* 230$_1$), les cercles IAA′, IBB′, dont le second point d'intersection est le point double, doivent être remplacés par le cercle qui, passant par A et I, touche IB′, et par le cercle qui, passant par B′ et I, touche AI.

Deux cercles sont deux figures semblables; mais leur point double n'est déterminé que si l'on indique le point A′ du second cercle que l'on veut considérer comme l'homologue d'un point A choisi arbitrairement sur le premier cercle. Si le point A′ homologue de A n'est pas donné, on ne connaît qu'un seul couple de points homologues, celui qui est formé par les centres C et C′ des deux cercles; et le point double n'est astreint alors qu'à être situé sur le cercle, lieu des points dont le rapport des distances aux centres C et C′ est égal au rapport des rayons, c'est-à-dire sur le cercle ayant pour diamètre la droite qui joint les centres de similitude des cercles proposés (187, 362).

Pour deux droites indéfinies, considérées comme des figures semblables, le point double n'est déterminé que si l'on donne sur ces droites deux couples A et A′, B et B′, de points homologues, auquel cas le point double est le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles IAA′, IBB′, I désignant le point commun aux deux droites proposées.

MÉTHODE DES FIGURES SEMBLABLES.

369. Parmi les procédés généraux qui servent à la résolution des problèmes, il importe de signaler celui qui consiste à construire une figure semblable à la figure cherchée avec des éléments pris parmi les données; on passe ensuite de cette figure auxiliaire à la figure demandée, en comparant deux éléments homologues des deux figures.

Cette méthode, dite par *similitude*, est surtout avantageuse quand, parmi les données, ne se trouve qu'une seule longueur L, les autres données étant des rapports ou des angles. On fait alors abstraction de la longueur L, et l'on construit une figure φ présentant les angles et les rapports donnés. λ étant le côté de cette figure auxiliaire qui correspond au côté L de la figure cherchée F, il suffit, pour avoir cette der-

nière, de construire (252), sur une droite égale à L et considérée comme homologue du côté λ, une figure semblable à la figure φ.

On voit, sans autre explication, que ce procédé donnera immédiatement la solution de questions telles que celles-ci :

Construire un triangle, connaissant un angle, un côté et le rapport des deux autres côtés, ou bien *deux angles et la longueur d'une droite (hauteur, médiane, bissectrice, ...) devant être déterminée dès que le triangle l'est.*

Construire un carré, connaissant la différence entre la diagonale et le côté ....

Voici un exemple un peu moins simple :

Fig. 231.

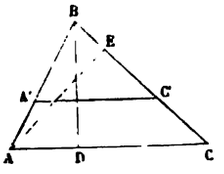
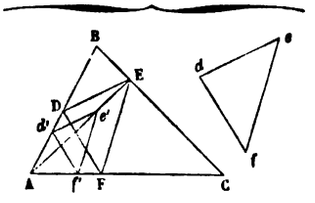


Fig. 232.



Soit proposé de *construire un triangle* ABC *dont on donne les trois hauteurs* α, 6, γ (*fig.* 231); a, b, c, étant les côtés du triangle inconnu, et BD et AE étant les hauteurs 6 et α, les triangles semblables CBD, CAE, donnent

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{\alpha}.$$

On a de même

$$\frac{a}{\gamma} = \frac{c}{\alpha},$$

et, par suite,

$$a\alpha = b6 = c\gamma.$$

On voit par là que si, d'un point pris à volonté, on mène à un cercle trois sécantes respectivement égales aux trois hauteurs données α, 6, γ, les autres segments, comptés sur les mêmes sécantes à partir de leur point commun, seront proportionnels aux côtés a, b, c du triangle demandé. On construira donc un triangle A'BC' ayant pour côtés ces segments; ce triangle sera semblable au triangle cherché ABC et, pour avoir ce dernier triangle, il suffira de prendre sur la hauteur issue du sommet B une longueur BD $= 6$, puis de mener par le point B la parallèle AC à A'C'.

Dans les questions que nous venons de traiter, la position absolue de

la figure demandée demeure arbitraire; mais, dans un grand nombre de cas, la figure à construire doit, au contraire, avoir une position déterminée par rapport à des points ou à des droites données. C'est alors de l'une de ces conditions de situation qu'il faut faire abstraction, et la méthode s'appliquera encore si les figures satisfaisant à l'ensemble des autres conditions données sont semblables et semblablement placées. Citons, comme exemple, un problème déjà résolu d'une autre façon (263) : *Par un point* P *situé à l'intérieur d'un angle* XSY, *tracer un cercle* C *tangent aux deux côtés de l'angle.* En faisant abstraction de la condition imposée au cercle de passer par le point P, on tracera un cercle quelconque O inscrit dans l'angle XSY. Ce cercle O et le cercle demandé C, dont nous désignerons les centres par ω et γ, auront le point S pour centre de similitude. La droite PS, par sa rencontre avec le cercle O, donnera donc l'homologue Q du point P; et, comme les rayons ωQ, CP doivent être parallèles (356), on aura le centre γ du cercle inconnu, en prenant l'intersection de la droite Sω et de la parallèle menée par P à ωQ.

Soit encore proposé d'*inscrire dans un triangle donné* ABC *un triangle dont les côtés soient parallèles à ceux d'un triangle donné de f* (*fig.* 232).

Si l'on trace dans le triangle ABC une parallèle $d'f'$ à df, puis par les points d' et f' des parallèles $d'e'$, $f'e'$, à de et à ef, on formera un triangle $d'f'e'$, homothétique au triangle cherché DFE, et le point A sera pour ces triangles un centre de similitude directe (356). La droite Ae' coupera donc BC en un point E qui sera l'un des sommets du triangle demandé, et il ne restera plus qu'à mener par ce point E des parallèles ED et EF, à ed et à ef, et à joindre les points D et F.

370. A ce procédé s'en rattache un autre où l'on opère *par renversement*, c'est-à-dire qu'on renverse la question en prenant les données pour inconnues, et réciproquement. En traitant ce nouveau problème, on obtient une figure égale ou semblable à la figure cherchée, et, pour avoir la figure demandée dans la position voulue, il suffit d'en connaître une seule ligne.

Reprenons, par exemple, le problème précédent. On commencera par circonscrire au triangle def un triangle abc ayant ses côtés respectivement parallèles à ceux du triangle ABC. La figure ainsi formée sera semblable à la figure cherchée, et il suffira de partager le côté AB dans le rapport de db à da pour avoir le sommet D du triangle demandé.

Voici un second exemple de cette méthode indirecte :

Inscrire dans un quadrilatère donné ABCD *un quadrilatère* $a'b'c'd'$ *semblable à un autre quadrilatère donné* A'B'C'D' (*fig.* 233).

La méthode inverse sera ici évidemment préférable à la méthode directe,

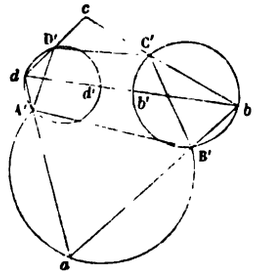
parce que, s'il s'agit de circonscrire une figure semblable au lieu de l'inscrire, les segments capables, décrits sur les côtés du polygone donné, fournissent immédiatement des lieux géométriques des sommets du polygone à construire.

Renversons donc la question, et proposons-nous de circonscrire à un quadrilatère donné A'B'C'D' un quadrilatère *abcd* semblable à un autre quadrilatère donné ABCD.

Les angles du quadrilatère *abcd* étant donnés, les sommets *a*, *b*, *d* appartiennent aux segments capables de ces angles, décrits sur les côtés A'B', B'C', A'D'.

De plus, le quadrilatère *abcd* étant semblable au quadrilatère ABCD, le triangle *abd* est lui-même semblable au triangle ABD, et l'on connaît les angles *abd*, *adb*. Comme ces angles ont pour mesures, le premier la moitié de l'arc B'*b'*, le second la moitié de l'arc A'*d'*, on pourra marquer sur les arcs B'C' et A'D' les points *b'* et *d'* : la droite *b'd'* sera donc déterminée, et ses seconds points d'intersection avec les segments décrits sur B'C' et sur A'D' seront les points *b* et *d*. Ayant ainsi deux sommets opposés du quadrilatère *abcd*, le problème inverse se trouvera résolu.

Fig. 233.



Pour revenir au problème direct, on n'aura plus qu'à diviser les côtés du quadrilatère ABCD dans des rapports égaux à ceux des segments que les points A', B', C', D', déterminent sur les côtés du quadrilatère *abcd*, et à joindre les points de division.

Le problème proposé a *huit* solutions dans le cas général. En effet, en considérant le problème inverse, on voit d'abord que l'angle *d* peut s'appuyer indifféremment sur chacun des côtés du quadrilatère A'B'C'D' : ce qui donne quatre solutions. De plus, chacune de ces solutions doit être double : car l'angle *a* s'appuyant sur le côté A'B' par exemple, les angles *b* et *d* peuvent s'appuyer respectivement, soit sur les côtés B'C' et A'D', soit au contraire sur les côtés A'D' et B'C'. Cette double solu-

tion se réduirait à une seule, si les angles b et d étaient égaux en même temps que les côtés B'C' et A'D'.

371. La *méthode par rotation* dont nous avons parlé à la fin du livre II (172) prend une extension considérable quand on la combine avec la construction d'une figure homothétique.

Soit proposé de *construire un triangle* ABC *semblable à un triangle donné, de telle sorte que l'un des sommets* C *ait une position donnée et que les deux autres sommets* A *et* B *soient respectivement sur deux lignes données a et b.*

Il est clair que, si l'on fait tourner la ligne a autour du point donné C d'un angle égal à l'angle connu ACB, puis qu'on construise la ligne a' homothétique de cette ligne ainsi déplacée en prenant pour centre d'homothétie le point C et pour rapport d'homothétie le rapport connu $\frac{CB}{CA}$, le point A de la ligne a viendra en B. On obtiendra donc la position cherchée de ce sommet B en prenant l'intersection des lignes b et a'.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de *construire un triangle dont les côtés soient proportionnels aux nombres* 3, 4, 5, *de façon que les sommets soient sur trois droites parallèles données, ou sur trois cercles concentriques donnés.* Le triangle est ici rectangle; on placera à volonté le sommet de l'angle droit sur celle des lignes à laquelle il doit appartenir; puis, on fera tourner l'une des autres lignes autour de ce point d'un angle égal à 90°, en prenant $\frac{3}{4}$ pour rapport d'homothétie.

La méthode consiste, on le voit, dans l'emploi du point C comme centre de rotation et d'homothétie.

Voici quelques autres exemples simples :

1° Soit un quadrilatère ABCD. On peut considérer A et D, B et C comme deux couples de points homologues de deux figures semblables; O désignant le pôle double de ces deux figures, les triangles AOB, DOC seront semblables; par suite, il est aisé de voir qu'il en sera de même des triangles AOD, BOC; donc, si l'on considère A et B, C et D comme deux couples de points homologues de deux autres figures semblables, le pôle double de ces figures sera aussi le point O; et l'on verrait de même que ce point est encore le pôle double de deux figures semblables dont A et C, B et D seraient deux couples de points homologues. On conclut de là que *dans tout quadrilatère complet, les cercles circonscrits aux triangles qui restent lorsqu'on néglige successivement un des côtés passent tous par un même point.*

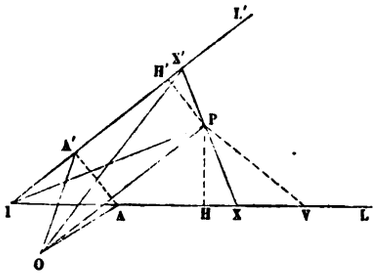
2° Considérons un triangle quelconque ABC et en même temps le triangle A'B'C' qui a pour sommet les milieux des côtés du premier. Ces deux triangles sont semblables; deux côtés homologues quelconques forment un angle de 180° et le rapport de similitude est égal à $\frac{1}{2}$. Si O

désigne le pôle double, comme les angles AOA', BOB', COC' doivent être égaux à 180°, on voit que ce pôle O se trouvera sur toute ligne joignant deux points homologues, et qu'il divisera cette ligne dans le rapport de 1 à 2. Ce pôle est donc à la rencontre des médianes AA', BB', CC'. Mais les points de rencontre des hauteurs dans les deux triangles sont deux points homologues K et K'; d'ailleurs K' est le centre du cercle circonscrit à ABC; donc, *dans tout triangle* ABC, *le point de concours des hauteurs* K, *le point de concours des médianes* O, *et le centre* K' *du cercle circonscrit sont situés sur une même ligne droite que le point* O *partage dans le rapport de* 1 *à* 2.

3° *On donne, dans un plan, deux droites* L *et* L', *un point* A *sur la droite* L *et un point* A' *sur la droite* L'. *Mener, par un point quelconque* P *du plan, une droite qui coupe respectivement* L *et* L' *en deux points* X *et* X', *tels que les segments* AX *et* A'X' *aient un rapport donné* (*fig.* 233$_1$).

Considérons A et A', X et X' comme deux couples de points homologues de deux figures semblables F et F'; le point double O de ces deux figures s'obtiendra aisément, car il est d'une part sur le cercle circonscrit au triangle AA'I, I étant le point d'intersection des droites L et L'; d'autre part, il est sur le cercle, lieu des points dont le rapport des distances à A et A' est égal au rapport donné.

Fig. 233$_1$.



L'angle OAA' est donc connu, et, comme il doit être égal à OXX', c'est-à-dire à OXP, il suffira, pour avoir le point X, de décrire sur OP un segment capable de l'angle OAA'.

Dans le cas particulier où le point A' se confondrait avec I, le cercle circonscrit à AA'I serait remplacé par le cercle passant par A et tangent en I à la droite L'.

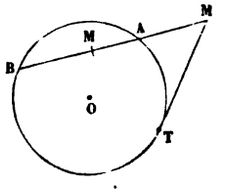
Ce problème remonte à Apollonius, qui l'avait surnommé problème de la *section de raison*.

V. — Puissance d'un point par rapport à un cercle.

AXES RADICAUX.

372. Nous avons vu (193) que, si, par un point M pris à volonté dans le plan d'un cercle O, on mène à ce cercle une sécante arbitraire MAB, le produit MA.MB des distances de ce point aux deux intersections A et B de la sécante et de la circonférence est une quantité constante, c'est-à-dire indépendante de la direction de la sécante. Ce produit constant MA.MB, qui est évidemment positif lorsque le point M est extérieur au cercle, et négatif lorsque le point M est intérieur, porte, d'après Steiner, le nom de *puissance du point* M *par rapport au cercle* O (*fig.* 234).

Fig. 234.



Considérons en particulier celle des sécantes issues du point M qui passe par le centre O, et désignons par d la distance MO et par r le rayon du cercle. Si le point M est extérieur au cercle, les deux segments MA et MB, comptés sur cette sécante, sont de même signe, et, comme leurs valeurs absolues sont $d - r$ et $d + r$, la puissance du point M a pour expression $(d + r)(d - r)$ ou $d^2 - r^2$. Si le point M est intérieur, les deux segments MA et MB, comptés sur la sécante qui passe au centre, ont respectivement pour valeurs absolues $r - d$ et $r + d$; mais, comme ils sont de sens opposés, la puissance a pour expression $-(r - d)(r + d) = -(r^2 - d^2)$, c'est-à-dire encore $d^2 - r^2$. Ainsi, dans tous les cas, *la puissance d'un point par rapport à un cercle est égale, en grandeur et en signe, à l'excès du carré de la distance de ce point au centre sur le carré du rayon.*

Lorsque le point M *est extérieur au cercle, sa puissance est égale au carré de la tangente* MT *menée au cercle par ce point.*

Si le point M *est intérieur, sa puissance est négative et égale en valeur absolue au carré de la moitié de la corde* CMD perpendiculaire à OM, c'est-à-dire de la corde *minimum* parmi celles qui passent par M.

THÉORÈME.

373. *Le lieu des points* M *d'égale puissance par rapport à deux cercles* O *et* O′ *est une droite perpendiculaire à la ligne des centres* OO′.

En effet, on a $\overline{MO}^2 - r^2 = \overline{MO'}^2 - r'^2$, r et r' étant les rayons des deux cercles. Le lieu cherché est, d'après cela, le lieu des points dont la différence des carrés des distances aux centres O et O′ est égale à la différence des carrés des rayons. C'est donc (235) une droite perpendiculaire à OO′, plus voisine du centre O′ du plus petit cercle que du centre O du plus grand, et dont la distance au milieu de la ligne des centres OO′ est égale à la différence des carrés des rayons divisée par le double de la distance des centres.

D'après Gaultier (de Tours), on donne à cette droite le nom d'*axe radical* des deux cercles.

Tout point commun à deux cercles, ayant une puissance nulle par rapport à chacun d'eux, appartient à leur axe radical. De même, tout point commun à l'axe radical et à l'un des cercles appartient à l'autre cercle, puisque sa puissance doit être nulle par rapport au second cercle comme elle l'est par rapport au premier. Donc : *l'axe radical de deux cercles qui se coupent est la sécante commune ; l'axe radical de deux cercles qui se touchent est la tangente commune ; l'axe radical de deux cercles qui n'ont aucun point commun est extérieur à chacun d'eux.*

374. En vertu de ce qui a été dit à la fin du n° 372, *le lieu des points d'où l'on peut mener à deux cercles des tangentes égales est l'axe radical des deux cercles* si les cercles ne se coupent pas ; s'ils se coupent, le lieu n'est que la partie de l'axe radical qui est extérieure aux deux cercles, et alors, la partie intérieure est le lieu des points tels, que les cordes minimum, relatives à ces points, soient égales dans les deux cercles.

375. Si l'on désigne par S l'un quelconque des centres de similitude de deux cercles O et O′, et par L, P et P′ les points où la ligne des centres OO′ rencontre respectivement leur axe radical et les polaires de S par rapport aux deux cercles, on a, en vertu du théorème du n° 373, de la théorie de la polaire (341) et de celle des centres de similitude (362),

$$OL = \frac{OO'}{2} + \frac{r^2 - r'^2}{2OO'},$$

$$\frac{OS}{r} = \frac{O'S}{r'} = \frac{OO'}{r - r'}, \qquad OP = \frac{r^2}{OS}, \qquad O'P' = \frac{r'^2}{O'S}.$$

On déduit de là

$$\frac{r^2 - r'^2}{OO'} = \frac{r(r - r')}{OO'} + \frac{r'(r - r')}{OO'} = \frac{r^2}{OS} + \frac{r'^2}{O'S} = OP - O'P',$$

et, par suite,

$$OL = \frac{OP + OO' + O'P'}{2} = \frac{OP + OP'}{2}.$$

L'axe radical de deux cercles est donc *la droite équidistante des deux polaires de l'un quelconque de leurs centres de similitude, par rapport aux deux cercles.*

Ce théorème est d'ailleurs évident dans le cas où le centre de similitude considéré est extérieur aux deux cercles; car l'axe radical passe alors par les milieux de leurs tangentes communes, tandis que les polaires sont les cordes de contact correspondantes.

Il résulte de la même proposition que *l'axe radical d'un cercle* O *et d'un point* O' *est parallèle à la polaire du point par rapport au cercle et équidistant de ce point et de sa polaire.*

THÉORÈME.

376. *Les axes radicaux de trois cercles considérés deux à deux concourent en un même point* (*fig.* 235 et 236).

Fig. 235.

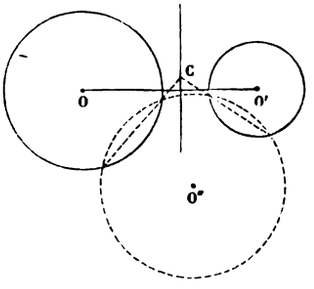
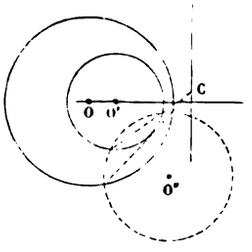


Fig. 236.



En effet, soient O, O', O'', les centres des trois cercles et L, L', L'', les axes radicaux des cercles O' et O'', O'' et O, O et O'. En supposant que les trois points O, O', O'', ne soient pas en ligne droite, on voit que L et L' perpendiculaires à deux droites qui se coupent, O'O'' et O''O, se rencontreront en un certain point C, qui sera alors d'égale puissance par rapport aux cercles O' et O'', et aussi par rapport aux cercles O''

et O. Ce point C aura donc même puissance par rapport aux cercles O et O′, et par suite il appartiendra à leur axe radical L″.

Le point C, commun aux trois axes radicaux, prend le nom de *centre radical* du système des trois cercles O, O′, O″.

Lorsque les trois centres sont en ligne droite, le centre radical est à l'infini ou est indéterminé suivant que les cercles O et O′, O et O″ ont des axes radicaux parallèles ou coïncidents.

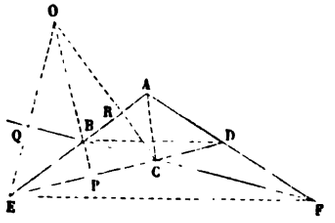
Ce théorème permet de construire simplement l'axe radical de deux cercles O et O′ extérieurs ou intérieurs l'un à l'autre. Il suffit de couper ces deux cercles par un troisième cercle quelconque O″. La corde commune aux cercles O et O″ et la corde commune aux cercles O′ et O″ se couperont au centre radical C des trois cercles O, O′, O″, et il restera à abaisser de ce point C une perpendiculaire sur la ligne OO′ (*fig.* 235 et 236).

377. Dès qu'il existe dans le plan de trois cercles plusieurs points distincts ayant même puissance par rapport à chacun des trois cercles, on peut affirmer que ces points sont sur une même droite qui est l'axe radical commun aux trois cercles.

On peut fonder sur cette remarque une nouvelle démonstration très simple de la propriété du quadrilatère complet qui fait l'objet du n° 317.

Soit ABCDEF (*fig.* 237) un quadrilatère complet. Considérons l'un

Fig. 237.



des triangles BCE formé par trois côtés du quadrilatère; soient BP, CR, EQ, les trois hauteurs de ce triangle, et O leur point de concours. Les circonférences décrites sur les diagonales BD, AC, EF, comme diamètres, passent respectivement par les points P, R, Q. Les puissances du point O par rapport à ces trois cercles sont donc

$$OB.OP, \quad OR.OC, \quad OQ.OE,$$

et les quadrilatères inscriptibles BRCP, BQEP, montrent que ces puissances sont égales. Le point O a donc même puissance par rapport aux trois cercles, et il en est de même des trois autres points analogues O_1,

O_2, O_3, relatifs aux trois autres triangles que l'on peut former en prenant chaque fois trois des côtés du quadrilatère. Par suite, d'après la remarque ci-dessus, les trois cercles considérés ont un même axe radical qui contient les points O, O_1, O_2, O_3, et les centres des trois cercles, c'est-à-dire les milieux des trois diagonales, sont sur une même droite perpendiculaire à l'axe radical commun.

On voit, par cette démonstration, non seulement que *les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite,* mais encore que *les circonférences décrites sur les trois diagonales comme diamètres ont même axe radical,* que *cet axe radical est perpendiculaire à la droite qui passe par les milieux des diagonales, et qu'il contient les points de concours des hauteurs des quatre triangles formés par les côtés du quadrilatère combinés trois à trois.*

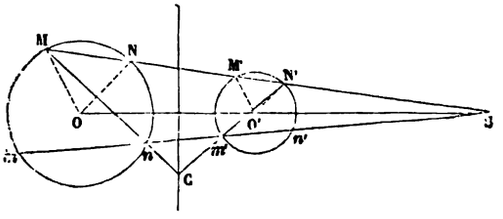
POINTS ANTIHOMOLOGUES DE DEUX CERCLES.

THÉORÈME.

378. 1° *Le produit des distances de l'un quelconque des deux centres de similitude de deux cercles à deux points anti-homologues est constant;* 2° *deux couples de points anti-homologues sont sur une même circonférence;* 3° *deux cordes anti-homologues se coupent sur l'axe radical.*

Soient deux cercles O et O′ (*fig.* 238), S un de leurs centres de

Fig. 238.



similitude, par exemple le centre de similitude externe. Une sécante SM, issue de S, coupe les cercles O et O′ en quatre points M, N, M′, N′. Les points M et M′ sont homologues par rapport au centre S, car les rayons correspondants OM, O′M′, sont parallèles; de même, N et N′ sont homologues. Les points M et N′ sont dits *anti-homologues,* ainsi que les points N et M′. Une corde quelconque M*n* du premier cercle, et la corde N′*m*′ du second cercle qui joint les points anti-homologues des extrémités de la première, prennent le nom de *cordes anti-homologues.* Ces définitions établies, voici la démonstration du théorème énoncé :

1° En désignant par r et r' les rayons des deux cercles et par p la puissance du point S par rapport au cercle O, on a

$$SM.SN = p \quad \text{et} \quad \frac{SM}{SM'} = \frac{r}{r'}.$$

En divisant la première égalité par la seconde, il vient

$$SN.SM' = p\frac{r'}{r};$$

et l'on trouverait de même

$$SM.SN' = p\frac{r'}{r}.$$

2° D'après cela, si Sm est une autre sécante issue du point S, on aura

$$SM.SN' = Sn.Sm';$$

donc (194) les points M et N', n et m' sont sur une même circonférence O''.

3° Enfin, la corde Mn étant l'axe radical des cercles O et O'', et la corde N'm' l'axe radical des cercles O' et O'', le point d'intersection C des deux cordes est le centre radical (376) des trois cercles O, O', O'', c'est-à-dire un point de l'axe radical des cercles O et O'. Cette dernière propriété, prise à sa limite, prouve encore que *les tangentes en deux points anti-homologues de deux cercles se coupent sur l'axe radical.*

THÉORÈME.

379. *Quand deux cercles* (A) *et* (B) *sont touchés par un troisième* (ω), *la droite qui joint les points de contact a et b passe par un centre de similitude* I *de* (A) *et de* (B), *et le pôle t de cette droite par rapport à* (ω) *est situé sur l'axe radical* L *de* (A) *et de* (B) [*fig.* 238$_1$].

En effet, puisque (362) a est un centre de similitude de (A) et (ω), et b un centre de similitude de (B) et (ω), la droite ab est (366) un axe de similitude des trois cercles (A), (B), (ω); elle passe donc par un des deux centres de similitude de (A) et (B). D'autre part, les tangentes en a et en b étant (373) les axes radicaux de (A) et (ω) et de (B) et (ω), leur point de rencontre t, c'est-à-dire (343) le pôle de ab par rapport à (ω) est le centre radical (376) des trois cercles (A), (B), (ω); il appartient donc à l'axe radical L de (A) et (B).

Cette proposition a deux réciproques.

1° *Si la droite ab, qui joint deux points respectifs a et b des cercles* (A) *et* (B), *passe par un centre de similitude* I *de ces deux cer-*

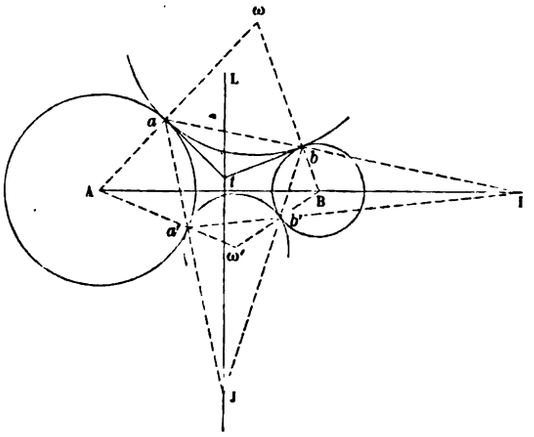
cles, le cercle (ω) *qui touche* (A) *au point a et qui passe par le point b, touche en ce point le cercle* (B). — En effet, si le cercle (ω) coupait (B) en un second point b_1, la droite Ib_1 couperait les cercles (ω) et (A) en deux points distincts α et a_1, et l'on aurait, en combinant les propriétés des sécantes (193) et celles des points antihomologues (378),

$$Ib_1 . I\alpha = Ib . Ia = Ib_1 . Ia_1,$$

c'est-à-dire $Ia_1 = I\alpha$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2° *Si la droite ab, qui joint deux points respectifs a et b des cercles* (A) *et* (B) *est telle, que le point de rencontre t des tangentes en a et en b à ces deux cercles appartienne à leur axe radical* L, *le cercle* (ω) *qui touche* (A) *au point a et qui passe par le point b,*

Fig. 238.



touche en ce point le cercle (B). — En effet, si la droite *tb* coupait le cercle (ω) en un second point b_1, on aurait

$$tb . tb_1 = \overline{ta}^2 = \overline{tb}^2,$$

c'est-à-dire $tb = tb_1$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

COROLLAIRE.

380. *Si deux cercles* (A) *et* (B) *sont touchés respectivement en a et en b par un cercle* (ω) *et en a' et en b' par un cercle* (ω'), *de façon que les contacts en b et en b' soient semblables ou dissemblables sui-*

vant que les contacts en a et en a' sont eux-mêmes semblables ou dissemblables, le point de concours de deux côtés opposés quelconques du quadrilatère aba'b' est à la fois un centre de similitude des deux cercles dont ces côtés sont des cordes et un point de l'axe radical des deux autres cercles (*fig.* 238_1).

En effet, si les contacts en a et en a' sont semblables, aa' passe (366) par le centre de similitude externe de (ω) et (ω'); mais, alors, les contacts en b et en b' étant aussi semblables par hypothèse, bb' passe par ce même centre de similitude; on verrait, par un raisonnement analogue, que, si les contacts en a et en a' sont dissemblables, les droites aa' et bb' passent toutes deux par le centre de similitude interne de (ω) et (ω'). Dans les deux cas, le point de concours J de aa' et de bb' est donc un centre de similitude de (ω) et (ω'). Les points a et a sont sur ces deux cercles des points anti-homologues, et il en est de même des points b et b'. On a dès lors

$$Ja.Ja' = Jb.Jb',$$

et le point J, ayant même puissance par rapport à (A) et à (B), appartient à l'axe radical L de ces deux cercles.

D'ailleurs, de ce que les contacts en b et en b' sont semblables ou dissemblables en même temps que les contacts en a et en a', il résulte que les contacts en a' et en b' sont semblables ou dissemblables en même temps que les contacts en a et en b; et, par suite, un raisonnement identique au précédent prouve que le point de concours I de ab et de $a'b'$ est un centre de similitude de (A) et (B) et appartient à l'axe radical de (ω) et (ω').

NOTIONS SUR L'INVOLUTION.

381. On dit que plusieurs couples de points (a, a'), (b, b'), ..., (m, m'), ... situés sur une même droite L forment une *involution*, lorsqu'on peut trouver sur la droite L un point O, tel que l'on ait

$$Oa.Oa' = Ob.Ob' = Oc.Oc' = \ldots = K.$$

La droite L est la *base*, O le *point central*, et la constante K la *puissance* de l'involution.

1° *Deux couples de points* (a, a'), (b, b'), *déterminent une involution.* En effet, si p est un point pris à volonté hors de la droite L, le point central O doit avoir la même puissance par rapport aux cercles circonscrits aux deux triangles paa', pbb'; il appartient donc à l'axe radical de ces deux cercles et, par suite, il sera le point où cet axe coupe la droite L. Dès lors, q étant le second point d'intersection des deux cer-

cles, le conjugué c' d'un point c de la droite L sera le second point commun à cette droite et au cercle circonscrit au triangle pqc.

La perpendiculaire élevée sur la base L *par le point central* O *est l'axe radical commun des cercles décrits sur les segments* aa', bb', cc', *comme diamètres.*

2° On nomme *point double* d'une involution tout point u de la base L qui est son propre homologue. Pour qu'un tel point existe, il faut et il suffit qu'on ait

$$\overline{Ou}^2 = K.$$

Donc il n'y a pas de points doubles si K *est négatif; si* K *est positif, il y a deux points doubles* e et f situés sur la droite L, de part et d'autre, du point central O à une même distance égale à $\sqrt{K}$.

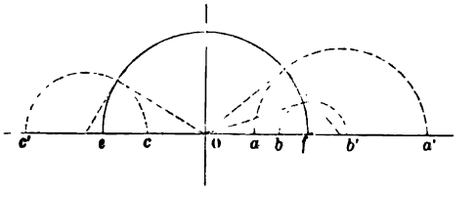
D'après cela, l'involution peut offrir deux dispositions différentes.

Si K est positif, comme on a (332, 333)

$$\overline{Oe}^2 = \overline{Of}^2 = Oa.Oa' = Ob.Ob' = Oc.Oc' = \ldots,$$

les points doubles e et f divisent harmoniquement chacun des segments aa', bb', cc', ...; par suite, le point central n'est jamais compris entre deux points conjugués, tels que a et a', et deux quelconques des segments aa', bb', cc', ... sont, soit comme aa' et bb', d'un même côté de O et alors compris l'un dans l'autre, soit comme aa' et cc', de part et d'autre de O et alors extérieurs l'un à l'autre (*fig.* 239). Oe et Of sont égales à la longueur commune des tangentes menées par O aux divers cercles décrits sur aa', bb', cc', ... comme diamètres.

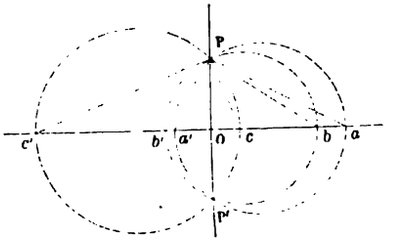
Fig. 239.



Si K est négatif, les produits $Oa.Oa'$, $Ob.Ob'$, $Oc.Oc'$, ... étant négatifs, tout couple de points conjugués est séparé par le point central O et deux quelconques des segments aa', bb', cc', ... empiètent l'un sur l'autre (*fig.* 239$_1$). Chacun des cercles décrits sur aa', bb', cc', ... comme diamètres coupe l'axe radical commun aux deux mêmes points P et P' symétriques par rapport à la base L et situés à une distance OP de cette base égale à la racine carrée des produits $Oa.Oa'$, $Ob.Ob'$, $Oc.Oc'$, ..., c'est-à-dire égale à $\sqrt{-K}$. Une involution de ce

genre étant donnée par deux couples (a, a'), (b, b') de points conjugués, c'est-à-dire par deux segments aa' et bb' empiétant l'un sur l'autre, les circonférences décrites sur aa' et bb' comme diamètres donneront le point P, par suite le point central O, projection de P sur la base L, et il suffira de faire pivoter un angle droit autour du sommet P pour avoir sur la base L tous les couples de points conjugués.

Fig. 239_1.



3° *Pour que trois couples* (a, a'), (b, b'), (c, c') *de points en ligne droite forment une involution, il faut et il suffit que quatre de ces points* (n'appartenant pas aux deux mêmes couples) *aient leur rapport anharmonique égal à celui de leurs conjugués.*

La condition est nécessaire; car, si, dans le rapport anharmonique des quatre points a, b, c, c', on remplace le segment ca par sa valeur

$$ca = Oa - Oc = \frac{K}{Oa'} - \frac{K}{Oc'} = -\frac{K}{Oa'.Oc'} \cdot c'a'$$

et chacun des autres segments par la valeur analogue, on obtient le rapport anharmonique des points a', b', c', c respectivement conjugués des premiers.

La condition est suffisante; car, si elle est remplie, le rapport anharmonique $(abcc')$ est égal à $(a'b'c'c)$. Mais, si l'on désigne par α le conjugué de a' dans l'involution déterminée par les deux couples (b, b'), (c, c'), le rapport anharmonique $(abcc')$ doit, en vertu de la proposition directe, être aussi égal à $(a'b'c'c)$, ce qui prouve que les points a et α divisent cc' dans le même rapport et par suite coïncident.

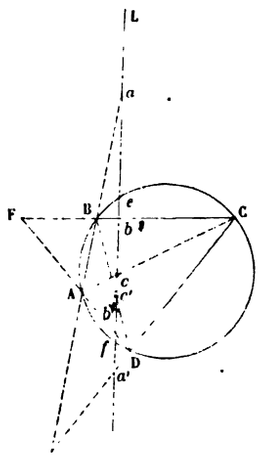
4° *Toute transversale* L *menée dans le plan d'un quadrilatère* ABCD *rencontre les quatre côtés et les deux diagonales en six points* a, a', b, b', c, c' *formant une involution* (*fig.* 239_2).

Car les faisceaux (AB, AC, AD, Ac'), (CB, CA, CD, Cc') ont le même rapport anharmonique, puisqu'ils coupent la diagonale BD aux mêmes

points. Donc les rapports anharmoniques des deux systèmes de quatre points a, c, b, c' et b', c, a', c' suivant lesquels la transversale L coupe ces deux faisceaux sont égaux; mais, au rapport (b', c, a', c'), on peut substituer $(a'c'b'c)$, et l'on voit ainsi que le rapport anharmonique des points a, c, b, c' est égal au rapport anharmonique de leurs conjugués a', c', b', c, d'où l'on conclut que (a, a'), (b, b'), (c, c') forment une involution.

5° *Quand un quadrilatère est inscrit dans un cercle, toute transversale* L *située dans son plan rencontre les deux couples de côtés opposés et le cercle en six points* a, a', b, b', e, f, *formant une involution* (*fig.* 239).

Fig. 239.



En effet, les faisceaux (AB, AD, Ae, Af), (CB, CD, Ce, Cf) ont les mêmes angles, puisque leurs sommets A et C sont sur la circonférence et que leurs rayons se coupent deux à deux sur cette même ligne; ils ont donc même rapport anharmonique et, par suite, si on les coupe par la transversale L, les deux systèmes de quatre points a, b, e, f et b', a', e, f que l'on obtient ont même rapport anharmonique; donc, en échangeant, dans le dernier groupe, b' et a', e et f, on voit que le rapport anharmonique des points a, b, e, f est égal à celui de leurs conjugués a', b', f, e; par suite, les couples (a, a'), (b, b'), (e, f) forment une involution. — Ce théorème est dû à Desargues.

Tels sont les premiers principes de cette belle théorie de l'involution, dont on trouvera l'entier développement dans notre seconde Partie.

FAISCEAUX DE CERCLES.

382. On dit que plusieurs cercles A, B, C, ... forment *un faisceau* lorsqu'ils ont leurs centres sur une même droite L et que les points a et a', b et b', c et c', ... suivant lesquels ils coupent cette droite forment une involution.

La base L, le point central O et la puissance K de l'involution reçoivent les noms de *base, point central* et *puissance du faisceau.*

Le faisceau est dit du premier ou du second genre suivant que l'involution correspondante a des points doubles ou en est dépourvue, c'est-à-dire suivant que K est positif ou négatif.

1° Il résulte de la théorie de l'involution qu'*un faisceau de cercles est déterminé par deux quelconques d'entre eux,* et que *tous les cercles d'un faisceau, pris deux à deux, ont le même axe radical.* La réciproque de cette dernière proposition est vraie : *si, plusieurs cercles* A, B, C, ..., *pris deux à deux, ont un même axe radical* R, *ils forment un faisceau dont la base* L *est perpendiculaire à* R ; car les centres sont évidemment distribués sur une même perpendiculaire L à l'axe radical R, et le point O commun à R et à L ayant même puissance par rapport à chacun des cercles, on a, en désignant par a et a', b et b', c et c', ... les points où ces cercles coupent la droite L,

$$Oa.Oa' = Ob.Ob' = Oc.Oc' = \dots$$

2° Les points doubles e et f de l'involution relative à un faisceau de cercles du premier genre prennent le nom de *points limites* du faisceau ; voici pourquoi : puisque e et f divisent harmoniquement chacun des diamètres aa', bb', cc', ... les milieux de ces diamètres, c'est-à-dire les centres des cercles A, B, C, ... sont tous en dehors du segment ef ; les deux parties indéfinies de la base L qui sont l'une à gauche de e, l'autre à droite de f, sont les seules régions dans lesquelles puisse se trouver le centre d'un cercle quelconque du faisceau ; d'ailleurs, tout point ω de ces régions est effectivement le centre d'un cercle du faisceau ; c'est le cercle Ω qui a pour rayon la tangente ωt menée par ω au cercle décrit sur ef comme diamètre. Le rayon Ot du cercle ef, étant en effet perpendiculaire à ωt, est tangent au cercle Ω et, si α et α' sont les points où ce cercle coupe L, on a

$$O\alpha.O\alpha' = \overline{Ot}^2 = \overline{Oe}^2,$$

ce qui prouve que le cercle Ω fait partie du faisceau. Le rayon du cercle Ω diminue à mesure que son centre ω se rapproche de l'un des points e et f, et par suite *ces points limites* peuvent être considérés comme deux cercles évanouissants faisant partie du faisceau.

Dans un faisceau du second genre, tous les cercles passent par les deux points P et P′ (381) de l'axe radical R; on a donné à ces points le nom de *points fondamentaux*. Ici, tout point ω de la base peut être le centre d'un cercle du faisceau; c'est le cercle Ω décrit de ω comme centre avec ωP pour rayon.

3° On dit que deux faisceaux de cercles sont *conjugués* lorsque, le point central étant le même, les bases sont rectangulaires et les puissances égales et de signes contraires.

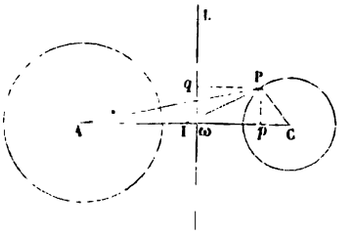
Il est clair qu'*alors les points fondamentaux de l'un des faisceaux coïncident avec les points limites de l'autre* et que, réciproquement, si cette coïncidence a lieu, les deux faisceaux sont conjugués.

4° On peut donner à l'expression de la puissance d'un point P par rapport à un cercle (A) une forme élégante et souvent commode, en faisant intervenir un cercle auxiliaire (C) astreint seulement à passer par le point P (*fig.* 239_3).

En désignant par I le milieu de la ligne des centres AC, et par p la projection du point P sur cette ligne, on a (234)

$$\overline{PA}^2 - \overline{PC}^2 = 2AC.Ip.$$

Fig. 239_3.



Mais, si r est le rayon du cercle (A) et ω le pied de l'axe radical L des deux cercles (A) et (C), on a (373)

$$r^2 - \overline{PC}^2 = 2AC.I\omega.$$

En retranchant cette relation de la précédente, on obtient l'égalité

$$\overline{PA}^2 - r^2 = 2AC.\omega p,$$

qui montre que *la puissance d'un point* P *par rapport à un cercle* (A) *est égale au double de la distance du centre* (A) *au centre* (C) *d'un cercle quelconque passant par* P, *multipliée par la distance du point* P *à l'axe radical des deux cercles.*

Il résulte de là que, *si* (A), (B), (C), sont *trois cercles d'un même faisceau,* les puissances d'un point quelconque P du cercle (C) par rapport aux cercles (A) et (B) sont entre elles comme les produits $AC.Pq$, $BC.Pq$, ou comme les distances du centre du cercle (C) aux centres des cercles (A) et (B). Par suite, *le lieu du point* P *dont les puissances par rapport à deux cercles fixes* (A) *et* (B) *ont un rapport donné est un cercle du faisceau déterminé par* (A) *et* (B); *et c'est, parmi les cercles de ce faisceau, celui dont le centre* C *divise* AB *dans le rapport donné.*

CERCLES ORTHOGONAUX.

383. 1° *Pour qu'un cercle* (O) *de rayon r soit coupé orthogonalement par un autre cercle* (O'), *il faut et il suffit que, de son centre, on puisse mener au cercle* (O') *une tangente égale à r.*

La condition est nécessaire; car, M désignant un des points communs aux deux cercles dont les deux centres sont O et O', la tangente en M au cercle (O') et le rayon OM se confondent comme étant perpendiculaires au même point M à la tangente au cercle (O).

La condition est suffisante; car, soit OM la tangente menée du point O au cercle (O'); puisque OM est égale à r, le point M appartient aussi au cercle (O); d'ailleurs, la tangente en ce point au cercle (O) est perpendiculaire au rayon OM, c'est-à-dire à la tangente au cercle (O').

On peut encore énoncer le théorème de la manière suivante :

Pour qu'un cercle de rayon r soit coupé orthogonalement par un autre cercle, il faut et il suffit que la puissance de son centre par rapport à cet autre cercle soit égale à r^2.

2° Il résulte de là : 1° que *le lieu des centres des cercles qui sont coupés orthogonalement par deux cercles donnés* A *et* B *est le lieu des points d'où l'on peut mener aux cercles* A *et* B *des tangentes égales;* 2° que *si un cercle* O *est coupé orthogonalement par deux cercles* A *et* B, *il est coupé orthogonalement par tout cercle du faisceau déterminé par* A *et* B; car, le cercle O ayant son centre sur l'axe radical de A et de B, et cet axe étant commun à tous les cercles du faisceau, le centre en question aura, par rapport à tout cercle du faisceau, la même puissance, laquelle est égale au carré du rayon du cercle O, puisque ce cercle est coupé orthogonalement par A et B. Pour plus de brièveté, nous dirons, d'un cercle qui est coupé orthogonalement par tous les cercles d'un faisceau, qu'il est orthogonal au faisceau.

3° *Tous les cercles* A_1, B_1, C_1, ... *orthogonaux à un faisceau* F *de cercles* A, B, C, ... *forment le faisceau conjugué du premier.*

En effet, le centre du cercle A ayant, par rapport à chacun des cercles orthogonaux, une même puissance égale au carré de son rayon, appartient à l'axe radical de deux quelconques de ces cercles orthogonaux.

Comme il en est de même des centres des cercles B, C, ..., on voit que les cercles orthogonaux A_1, B_1, C_1, ... ont pour axe radical commun R_1 la base L du faisceau F. Ces cercles orthogonaux forment donc un faisceau F_1. Ce faisceau F_1 a pour base L_1 l'axe radical R du faisceau F, puisque cet axe radical contient, comme nous l'avons vu, les centres de tous les cercles A_1, B_1, C_1, ... Les deux faisceaux F et F_1, étant tels que la base de l'un soit l'axe radical de l'autre et *vice versa*, ont donc leurs bases rectangulaires et le même point central O, qui est l'intersection de L_1 et de R_1 aussi bien que de L et de R ; dès lors, il reste seulement à prouver que les puissances μ et μ_1 des deux faisceaux sont égales et de signe contraire. Or, si F est du premier genre, on a

$$\mu = \overline{Oe}^2 = Of^2,$$

e et f étant les deux points limites; mais le cercle (ef , c'est-à-dire le cercle décrit sur ef comme diamètre, coupe orthogonalement tout cercle Ω du faisceau F, puisque (382) du centre ω du cercle Ω, on peut mener au cercle (ef) une tangente égale au rayon de Ω. Donc le cercle (ef) fait partie du faisceau F_1, et la puissance μ_1 de ce faisceau, c'est-à-dire la puissance du point central ω par rapport à (ef), est égale à

$$Oe.Of = -\overline{Oe}^2 = -\mu.$$

Si F est du second genre, on a

$$\mu = -\overline{OP}^2 = -\overline{OP'}^2,$$

P et P′ étant les points fondamentaux; mais le cercle (PP′), c'est-à-dire le cercle décrit sur PP′ comme diamètre, fait partie du faisceau F; il est donc coupé orthogonalement par tout cercle du faisceau F_1 et, par suite, le carré $\overline{OP}^2$ de son rayon est égal à la puissance de son centre O par rapport à tout cercle du faisceau F_1, c'est-à-dire à la puissance μ' de ce dernier faisceau; on a donc

$$\mu' = \overline{OP}^2 = -\mu.$$

4° Soient O, O′, O″ trois cercles n'ayant pas le même axe radical. Si leur centre radical c est intérieur à l'un d'eux, il l'est aussi aux deux autres, et s'il est extérieur à l'un d'eux, il l'est aux deux autres. Dans le premier cas, il n'existe aucun point d'où l'on puisse mener aux trois cercles des tangentes égales et, par suite, aucun cercle ne saurait couper ces trois cercles orthogonalement. Dans le second cas, le centre radical c est le seul point d'où l'on puisse mener à ces trois cercles des tan-

gentes égales; le cercle ayant c pour centre et pour rayon la longueur commune des tangentes égales, est *orthogonal aux trois cercles* O, O′ et O″, et c'est le seul cercle qui jouisse de cette propriété.

5° On dit qu'un cercle (O) est coupé diamétralement par un cercle (O′) lorsque la corde commune à (O) et (O′) est un diamètre du cercle (O).

On démontrera sans peine que, pour *qu'un cercle* (O) *de rayon r soit coupé diamétralement par un cercle* (O′), *il faut et il suffit que la puissance de son centre par rapport au cercle* (O′) *soit égale à* $-r^2$; il suit de là que si les deux cercles A et B n'ont aucun point commun, auquel cas leur axe radical leur est extérieur, il n'y a aucun cercle qui puisse être coupé diamétralement par chacun des cercles A et B; tandis que si A et B se coupent, leur corde commune, c'est-à-dire la partie de leur axe radical qui est intérieure aux deux cercles, est le lieu du centre des cercles qui sont coupés diamétralement par A et B.

Lorsque le centre radical c de trois cercles O, O′, O″ *est intérieur aux trois cercles, il existe un cercle et un seul qui soit coupé diamétralement par chacun des trois cercles* O, O′, O″. C'est le cercle qui a pour centre le centre radical c et pour rayon la moitié de la longueur commune des cordes minimum que l'on peut mener par ce point dans les trois cercles (374).

VI. — Inversion.

PROPRIÉTÉS DES FIGURES INVERSES.

384. Étant donné, dans un plan, un système quelconque de points A, B, C, ..., isolés ou formant des lignes continues, si, sur les rayons vecteurs SA, SB, SC, ..., issus d'un point S choisi arbitrairement dans le plan, on prend, à partir de ce point S, des segments SA′, SB′, SC′, ..., tels que

$$SA.SA' = SB.SB' = SC.SC' = \ldots = \mu,$$

μ étant une quantité constante positive ou négative, on dit que le système A′B′C′... est *inverse* du système ABC.... Le point fixe S prend le nom d'*origine*, et la constante μ le nom de *puissance*. Si cette puissance est positive, les rayons vecteurs correspondants SA et SA′ sont de même sens, et les points correspondants A et A′ sont situés d'un même côté par rapport à l'origine S; si μ est négatif, les rayons vecteurs SA et SA′ sont de sens contraires, et les points correspondants A et A′ sont situés de part et d'autre de l'origine S.

THÉORÈME.

385. *Deux figures* F′ et F″, *inverses d'une même figure* F *par rapport à une même origine* S *et à deux valeurs différentes* μ' *et* μ'' *de la con-*

stante μ, *sont homothétiques* $\left(\text{*leur centre de similitude est le point* S *et leur rapport de similitude est égal à* } \frac{\mu'}{\mu''}\right)$.

En effet, si l'on désigne par M un point quelconque de la figure primitive F, et par M′ et M″ les points correspondants des figures F′ et F″, points qui sont d'ailleurs situés sur la droite indéfinie SM, on a

$$SM.SM' = \mu', \quad SM.SM'' = \mu'';$$

d'où

$$\frac{SM'}{SM''} = \frac{\mu'}{\mu''}.$$

THÉORÈME.

386. M *et* N *étant deux points quelconques d'une figure et* M′, N′, *les points correspondants d'une figure inverse par rapport à une origine* S *et à une puissance* μ, *la distance* M′N′ *s'obtient en multipliant la distance* MN *par le rapport de la puissance* μ *au produit* SM.SN *des deux rayons vecteurs de la figure primitive.*

En effet, la relation (*fig.* 240)

$$SM.SM' = SN.SN' = \mu$$

prouve que *les droites* MN, M′N′ *sont antiparallèles par rapport à l'angle*

Fig. 240.

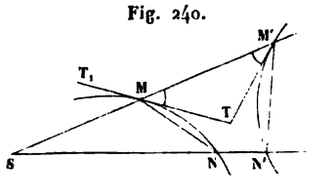
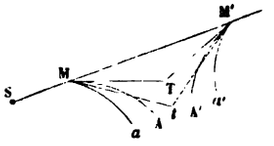


Fig. 241.



MSN, et par suite que les triangles SMN, SM′N′, sont semblables. On a donc

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{SN'}{SM} = \frac{\mu}{SM.SN},$$

d'où

$$M'N' = \frac{MN}{SM.SN} \cdot \mu.$$

THÉORÈME.

387. *L'angle de deux lignes quelconques qui se coupent est égal à l'angle des deux lignes inverses.*

Considérons d'abord (*fig.* 240) une seule ligne quelconque MN et son inverse M'N'; il est aisé de voir que les angles TMM', TM'M, que leurs tangentes MT, M'T, font avec le rayon vecteur SMM', sont égaux; car, si l'on considère un rayon vecteur voisin SNN', les cordes MN et M'N' sont, comme nous l'avons déjà fait observer, antiparallèles par rapport à l'angle MSN; donc les angles SM'N', SNM, sont égaux; or, à la limite, le premier devient l'angle SM'T, et l'autre, l'angle SMT_1, opposé par le sommet à l'angle TMM'; donc, $MM'T = TMM'$. Pour éviter toute ambiguïté dans la manière de compter les angles, on peut remarquer que les deux tangentes correspondantes forment les deux côtés d'un triangle isocèle TMM', dont la base est la partie MM' du rayon vecteur comprise entre les deux points de contact.

Soient actuellement (*fig.* 241) deux courbes Ma et MA qui se coupent en M, et les courbes inverses M'a' et M'A'; il faut prouver que l'angle des deux premières, c'est-à-dire l'angle tMT de leurs tangentes, est égal à l'angle tM'T des deux autres. Or, on a, d'après l'alinéa précédent,

$$tMM' = tM'M, \quad TMM' = TM'M,$$

d'où, en retranchant,

$$tMM' - TMM' \quad \text{ou} \quad tMT = tM'M - TM'M \quad \text{ou} \quad tM'T.$$

Cette propriété de conserver les angles dont jouit ce mode de transformation des figures est très importante : elle entraîne la similitude des triangles infiniment petits correspondants, de sorte que deux figures inverses l'une de l'autre sont deux figures semblables dont le rapport de similitude *varie* d'un lieu à un autre.

Les trois théorèmes précédents sont généraux, c'est-à-dire relatifs à des figures quelconques; les trois suivants sont particuliers et relatifs à la droite et au cercle.

THÉORÈME.

388. *La figure inverse d'une ligne droite est une circonférence passant par l'origine.*

Nous laissons de côté le cas où la droite donnée passe par l'origine. Dans cette hypothèse, cette droite elle-même est évidemment son inverse.

Considérons donc une droite AB ne passant pas par l'origine S (*fig.* 242, 243). Menons du point S sur AB deux droites, l'une SP perpendiculaire, l'autre SM oblique à AB, et prenons respectivement sur ces lignes les inverses P' et M' des points P et M. Les droites MP et M'P' étant antiparallèles (386), l'angle SM'P' doit être droit comme l'angle SPM. Le

lieu du point M' est donc la circonférence décrite sur SP' comme diamètre.

Réciproquement, *la figure inverse d'une circonférence passant par l'origine est une droite perpendiculaire au diamètre qui aboutit à l'origine.*

En effet, soient (*fig.* 242, 243) P l'inverse de l'extrémité P' du diamètre SP' et M l'inverse d'un point quelconque M' de la circonférence. Les droites MP et M'P' étant antiparallèles, l'angle SPM doit être droit

Fig. 242.

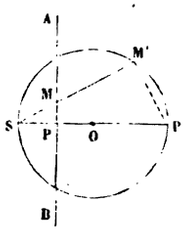
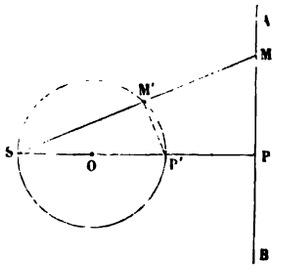


Fig. 243.



comme son égal SM'P'. Le lieu du point M est donc la perpendiculaire élevée par P sur SP'.

Scolie.

389. Les distances SP et SO de l'origine à la droite et au centre du cercle sont liées par la formule

$$2SO.SP = \mu,$$

où μ est la puissance donnée. Cette relation a lieu en grandeur et en signe.

On voit par là qu'*une droite* AB *et un cercle* O *situés d'une manière quelconque dans un plan* (*fig.* 242, 243) *peuvent toujours être considérés comme des figures inverses l'une de l'autre.* Il suffit de choisir pour origine S l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire à la droite, c'est-à-dire (401) l'un des centres de similitude du système formé par la droite et le cercle, et pour puissance μ la valeur en grandeur et en signe du double produit des distances de l'origine à la droite et au centre du cercle.

THÉORÈME.

390. *La figure inverse d'une circonférence, lorsque l'origine est intérieure ou extérieure à la courbe, est une circonférence.*

Soient S et μ l'origine et la puissance données, et p la puissance de l'origine S par rapport au cercle proposé O (*fig.* 244).

La figure inverse du cercle O par rapport à l'origine S et à la puissance p est évidemment le cercle O lui-même ; car, puisque l'on a

$$SM.SN = p,$$

tout point M de ce cercle a pour inverse le point N où le rayon vecteur correspondant rencontre le cercle une seconde fois.

Par suite (385), la figure inverse du cercle O par rapport à l'origine S et à la puissance μ est encore un cercle, puisque cette figure doit être homothétique à la précédente ou au cercle O lui-même, S étant le centre de similitude et $\frac{\mu}{p}$ le rapport de similitude.

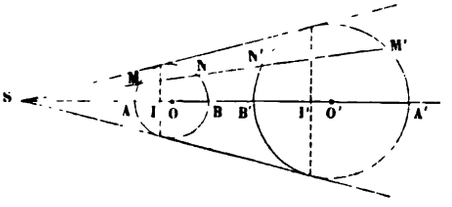
SCOLIES.

391. O et R étant le centre et le rayon du cercle donné, O′ et R′ le centre et le rayon de son inverse, on aura donc

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{\mu}{p} = \pm\frac{R'}{R}.$$

Le signe + se rapporte au cas où, μ et p étant de même signe, l'homothétie est directe, et le signe — au cas où, μ et p étant de signes opposés, l'homothétie est inverse.

Fig. 244.



D'ailleurs, si p' est la puissance de l'origine S par rapport au cercle O′, on a, d'après les relations ci-dessus,

$$\frac{SO'^2 - R'^2}{SO^2 - R^2} \quad \text{ou} \quad \frac{p'}{p} = \frac{\mu^2}{p^2},$$

d'où

$$\mu^2 = pp'.$$

On voit, par ces formules, que *deux cercles* O *et* O′, *situés d'une ma-*

nière quelconque dans un plan, peuvent toujours être regardés comme inverses l'un de l'autre. Il suffit de prendre pour origine S l'un quelconque des deux centres de similitude et, pour puissance, la moyenne géométrique entre les puissances p et p' du point S par rapport aux deux cercles, en donnant à cette moyenne le signe de p ou le signe opposé, suivant que S est un centre de similitude externe ou interne.

On aurait pu déduire tous ces résultats du n° 378. Les points inverses l'un de l'autre ne sont autres que ceux que nous avons appelés *anti-homologues*. On peut donc dire que *les tangentes aux points correspondants de deux cercles inverses se coupent sur l'axe radical des deux cercles.*

392. Les centres O et O′ de deux cercles inverses ne sont pas des points correspondants. Il y a donc lieu de se demander quels sont les inverses de ces centres.

Désignons (*fig.* 244) par I′ l'inverse du centre O et par A, B, A′, B′, les points où la ligne des centres SOO′ rencontre les deux cercles. Nous aurons

$$SO.SI' = \mu,$$

d'où

$$\frac{1}{SI'} = \frac{SO}{\mu} = \frac{p.SO'}{\mu^2} = \frac{SO'}{p'} = \frac{SA' + SB'}{2SA'.SB'},$$

c'est-à-dire

$$\frac{2}{SI'} = \frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'}.$$

Le point I′ est donc (332) le conjugué harmonique de S par rapport au diamètre du cercle O′. Ainsi, *l'inverse du centre de l'un quelconque des deux cercles est le pied de la polaire de l'origine par rapport à l'autre cercle* (340, 341).

On voit par là que, *pour que deux cercles aient pour inverses deux cercles concentriques, il faut et il suffit que l'origine ait même polaire par rapport à ces deux cercles.*

Par suite, *tout faisceau de cercles du premier genre peut, par inversion, être transformé en un système de cercles concentriques;* il suffit de prendre pour centre d'inversion l'un des *points limites e* ou *f* (382), puisque, *e* et *f* étant conjugués harmoniques par rapport à chacun des diamètres *aa′*, *bb′*, *cc′*, la polaire du point *e* est la même par rapport à tous les cercles du faisceau.

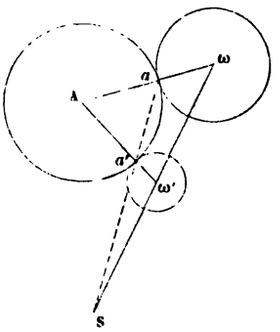
Tout faisceau de cercles du second genre peut, au contraire, *être transformé par inversion en un faisceau de droites;* il suffit évidemment (382) de choisir pour centre d'inversion l'un des *points fondamentaux* P ou P′.

THÉORÈME.

393. *Les cercles inverses* (A') *et* (ω') *de deux cercles tangents* (A) *et* (ω) *sont aussi tangents, puisque l'inversion conserve les angles; d'ailleurs, les contacts entre* (A') *et* (ω') *et entre* (A) *et* (ω) *sont semblables ou dissemblables, suivant que les puissances du centre d'inversion* S *par rapport aux deux cercles primitifs* (A) *et* (ω) *ont le même signe ou des signes opposés* (*fig.* 244$_1$).

Pour le prouver, prenons la constante d'inversion égale à la puissance de S par rapport à (A); ce cercle se transformera alors en lui-même (390). Désignons par p et par ϖ la puissance du point S par rapport à (A) et par rapport à (ω); par A, ω, ω', les centres des cercles (A), (ω), (ω'); enfin, par a et a' les points où (A) est touché respectivement par (ω) et par (ω').

Fig. 244$_1$.



Le centre S d'inversion étant à la fois sur la ligne des centres ωω' et sur la droite aa' qui joint deux points correspondants, le triangle Aωω' coupé par la transversale Saa' donne

$$\frac{a\omega}{aA}\cdot\frac{a'A}{a'\omega'}\cdot\frac{S\omega'}{S\omega}=1. \qquad (1)$$

Mais, puisque l'on prend p pour constante d'inversion, on a

$$\frac{S\omega'}{S\omega}=\frac{p}{\varpi}.$$

Donc, suivant que p et ϖ auront le même signe ou des signes opposés, les deux premiers rapports de la relation (1) seront de même signe

ou de signes contraires. D'ailleurs, le contact en a est interne ou externe, suivant que le rapport $\frac{a\omega}{aA}$ est positif ou négatif; de même, le contact en a' est interne ou externe, suivant que le rapport $\frac{a'A}{a'\omega'}$ est positif ou négatif. Donc, les contacts en a et en a' seront semblables ou dissemblables, suivant que p et ϖ seront de même signe ou de signes contraires.

THÉORÈME.

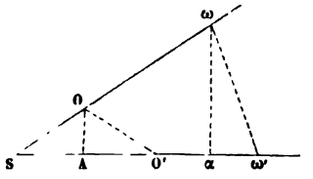
394. *Si l'on considère deux cercles quelconques et leurs inverses, en designant par d, r, r', la distance des centres et les rayons des deux premiers cercles, et par* δ, ρ, ρ', *les éléments analogues pour les deux autres cercles, on a*

$$(1) \qquad \frac{d^2 - r^2 - r'^2}{rr'} = \pm \frac{\delta^2 - \rho^2 - \rho'^2}{\rho\rho'}.$$

Il faut prendre le signe + ou le signe — suivant que les puissances de l'origine par rapport aux deux cercles primitifs sont de même signe ou de signes opposés.

En effet, soient S l'origine, O et O' les centres des premiers cercles, ω et ω' les centres des cercles inverses, A et α les projections de O et de ω sur la droite SO'ω' (*fig.* 245). Désignons par μ la constante d'inversion, et par p, p', ϖ, ϖ', les puissances de l'origine S par rapport aux cercles O, O', ω, ω'.

Fig. 245.



Le triangle SOO' donne

$$d^2 = \overline{SO}^2 + \overline{SO'}^2 - 2SA.SO',$$

ou (372)

$$d^2 - r^2 - r'^2 = p + p' - 2SA.SO',$$

et l'on aurait de même

$$\delta^2 - \rho^2 - \rho'^2 = \varpi + \varpi' - 2S\alpha.S\omega'.$$

D'ailleurs (390, 391),

$$\mu^2 = p\varpi = p'\varpi',$$

$$\frac{S\omega'}{SO'} = \frac{\mu}{p'}, \quad \frac{S\alpha}{SA} = \frac{S\omega}{SO} = \frac{\mu}{p}.$$

Par suite,

$$\delta^2 - \rho^2 - \rho'^2 = \frac{\mu^2}{p} + \frac{\mu^2}{p'} - 2\frac{\mu^2}{pp'}SA.SO' = \frac{\mu^2}{pp'}(p + p' - 2SA.SO'),$$

c'est-à-dire

$$\delta^2 - \rho^2 - \rho'^2 = \frac{\mu^2}{pp'}(d^2 - r - r').$$

Or cette relation ne diffère pas de (1), puisqu'on a (391)

$$\frac{\mu}{p} = \pm\frac{\rho}{r}, \quad \frac{\mu}{p'} = \pm\frac{\rho'}{r'},$$

d'où

$$\frac{\mu^2}{pp'} = \pm\frac{\rho\rho'}{rr'},$$

le signe + convenant au cas où p et p' sont de même signe, et le signe — au cas où p et p' sont de signes contraires.

Scolies.

393. Supposons qu'on prenne pour origine un point dont les puissances par rapport aux deux cercles primitifs soient de même signe, c'est-à-dire un point qui soit à la fois extérieur ou intérieur aux deux cercles. Alors, le signe + conviendra seul, et, si l'on augmente ou si l'on diminue de 2 les deux membres de la relation (1), on aura

$$\frac{d^2 - (r - r')^2}{rr'} = \frac{\delta^2 - (\rho - \rho')^2}{\rho\rho'} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 - (r + r')^2}{rr'} = \frac{\delta^2 - (\rho + \rho')^2}{\rho\rho'}.$$

L'expression $d^2 - (r - r')^2$ représente le carré de la longueur de la tangente commune extérieure aux deux cercles O et O'. Il est vrai que cette tangente commune n'existe plus lorsque ces deux cercles sont intérieurs; mais il est toujours permis, pour la commodité du langage, d'appeler *longueur de la tangente commune extérieure* la racine carrée de la valeur absolue de $d^2 - (r - r')^2$. Si l'on appelle de même *longueur de la tangente commune intérieure* la racine carrée de la valeur absolue de $d^2 - (r + r')^2$, on pourra énoncer le théorème suivant :

Si l'on considère deux cercles quelconques et leurs inverses, le rapport de la tangente commune à la moyenne géométrique des rayons est le même pour les deux couples.

Il est sous-entendu d'ailleurs que l'origine est à la fois intérieure ou extérieure aux deux cercles primitifs, et que l'on doit prendre alors des tangentes communes *de même espèce* dans l'un et l'autre couple.

On verrait de même que, si l'origine est intérieure à l'un des cercles primitifs et extérieure à l'autre, le théorème subsiste, à la condition de prendre des tangentes communes *d'espèces différentes* dans l'un et l'autre couple.

MÉTHODE DE TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES.

396. La figure *inverse* d'une figure donnée prend aussi le nom de *transformée par rayons vecteurs réciproques*. Ce mode de transformation est un des moyens d'investigation les plus puissants dans l'état actuel de la Géométrie. En construisant la figure inverse de celle qui répond à un théorème connu, on obtient des propositions nouvelles qui sont plus ou moins intéressantes, suivant le choix que l'on a fait de l'origine, et la nature de la figure primitive.

Voici quelques exemples :

1° Dans tout triangle rectiligne, la somme des angles est égale à deux angles droits. En formant la figure inverse (388), on obtient un triangle formé par trois arcs de cercle qui se coupent tous à l'origine; et, comme la transformation n'altère pas les angles, on a ce théorème : *La somme des angles d'un triangle curviligne, dont les côtés sont des arcs de cercle qui se croisent en un même point, est égale à deux angles droits.* On aurait un théorème analogue en transformant la proposition relative à la somme des angles d'un polygone.

2° Il est évident que si, dans un angle fixe, on inscrit deux cercles tangents entre eux, le lieu de leur point de contact est la bissectrice de l'angle. Donc, en formant la figure inverse, *si, dans l'espace compris entre deux cercles qui se coupent, on inscrit deux circonférences tangentes entre elles, le lieu de leur point de contact est une autre circonférence.*

397. Au lieu de chercher des propositions nouvelles en partant d'un théorème dont la démonstration est connue, comme nous l'avons fait dans les deux exemples précédents, on peut avoir à démontrer directement un théorème énoncé. On construit alors la figure inverse de celle qui répond au théorème proposé, en choisissant l'origine de façon que la nouvelle figure soit plus simple que la première, et que la propriété correspondante soit, sinon intuitive, au moins plus facile à prouver.

C'est ainsi que tout théorème ou tout problème sur un faisceau de cercles peut être ramené au cas beaucoup plus simple où le faisceau est composé soit de droites, soit de cercles concentriques (392). Par

exemple, ce procédé permettra de démontrer fort aisément la proposition suivante :

Lorsqu'un cercle variable touche toujours de la même manière deux cercles donnés, il coupe sous un angle constant tout cercle du faisceau déterminé par les deux cercles fixes.

Quand, dans une question, on a à considérer plusieurs cercles, *il y a parfois avantage à choisir le centre d'inversion de façon que les transformés de deux de ces cercles soient égaux entre eux.* La chose est possible d'une infinité de manières. En effet, soient R et R_1 les rayons des deux cercles considérés (A) et (B) et ρ le rayon de leurs inverses supposés égaux. On a (391), en désignant par μ la constante d'inversion et par p et p_1 les puissances du centre d'inversion par rapport à (A) et à (B),

$$\frac{\rho}{R} = \frac{\mu}{p}, \quad \frac{\rho}{R_1} = \frac{\mu}{p_1}$$

et, par suite,

$$\frac{p}{p_1} = \frac{R}{R_1}.$$

Le centre d'inversion doit donc appartenir au lieu des points dont les puissances par rapport aux cercles (A) et (B) sont proportionnelles aux rayons R et R_1; et nous savons (382) que ce lieu est un cercle du faisceau déterminé par (A) et (B). On voit même par là que *l'on peut, en général, trouver un centre d'inversion tel, que trois cercles donnés se transforment en trois cercles égaux.*

398. Les exemples que nous venons de traiter se rapportent à des propriétés descriptives ou à des propriétés métriques angulaires. La méthode se prête également à la transformation des propriétés métriques de segments. On emploie à cet effet la formule du n° 386, dans laquelle on peut d'ailleurs faire $\mu = 1$. Il suffit, d'après cela, pour transformer une relation entre diverses distances AB, BC,..., de la figure primitive, de remplacer chaque distance telle que AB par $\frac{AB}{SA.SB}$, S étant le point pris pour origine. Voici un exemple :

Étant donnée sur une droite une série de points se succédant dans l'ordre A, B, C,..., H, K, on a évidemment

$$AK = AB + BC + \ldots + HK.$$

La figure inverse offre une série de points se succédant dans l'ordre S, A, B, C, ..., H, K, sur un cercle passant par l'origine S, et l'on a entre les distances de ces points la relation

$$\frac{AK}{SA.SK} = \frac{AB}{SA.SB} + \frac{BC}{SB.SC} + \ldots + \frac{HK}{SH.SK}.$$

Si les points ne sont qu'au nombre de trois, A, B, C, on a

$$\frac{AC}{SA.SC} = \frac{AB}{SA.SB} + \frac{BC}{SB.SC} \quad \text{ou} \quad AC.SB = AB.SC + BC.SA,$$

et l'on retombe sur le théorème de Ptolémée (240) relatif au produit des diagonales du quadrilatère inscrit.

La méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques, proposée par M. Stubbs (*Philosophical Magazine,* 1843), appliquée ensuite par M. William Thomson sous le nom de *principe des images,* a été l'objet d'un Mémoire de M. Liouville, qui en a donné une théorie analytique complète (*Journal de Mathématiques,* 1re série, t. XII). Depuis lors, la méthode a reçu un très grand nombre d'applications ; nous en trouverons dans le paragraphe suivant des exemples variés, mais nous devons signaler ici l'une des plus élégantes, due à M. Casey, et qui concerne la recherche de la *condition pour que quatre cercles soient tangents à un cinquième.*

399. A et B étant deux cercles quelconques, convenons de désigner par (AB) la *longueur* de leur tangente commune. Ce sera, suivant les circonstances, la tangente extérieure ou la tangente intérieure ; mais, dans tous les cas, il faudra attribuer à cette locution le sens indiqué au n° 395. Ceci entendu, le théorème de M. Casey s'énonce de cette manière :

Lorsque quatre cercles A, B, C, D, *sont tangents à un cinquième cercle* E, *les longueurs de leurs tangentes communes satisfont à la relation*

$$(1) \qquad (AB)(CD) \pm (AC)(BD) \pm (AD)(BC) = 0.$$

Pour démontrer cette proposition, supposons, par exemple, que, des quatre cercles A, B, C, D, touchés par le cercle E, le premier A soit contenu dans E, et que les trois autres soient extérieurs à ce cercle. Convenons, en outre, de compléter la notation (AB), en affectant la parenthèse de l'indice 0 ou 1, suivant qu'on voudra désigner la tangente commune extérieure ou intérieure. Ainsi, $(AB)_0$ sera la tangente commune extérieure aux cercles A et B, et $(AB)_1$ sera la tangente commune intérieure.

Construisons la figure inverse du système, en prenant pour origine S un point quelconque du cercle E (*fig.* 246). Le cercle E deviendra une droite ε qui touchera les cercles α, β, γ, δ, inverses des cercles A, B, C, D, et qui laissera d'un côté le cercle α, et, de l'autre, les cercles β, γ, δ. Or, en désignant par α, β, γ, δ, les points de contact de la droite ε avec ces mêmes cercles, on a, entre les segments compris

entre ces quatre points, la relation suivante, facile à vérifier :

$$\alpha\beta.\gamma\delta - \alpha\gamma.\beta\delta - \alpha\delta.\beta\gamma = 0.$$

En la divisant par le produit $\rho\rho'\rho''\rho'''$ des rayons des quatre cercles α, β, γ, δ, et en adoptant la notation indiquée précédemment, on en déduit

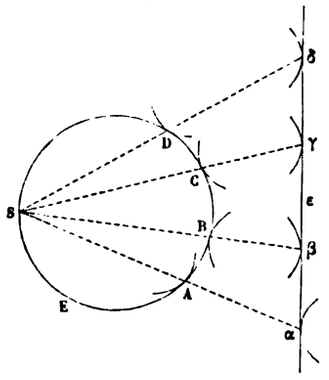
$$\frac{(\alpha\beta)_1}{\rho\rho'}\cdot\frac{(\gamma\delta)_0}{\rho''\rho'''} - \frac{(\alpha\gamma)_1}{\rho\rho''}\cdot\frac{(\beta\delta)_0}{\rho'\rho'''} + \frac{(\alpha\delta)_1}{\rho\rho'''}\cdot\frac{(\beta\gamma)_0}{\rho'\rho''} = 0.$$

Cette relation, en vertu du principe établi au n° 393, revient à

$$\frac{(AB)_1}{RR'}\cdot\frac{(CD)_0}{R''R'''} - \frac{(AC)_1}{RR''}\cdot\frac{(BD)_0}{R'R'''} + \frac{(AD)_1}{RR'''}\cdot\frac{(BC)_0}{R'R''} = 0,$$

R, R′, R″, R‴, étant les rayons des cercles A, B, C, D.

Fig. 246.



La suppression du facteur commun $RR'R''R'''$ donne finalement l'égalité

$$(AB)_1(CD)_0 - (AC)_1(BD)_0 + (AD)_1(BC)_0 = 0,$$

qui rentre bien dans le type (1).

VII. — Quelques problèmes remarquables.

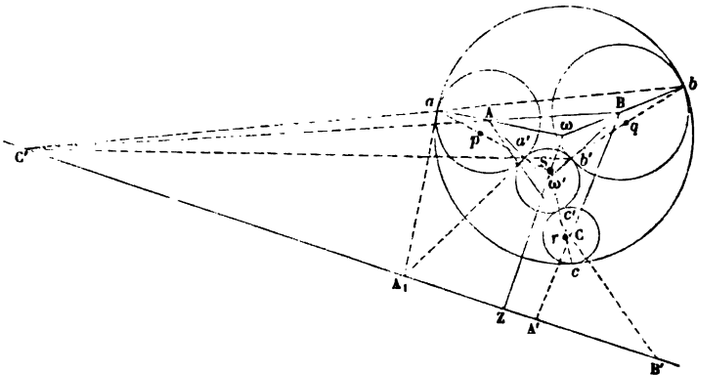
PROBLÈME D'APOLLONIUS : CERCLE TANGENT A TROIS CERCLES DONNÉS.

400. Supposons le problème résolu, et soit (ω) un cercle tangent à trois cercles donnés (A), (B), (C), dont nous désignerons le centre radical par S (*fig.* 247).

Si l'on fait l'inversion de la figure en prenant pour centre d'inversion le point S et pour coefficient d'inversion la puissance de S par rapport à chacun des cercles (A), (B), (C), chacun de ces trois cercles se transformera en lui-même, et le cercle (ω'), inverse de (ω), sera un second cercle tangent à (A), (B), (C); les points de contact a', b', c', de (ω') avec (A), (B), (C), sont d'ailleurs situés sur les droites Sa, Sb, Sc, qui joignent le point S aux points de contact de (ω) avec (A), (B), (C).

Les puissances de S par rapport à (A) et (ω) étant les mêmes que celles de S par rapport à (B) et (ω), il résulte du n° 393 que les contacts en b et en b' sont semblables ou dissemblables, en même temps que les contacts en a et en a'; par suite, les couples de cercles (A) et (B), (ω) et (ω'), satisfont aux conditions du n° 380. S *est donc un centre de similitude de* (ω) *et* (ω'), *et le point de concours* C' *de* ab *et de* $a'b'$ *est à la fois un centre de similitude de* (A) *et* (B) *et un point de l'axe radical de* (ω) *et* (ω'). De même, le point de concours B' de ac et de $a'c'$ est un centre de similitude de (A) et (C) et un point de l'axe radical de (ω) et (ω'). Par suite, *l'axe radical de* (ω) *et* (ω') *est un axe de similitude* C'B'A' *des trois cercles* (A), (B), (C).

Fig. 247.



Il résulte de là que *les centres* ω *et* ω' *des deux cercles associés* (ω) *et* (ω') *sont situés sur la perpendiculaire abaissée de* S *sur* A'B'C'; car la droite ωω' doit passer par le centre de similitude S de (ω) et (ω') et être perpendiculaire à l'axe radical A'B'C' de ces deux cercles.

Enfin, les points a et a' des cercles (ω) et (ω') étant anti-homologues, les tangentes en a et en a' doivent se couper sur l'axe radical

A'B'C' de ces deux cercles (378); en d'autres termes, A'B'C' doit contenir le pôle de aa' par rapport au cercle (A) et, inversement (343), *la corde aa' doit contenir le pôle p de* A'B'C' *par rapport au cercle* (A).

On est ainsi conduit à cette conclusion :

S'il existe un cercle (ω) *tangent à trois cercles donnés* (A), (B), (C), *il en existera un second* (ω'); *ces deux cercles associés* (ω) *et* (ω') *toucheront respectivement le cercle* (A) *aux points a et a', où ce cercle est rencontré par la droite* Sp *qui joint le centre radical* S *des cercles donnés au pôle p par rapport à* (A) *de l'un des axes de similitude des mêmes cercles; les centres* ω *et* ω' *seront les points où les droites qui joignent le centre* A *aux points a et a' rencontrent la perpendiculaire* SZ *abaissée de* S *sur l'axe de similitude considéré.*

Comme il y a quatre axes de similitude (366) des trois cercles (A), (B), (C), on voit que *le nombre des couples de cercles tangents à trois cercles donnés est au plus égal à quatre.*

Pour qu'un tel couple existe, il faut évidemment, d'après ce qui précède, que la droite Sp qui répond à l'axe de similitude considéré coupe le cercle (A). Cette condition est d'ailleurs suffisante. En d'autres termes : *Si la droite* Sp *coupe* (A) *en deux points a et a' et si* ω *et* ω' *sont les points où* Aa *et* Aa' *rencontrent* SZ, *les cercles* (ω) *et* (ω') *décrits, l'un du point* ω *comme centre avec* ωa *pour rayon, l'autre du point* ω' *comme centre avec* $\omega' a'$ *pour rayon, toucheront l'un et l'autre les trois cercles donnés* (A), (B), (C).

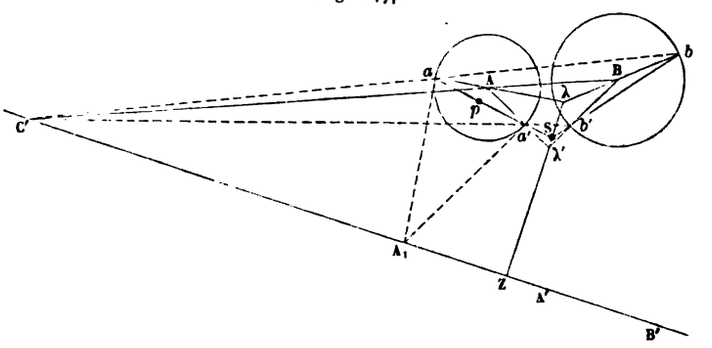
En effet :

D'abord, le cercle (ω) touche (A) au point a, puisque ce point est commun aux deux cercles (ω) et (A) et se trouve situé sur la ligne des centres ωA. De même, le cercle (ω') touche (A) au point a'. Il reste à prouver que (ω) et (ω') touchent l'un et l'autre (B) et (C).

Or, désignons (*fig.* 217$_1$) par b et b' les points de (B) qui sont antihomologues de a et a' par rapport au centre de similitude C'. Il existe (379) un cercle (λ) touchant (A) et (B) en a et en b, ainsi qu'un cercle (λ') touchant (A) et (B) en a' et en b'; le centre λ du premier cercle est à la rencontre de Aa et de Bb, et le centre λ' du second est à la rencontre de Aa' et de Bb'. Si C' est un centre de similitude directe de (A) et (B), les contacts en a et b seront semblables, ainsi que les contacts en a' et b'; si, au contraire, C' est un centre de similitude inverse, les contacts en a et b seront dissemblables, ainsi que les contacts en a' et b' (366). Les contacts en a' et b' sont donc semblables ou dissemblables, en même temps que les contacts en a et b. Par suite, les cercles (λ) et (λ') et les cercles (A) et (B) satisfont aux conditions du n° 380, et l'on peut énoncer les conclusions suivantes : 1° l'intersection de aa' et de bb' appartient à l'axe radical de (A) et (B) et, comme aa' coupe cet axe radical en S, la droite bb' passe par S;

2° le point S est un centre de similitude de (λ) et (λ′) et, par suite, les trois points λ, λ′ et S sont en ligne droite; 3° le point C′ appartient à l'axe radical de (λ) et (λ′) et, comme le pôle A_1 de aa' par rapport à (A) est sur cet axe radical et que, d'autre part, ce pôle doit appartenir à la polaire A′B′C′ du point p situé sur aa', on voit que A′B′C′ contient deux points de l'axe radical de (λ) et (λ′) et se confond avec cet axe : il en résulte que la ligne des centres λλ′ est perpendiculaire à A′B′C′. Les points λ et λ′ étant sur SZ, aux intersections de cette droite avec Aa et Aa', coïncident avec les centres ω et ω′, de sorte que les cercles (ω) et (ω′), coïncidant eux-mêmes avec les cercles (λ) et (λ′), touchent le cercle (B). Un raisonnement analogue prouverait que (ω) et (ω′) touchent aussi (C).

Fig. 247.



Remarquons, en terminant, que, dans la règle énoncée ci-dessus, on peut substituer le cercle (B) ou le cercle (C) au cercle (A). Par conséquent, si l'on désigne (*fig.* 247) par p, q, r, les pôles par rapport à (A), (B), (C), d'un même axe de similitude, les droites Sp, Sq, Sr, couperont respectivement les cercles (A), (B), (C), dès que l'une de ces droites coupera le cercle correspondant.

Cette belle solution appartient à Gergonne. Nous en avons toutefois modifié l'exposition, de manière à ne laisser subsister aucune ambiguïté sur la façon d'associer les points de contact, ni aucune hypothèse arbitraire sur l'existence des cercles tangents, existence que Gergonne admet *a priori*.

401. Pour pouvoir appliquer la solution qui précède aux cas particuliers que l'énoncé du problème comporte, il faut savoir ce que deviennent les éléments que nous avons appelés *pôle, polaire, axe radical, centre de similitude,* lorsque, dans une figure qui renferme des cercles,

un ou plusieurs de ces cercles se réduisent à des points ou à des droites parce que leurs rayons deviennent nuls ou infinis. La connaissance de ces résultats, que nous allons exposer très rapidement, est d'ailleurs indispensable pour la discussion d'un grand nombre de problèmes.

1° *La polaire* L *d'un point* P *par rapport à un point* O (cercle de rayon nul) *est la perpendiculaire à* OP *menée par* O.

2° *Le pôle* P *d'une droite* L *par rapport à un point* O *est le point* O *lui-même.*

Ces deux principes résultent de ce que le produit des distances du point O au pôle P et à la polaire L doit être nul (341).

3° *La polaire d'un point* P *par rapport à une droite* ω (cercle de rayon infini) *est la parallèle à* ω *menée par le symétrique du point* P *par rapport à la droite* ω.

Car le cercle dégénère en réalité en deux droites parallèles qui sont la droite ω et une droite rejetée à l'infini. Or, si l'on mène par P une sécante quelconque qui rencontre en *o* et en *l* les droites ω et L, le système P, *o*, *l*, ∞, sera harmonique, ce qui exige que *o* soit le milieu de *l*P; donc, la polaire L est le lieu des points obtenus en prolongeant les sécantes menées de P à ω de longueurs égales à elles-mêmes.

4° *Le pôle* P *d'une droite* L *par rapport à une droite* ω *est le point à l'infini sur* ω.

Car les polaires de tous les points de L sont (3°) parallèles à ω; leur point de concours, c'est-à-dire le pôle de L, est donc à l'infini sur ω.

5° *Les centres de similitude* O *et* O′ *d'un cercle* C *et d'un point* C′ *se confondent avec le point* C′.

Cela résulte des formules du n° 260, dans lesquelles on fait R′ = 0: on trouve ainsi

$$CO = CO' = CC'.$$

6° *Les centres de similitude* O *et* O′ *de deux points* C *et* C′ *n'ont des positions déterminées qu'autant que l'on donne la loi suivant laquelle les rayons* R *et* R′ *des deux cercles correspondants tendent vers zéro.* Par exemple, si, lorsque R et R′ tendent vers zéro, le rapport de R′ à R reste égal à un nombre donné *m*, les formules du n° 260 donnent

$$CO = \frac{CC'}{1-m} \quad \text{et} \quad CO' = \frac{CC'}{1+m}.$$

7° *Les centres de similitude d'un cercle et d'une droite sont les extrémités du diamètre perpendiculaire à la droite.*

En effet, supposons, dans la *fig.* 182, que le point d'intersection de gauche E′ de la circonférence C′ avec CC′ reste fixe, et que le centre C′ de cette circonférence s'éloigne indéfiniment dans la direction CC′, de

manière que cette circonférence devienne la perpendiculaire élevée à CE' Par E'. Les formules

$$CO = \frac{CE' + R'}{R - R'} R \quad \text{et} \quad CO' = \frac{CE' + R'}{R + R'} R$$

donneront, pour $R' = \infty$,

$$CO = -R \quad \text{et} \quad CO' = R.$$

Le centre de similitude externe devient donc l'extrémité de gauche du diamètre du cercle C perpendiculaire à la droite donnée, et le centre de similitude interne devient l'extrémité de droite de ce diamètre.

8° *Les centres de similitude d'un point et d'une droite se confondent avec ce point.*

Car, si dans les formules ci-dessus on fait R = o en même temps que $R' = \infty$, on trouve

$$CO = o \quad \text{et} \quad CO' = o.$$

9° *Les centres de similitude de deux droites* D *et* D' *sont les points à l'infini situés sur les bissectrices de l'angle des deux droites et de son supplément.*

Ce fait résulte de cette propriété évidente et caractéristique des centres de similitude de deux cercles : *Toute droite menée par un centre de similitude coupe les deux cercles sous le même angle.*

10° *L'axe radical d'un cercle et d'un point est équidistant de ce point et de sa polaire par rapport au cercle.*

Ce fait résulte du n° 375 et des remarques précédentes (1° et 5°).

11° *L'axe radical de deux points est la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite qui les joint.*

12° *L'axe radical d'un cercle et d'une droite est la droite elle-même.*

C'est une conséquence immédiate du n° 383 et des remarques précédentes (3° et 7°).

13° *L'axe radical d'un point et d'une droite est la droite elle-même.*

14° *L'axe radical de deux droites est indéterminé.*

Le problème du cercle tangent à trois cercles donnés comprend *dix cas,* y compris le cas général. En représentant un cercle par C, une droite par D, un point par P, on peut indiquer ces dix problèmes par les symboles PPP, PPD, PPC, PDD, PDC, PCC, DDD, DDC, DCC, CCC.

Les quatre cas PPP, PPD, PDD, DDD, où il ne figure aucun cercle parmi les données, échappent à la méthode; mais leur solution directe n'offre aucune difficulté, comme nous l'avons vu aux n°s 154, 160, 262

et 263. Tous les autres cas se déduisent sans peine de la solution générale, à l'aide des résultats indiqués dans le numéro précédent. Nous nous bornerons aux indications suivantes.

DCC. — Il y a 6 centres de similitude, par suite, 4 axes de similitude et 8 solutions.

DDC. — Il y a encore 4 axes de similitude et 8 solutions.

PCC. — Il n'y a que 2 axes de similitude et, par suite, 4 solutions.

PDC. — Il n'y a que 2 axes de similitude et 4 solutions.

PPC. — Il n'y a que 1 axe de similitude et, par suite, 2 solutions.

402. Il importe de signaler encore, à propos du problème d'Apollonius, quelques relations remarquables qui résultent immédiatement du théorème de M. Casey (399).

1° En supposant que le cercle D se réduise à son point de contact, et en désignant par l, l', l'', les longueurs des tangentes menées de ce point aux trois cercles A, B, C, on voit que, *si un cercle* E *touche trois cercles donnés,* A, B, C, *les tangentes menées d'un point quelconque de ce cercle aux trois cercles donnés satisfont à la relation*

$$l''(\mathrm{AB}) \pm l'(\mathrm{AC}) \pm l(\mathrm{BC}) = 0.$$

2° Enfin, si l'on se reporte à la figure formée par un triangle quelconque, le cercle inscrit D et les trois cercles exinscrits A, B, C, et si l'on applique le théorème de M. Casey à ces quatre cercles considérés successivement comme tangents aux trois côtés du triangle, on obtient les trois relations

$$\begin{aligned} -(\mathrm{AB})_1(\mathrm{CD})_0 + (\mathrm{AC})_1(\mathrm{BD})_0 - (\mathrm{AD})_1(\mathrm{BC})_0 &= 0, \\ (\mathrm{AB})_1(\mathrm{CD})_0 + (\mathrm{AC})_0(\mathrm{BD})_1 - (\mathrm{AD})_0(\mathrm{BC})_1 &= 0, \\ -(\mathrm{AB})_0(\mathrm{CD})_1 - (\mathrm{AC})_1(\mathrm{BD})_0 + (\mathrm{AD})_0(\mathrm{BC})_1 &= 0, \end{aligned}$$

qui, ajoutées membre à membre, donnent

$$(\mathrm{AB})_0(\mathrm{CD})_1 - (\mathrm{AC})_0(\mathrm{BD})_1 + (\mathrm{AD})_1(\mathrm{BC})_0 = 0.$$

Le cercle inscrit et les trois cercles exinscrits à un triangle quelconque sont donc tangents à un cinquième cercle, qui laisse le cercle inscrit d'un côté et les trois cercles exinscrits de l'autre côté.

[Ce théorème est dû à Feuerbach : nous le retrouverons plus loin (404).]

Le même procédé conduit d'ailleurs à ce théorème plus général dû à M. Hart :

Les cercles tangents à trois cercles donnés sont, quatre à quatre, tangents à un cinquième cercle.

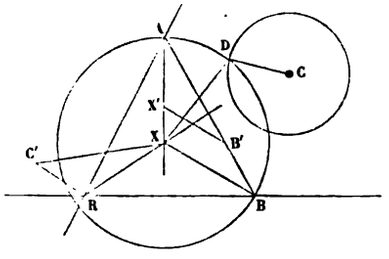
CERCLE COUPANT TROIS CERCLES DONNÉS SOUS DES ANGLES DONNÉS.

403. Nous traiterons d'abord quelques cas particuliers qui sont d'ailleurs intéressants par eux-mêmes, et dont nous emprunterons la solution à M. G. Tarry.

(*a*) *Décrire une circonférence* (X) *coupant respectivement deux droites* RA *et* RB *sous des angles* α *et* β, *et passant par un point* A *pris sur la droite* RA (*fig.* 247$_2$).

Supposons le problème résolu, et soit B l'un des points d'intersection de la circonférence (X) avec la droite RB. Par hypothèse, la tangente en A à la circonférence (X) fait avec la droite RA un angle égal

Fig. 247$_2$.



à α ou à son supplément; par suite, le rayon AX fait avec RA un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ou à son supplément. De même XB fait avec RB un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \beta$ ou à son supplément. Les rayons XA et XB étant égaux, le point B s'obtiendra par le tracé suivant : par un point quelconque X' de la droite AX, qui fait avec RA un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ou à son supplément, menez la droite qui fait avec RB un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \beta$ ou à son supplément; prenez sur cette droite une longueur X'B' égale à X'A; la droite AB' coupe RB au point cherché. Le problème a quatre solutions.

(*b*) *Décrire une circonférence* (X) *qui coupe respectivement deux droites données* RA *et* RB *et une circonférence donnée* (C) *sous trois angles donnés* α, β, γ (*fig.* 247$_2$).

Cherchons le centre X. Soit D l'un des points d'intersection des circonférences (X) et (C). Par hypothèse, l'angle XDC est égal à γ ou à

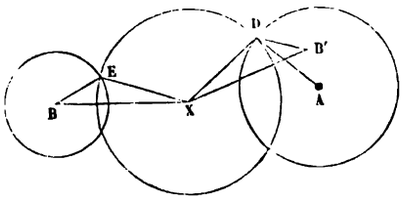
son supplément, et les angles XAR, XBR, sont égaux à $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \beta$, ou à leurs suppléments. Or, les circonférences qui coupent RA et RB sous les angles $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \beta$, sont homothétiques et ont pour centre d'homothétie le point R. On connaîtra donc la position de la droite RX et la valeur du rapport $\frac{XR}{XA} = \frac{XR}{XD}$.

Sur le côté XR, considéré comme homologue de XD, construisons le triangle XRC′, directement ou inversement semblable au triangle XDC. On connaît l'angle XRC′ et la longueur RC′ déterminée par la proportion $\frac{RC'}{DC} = \frac{XR}{XD}$. On peut donc trouver le point C′. D'ailleurs, la similitude des triangles XRC′, XDC, donne la relation $\frac{XC'}{XC} = \frac{XR}{XD}$. Par conséquent, le point X, situé sur la droite connue RX, appartient aussi à la circonférence, lieu des points dont les distances à C′ et à C sont dans le rapport de XR à XD. Le problème comporte huit solutions.

(*c*) *Connaissant deux circonférences* (A) *et* (B) *et un point* D *pris sur* (A), *construire une circonférence* (X) *qui passe par* D *et qui coupe* (A) *et* (B) *sous des angles donnés* α *et* β (*fig.* 247$_3$).

Supposons le problème résolu, et soit E l'un des points communs aux cercles (X) et (B). Par hypothèse, les angles XDA, XEB, sont égaux aux angles α et β ou à leurs suppléments. Sur le côté XD, égal

Fig. 247$_3$.



à XE, construisons le triangle XDB′ symétriquement ou directement égal au triangle XEB. On connaît les angles ADX, XDB′, et, par suite, la position de la droite DB′ et celle du point B′. Le centre X est donc déterminé, puisqu'il est situé sur la droite connue DX et équidistant des points B et B′. Il y a quatre solutions.

(*d*) *Décrire une circonférence* (X) *qui coupe respectivement deux circonférences concentriques* (A) *et* (B) *et une circonférence quelconque* (C) *sous des angles donnés* α, β, γ.

Décrivons une circonférence qui coupe respectivement (A) et (B) sous les angles α et β. L'une des circonférences cherchées sera égale à cette circonférence et coupera (C) sous l'angle γ. Or, le lieu des centres des circonférences égales qui coupent sous un même angle un cercle donné se compose de deux circonférences concentriques. Les centres des cercles cherchés se trouvent donc à la rencontre de circonférences que l'on sait construire. Le problème comporte huit solutions.

(*e*) Nous pouvons maintenant passer au problème général :

Décrire une circonférence (X) *qui coupe respectivement trois cercles donnés* (A), (B), (C), *sous des angles donnés* α, β, γ.

Si deux des cercles donnés, (A) et (B), se coupent, on formera la figure inverse en prenant pour centre d'inversion l'un des points d'intersection O et pour coefficient d'inversion la puissance de ce point par rapport au cercle (C). Ce cercle ne changera pas, les cercles (A) et (B) se transformeront en deux droites et, comme l'inversion n'altère pas les angles, on sera ramené au problème (*b*).

Si les circonférences (A), (B), (C), considérées deux à deux, n'ont aucun point commun, on pourra (392) former la figure inverse de façon que deux des cercles donnés se transforment en deux circonférences concentriques, et le problème sera ainsi ramené au problème (*d*).

CERCLE DES NEUF POINTS.

404. ABC étant un triangle quelconque, désignons par (M) le cercle qui a pour rayon la moitié du rayon du cercle circonscrit et pour centre le milieu M de la droite qui joint le centre O du cercle circonscrit au point de concours H des hauteurs (*fig.* 247).

Le cercle (M) *passe par les milieux a, b, c, des côtés, par les pieds* α, β, γ, *des hauteurs, et par les milieux p, q, r des distances du point de concours* H *des hauteurs aux trois sommets* A, B, C.

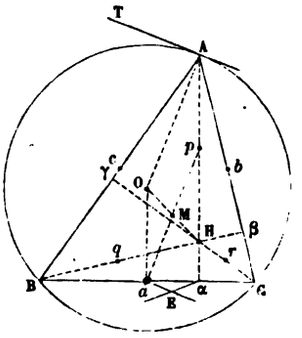
En effet :

1° La droite M*p*, joignant les milieux M et *p* des côtés HO et HA du triangle OHA, est parallèle à la base OA et égale à la moitié de cette base, c'est-à-dire à la moitié du rayon du cercle circonscrit. Le cercle (M) passe donc par *p*, et l'on verrait de même qu'il passe par *q* et *r*.

2° On a vu (117) que les hauteurs du triangle ABC étaient les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un second triangle A'B'C', obtenu en menant par chaque sommet du premier la parallèle au côté opposé. Les triangles A'B'C' et ABC étant semblables et ayant 2 pour rapport de similitude, la droite AH considérée comme liée au triangle A'B'C' est double de la droite O*a* qui est son homologue par rapport au triangle

ABC. Les droites Oa et Ap sont donc égales et, comme elles sont parallèles, pa est égale et parallèle à OA. Par suite, pa n'est donc autre

Fig. 247.



chose que pM prolongée d'une quantité Ma égale à pM, et le cercle (M) passe par a. On verrait de même qu'il passe par b et c.

3° Enfin, puisque pa est un diamètre du cercle (M) et que l'angle paa est droit, le cercle (M) passe par α. On verrait de même qu'il passe par β et γ.

Cette propriété, qui a fait donner au cercle (M) le nom de *cercle des neuf points,* est due à Euler.

On peut aisément trouver les *tangentes aux neuf points.*

La tangente aE au point a est perpendiculaire au rayon Ma ou à sa parallèle OA : elle est donc parallèle à la tangente AT au cercle circonscrit; mais cette tangente est antiparallèle à BC par rapport à l'angle BAC, puisque les angles TAB, ACB, ont la même mesure. Par conséquent, *la tangente* aE *au cercle des neuf points au point a est antiparallèle à* BC *par rapport à l'angle* BAC.

Au point p, la tangente est parallèle à aE et, au point α, la tangente fait avec la direction CB un angle EαB égal à l'angle EaC que la tangente en a forme avec la direction BC. On connaît ainsi les droites qui touchent le cercle (M) aux neuf points a, b, c, p, q, r, α, β, γ.

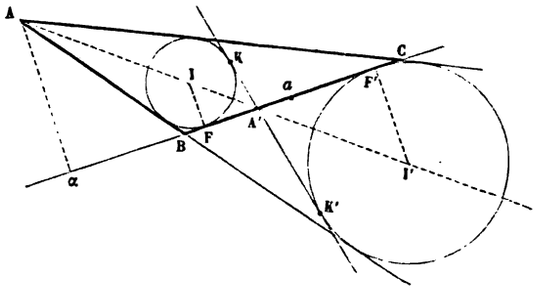
Parmi les nombreuses propriétés dont jouit le cercle (M), il importe de remarquer la suivante, due à Feuerbach :

Le cercle des neuf points est tangent au cercle inscrit et à chacun des cercles exinscrits au triangle ABC (*fig.* 247$_{\text{bis}}$).

En effet, soient I le centre du cercle inscrit et I' le centre de l'un des cercles exinscrits, par exemple de celui qui est compris dans l'angle CAB.

Le côté BC est une tangente commune intérieure aux deux cercles I et I', et son milieu a est aussi le milieu de l'intervalle FF' compris entre

Fig. 247.



ses deux points de contact ; car, en désignant par a, b, c, les côtés du triangle ABC et par p son demi-périmètre, on a (161)

$$BF = p - b, \qquad BF' = p - c$$

et, par suite,

$$\frac{1}{2}(BF + BF') = \frac{1}{2}(2p - b - c) = \frac{a}{2} = Ba.$$

La seconde tangente commune intérieure KK' passe par le point A' où la première rencontre la bissectrice AH' de l'angle BAC ; elle est d'ailleurs symétrique de BC par rapport à cette bissectrice, c'est-à-dire antiparallèle à BC par rapport à l'angle BAC.

Remarquons enfin que les quatre points I, I', A, A', étant harmoniques, leurs projections sur BC forment aussi un système harmonique FF'αA', de sorte qu'on a

$$\overline{aF}^2 = \overline{aF'}^2 = a\alpha . aA'. \qquad (1)$$

Ceci posé, formons la figure inverse des cercles I, I', et du cercle des neuf points, en prenant pour origine le point a et pour constante d'inversion la quantité $\overline{aF}^2$. Cette quantité étant égale à la puissance du point a par rapport à l'un ou l'autre des cercles I et I', chacun de ces cercles coïncidera avec son inverse. Quant au cercle des neuf points, puisqu'il passe par l'origine a, il aura pour inverse une droite. Cette droite passera par A', puisqu'en vertu de l'égalité (1) le point A' est l'inverse de α ; elle devra en outre faire avec la direction BC un angle égal à celui que la tangente en α au cercle des neuf points fait avec cette même direction. En d'autres termes, la droite inverse du cercle des neuf points sera la droite menée par A', antiparallèlement à BC par

rapport à l'angle BAC, c'est-à-dire la seconde tangente commune intérieure KK′ aux deux cercles I et I′. Dans la figure primitive, le cercle des neuf points touche donc les cercles I et I′; et l'on verrait de même que ce cercle touche les deux autres cercles exinscrits.

INVERSEURS DE PEAUCELLIER ET DE HART (*fig.* 247₆, 247₇).

405. Soit ABCD un losange articulé, c'est-à-dire formé de tiges rigides reliées à leurs extrémités de façon que leurs inclinaisons mutuelles puissent varier; soient de plus OB et OD deux autres tiges, égales entre elles et articulées en O, B, D. Tel est le système à *six* tiges de M. Peaucellier; on lui donne le nom d'*inverseur*, parce que, lorsque l'on déforme le système, *le point* O *restant fixe, les points* A *et* C *décrivent des lignes inverses,* O étant le centre d'inversion. En effet, pour toute position de l'appareil, puisque chacun des points O, A, C reste à égales distances des points B et D, les trois points O, A, C sont en ligne droite; d'ailleurs, si l'on imagine le cercle ayant B pour centre et BA pour rayon, puisque la distance OB et le rayon BA restent constants, la puissance $\overline{OB}^2 - \overline{BA}^2$ du point fixe O par rapport à ce cercle mobile reste aussi constante; mais cette puissance s'exprime aussi par le produit OA.OC; donc A et C décrivent des lignes inverses l'une de l'autre.

D'après cela, si l'on fait décrire au point C un cercle quelconque, le point A décrira aussi un cercle. Mais si le cercle que l'on fait décrire au point C passe par le point fixe O, le point A décrira une ligne droite. C'est la première solution rigoureuse qu'on ait donnée du problème de Watt, c'est-à-dire de la transformation d'un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne. Depuis, M. Hart a résolu le même problème à

Fig. 247₆.

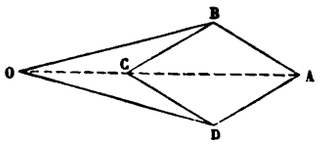
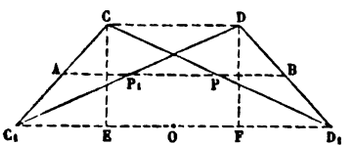


Fig. 247₇.



l'aide de *quatre* tiges seulement; ces tiges forment les côtés égaux CC_1, DD_1, et les diagonales CD_1 et C_1D d'un trapèze isocèle articulé. Soient A, P_1, P trois points divisant respectivement les tiges CC_1, C_1D et CD_1 dans un même rapport; si le système se déforme, A restant fixe, les points P et P_1 décrivent des lignes inverses, A étant le centre d'inversion. En effet, il est clair que, dans toute position du système, les couples CD et C_1D_1, AP_1 et CD, AP et C_1D_1 conservent leur paral-

lélisme, en sorte que A, P_1 et P restent en ligne droite. On a d'ailleurs

$$\frac{AP}{C_1D_1} = \frac{CA}{CC_1}, \qquad \frac{AP_1}{CD} = \frac{C_1A}{CC_1},$$

d'où

$$AP.AP_1 = \frac{CA.C_1A}{\overline{CC_1}^2}.CD.C_1D_1;$$

il suffit dès lors de prouver que le produit $CD.C_1D_1$ est constant. Or, si l'on désigne par O le milieu de C_1D_1 et par E la projection de C sur C_1D_1, on voit que le produit en question est égal à $4OD_1.OE$ ou à $\overline{CD_1}^2 - \overline{CC_1}^2$, qui est une quantité constante.

PROBLÈME DE CASTILLON.

406. *Inscrire dans un cercle donné un polygone dont chaque côte passe par un point donné.*

La solution suivante, que nous empruntons à M. Petersen, offre un exemple très remarquable de la méthode par inversion. Le lecteur la saisira sans peine s'il veut bien faire la figure avec la règle et le compas. Nous avertissons d'ailleurs, une fois pour toutes, que, lorsque nous parlons de l'inversion d'une partie de la figure autour d'un point, il faut entendre que l'on construit la figure inverse de la partie considérée en prenant pour *origine* le point indiqué et pour *puissance* d'inversion la puissance de ce point par rapport au cercle donné.

Il convient de distinguer deux cas suivant que le nombre des côtés est pair ou impair. Nous nous bornerons aux cas du quadrilatère et du triangle, la généralisation n'offrant après cela aucune difficulté.

Cas du quadrilatère. — Soient a, b, c, d les points par lesquels doivent passer respectivement les côtés AB, BC, CD, DA. Remarquons d'abord que le point A, après quatre inversions successives autour de a, b, c, d, revient en A; en d'autres termes, si l'on prend successivement l'inverse A_a de A par rapport à a, l'inverse A_{ab} de A_a par rapport à b, l'inverse A_{abc} de A_{ab} par rapport à c, et enfin l'inverse A_{abcd} de A_{abc} par rapport à d, le point A_{abcd} coïncidera avec A. Désignons par P le point obtenu par l'inversion de d successivement autour de c, b, a, en sorte que l'inversion de P autour de a, b, c reproduira d. Cela posé, si l'on faisait successivement l'inversion de la droite PA autour de a, b, c, d, on trouverait d'abord un cercle passant par a, B, P_a, puis un cercle passant par a_b, C, P_{abc}, ensuite un cercle passant par a_{bc}, D, P_{abc} ou a_{bc}, D, d, et enfin une droite passant par A et par le point a_{bcd} que nous désignerons par Q et que l'on obtient en faisant l'inversion de a autour de b, c, d. Mais les droites QA et PA qui ré-

sultent ainsi l'une de l'autre par quatre inversions doivent (387) faire avec le cercle donné des angles égaux et de même sens, puisque, d'après la manière dont on a choisi les puissances, le cercle se transforme chaque fois en lui-même; donc PA et QA forment une même droite, et l'on obtient le point A par l'intersection du cercle et de la droite qui joint les points connus P et Q.

Cas du triangle. — Soient a, b, c, les points par lesquels doivent passer respectivement les côtés du triangle demandé ABC.

En opérant comme ci-dessus, mais faisant bien entendu trois inversions au lieu de quatre, on trouve encore deux segments rectilignes PA et QA; seulement ils ne forment plus une même droite, car les angles qu'ils font avec le cercle donné sont égaux, mais non de même sens. Soit R le point qu'on obtient en faisant l'inversion autour de a, b, c, de l'un des points où Pa coupe le cercle; par cette opération, aP et AP deviennent les droites RQ et AQ, et les angles aPA, RQA sont égaux et de même sens, en sorte que, si l'on appelle S l'intersection de aP et de QR, le quadrilatère APSQ est inscriptible; le cercle circonscrit au triangle connu PSQ détermine donc le point A par son intersection avec le cercle donné.

PROBLÈME DE MALFATTI.

407. *Étant donné un triangle* ABC, *décrire trois cercles* (a), (b), (c), *inscrits respectivement dans les angles* A, B, C, *et tels que chacun d'eux touche les deux autres.*

Trois cercles (a), (b), (c), considérés deux à deux, donnent lieu à trois couples ayant chacun quatre tangentes communes. Nous dirons que deux tangentes communes sont *associées,* lorsqu'elles seront relatives à un même couple de cercles et qu'elles seront en outre de même espèce, c'est-à-dire toutes deux extérieures ou toutes deux intérieures.

Cela posé, nous établirons d'abord, pour plus de clarté, deux lemmes préliminaires.

1° *Si deux tangentes extérieures* $d\alpha$, $d\gamma$, *relatives à deux couples différents* (b) *et* (c), (b) *et* (a), *et une tangente commune intérieure* dh, *relative au troisième couple* (a) *et* (c), *concourent en un même point* d, *les tangentes* αq, γq, pq, *qui leur sont respectivement associées, concourent aussi en un même point* q (*fig.* 248).

En effet, par le point q, intersection de αq et de γq, imaginons qu'on mène la seconde tangente qp au cercle (c); il suffit de montrer que cette droite qp touche le cercle (a). Or, les quadrilatères $d\alpha q\gamma$, $dhq\alpha$, étant circonscrits, le premier au cercle (b), le second au cercle (c), on a

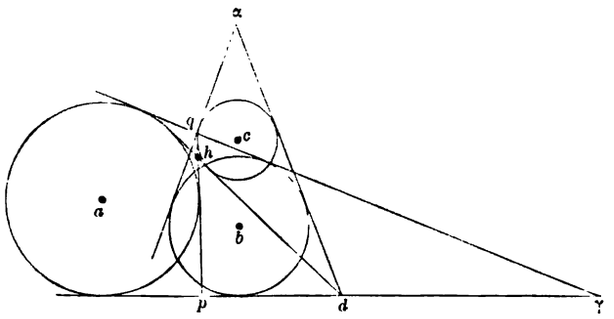
$$d\alpha + d\gamma = q\gamma + q\alpha, \quad d\alpha + qh = dh + q\alpha,$$

d'où, par soustraction,

$$d\gamma + dh = q\gamma + qh.$$

Le quadrilatère $d\gamma qh$ est donc circonscriptible à un cercle; et, comme trois de ses côtés touchent déjà le cercle (a), le quatrième côté qh doit toucher ce même cercle.

Fig. 248.



2° *Si deux cercles* (O) *et* (O′) *déterminent sur une sécante* AB′ *deux cordes égales* AB, A′B′, *ces cercles seront vus sous des angles égaux du point de concours* M *des tangentes* MA, MB′, *menées aux extrémités de la sécante* (*fig.* 248$_1$).

En effet, soient F, P, F′, les projections des points O, M, O′, sur la sécante AB′. Les triangles AMP, AOF, étant semblables, ainsi que les triangles MPB′ et B′O′F′, on a

$$\frac{AM}{MP} = \frac{AO}{AF}, \quad \frac{MP}{B'M} = \frac{B'F'}{B'O'},$$

d'où, par multiplication,

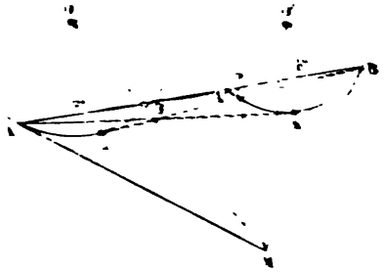
$$\frac{AM}{B'M} = \frac{AO}{B'O'}.$$

Les triangles rectangles AOM, B′O′M, sont donc semblables et, par conséquent, les angles AMO, B′MO′, sont égaux; ce qui démontre l'énoncé, puisque ces angles sont les moitiés de ceux sous lesquels on voit du point M les deux cercles.

Ajoutons que les tangentes AK et B′L sont égales, puisque la puissance de A par rapport au cercle (O′) est évidemment égale à la puis-

sance de B' par rapport au cercle [illegible]. Inversement, si la transversale AB' est telle que les tangentes AK et B'L soient égales, les cordes AB et A'B' le seront elles-mêmes.

Fig. [illegible]



Arrivons maintenant au problème de Malfatti.

Soient D, E, F (fig. 148₂), les points de contact des trois cercles cherchés (a), (b), (c). Les tangentes en D, E, F, étant les axes radicaux de ces cercles pris deux à deux, concourent au centre radical L de ces trois cercles. Soient G et H les points où le côté BC du triangle ABC touche (a) et (c). On a évidemment

$$MQ - MR = GQ - RH = QE - RF = LQ - LR,$$

et la comparaison des membres extrêmes prouve que le point M est le point où le côté RQ touche le cercle inscrit dans le triangle RLQ (161). Nous désignerons ce dernier cercle par (a'), et nous représenterons par (b') et (c') les cercles analogues qui touchent respectivement les côtés AC et AB aux points N et P.

Si l'on considère alors le système des trois cercles (a'), (b'), (c'), les tangentes communes RN, SM, PQ, concourant au point I, il résulte du premier lemme que la seconde tangente commune intérieure à (a') et à (b') passe par le point de concours C des tangentes communes extérieures BC et AC.

Les relations

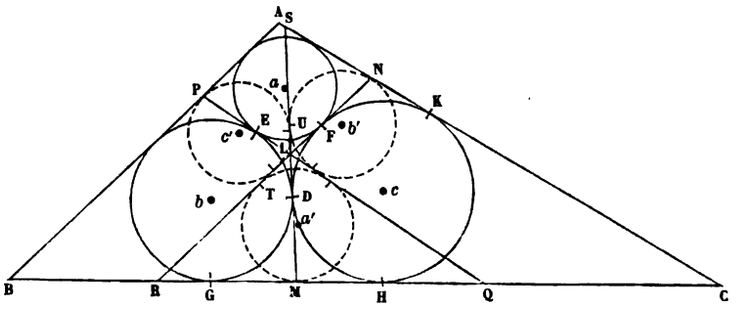
$$MD = MH = TF, \quad DU = NK = NF,$$

donnant, par addition, MU = TN, la remarque qui termine le second lemme prouve que les cercles (a') et (b') doivent intercepter sur MN deux cordes égales. Donc, en vertu de ce même lemme, la tangente

commune intérieure aux deux cercles (a') et (b'), qui passe par le sommet C, est la bissectrice de l'angle C.

De là, on conclut le tracé suivant : I *étant le centre du cercle inscrit dans le triangle donné* ABC, *inscrivez un cercle dans chacun des triangles* IAB, IBC, ICA, *puis menez les secondes tangentes communes intérieures de ces trois cercles pris deux à deux; on obtient ainsi des triangles ayant chacun pour côtés une de ces tangentes et deux côtés du triangle* ABC : *les cercles inscrits dans ces nouveaux triangles sont les cercles cherchés.*

Fig. 248.



Cette règle a été donnée en 1826 par Steiner, mais sans démonstration proprement dite, l'éminent géomètre s'étant borné à indiquer les théorèmes sur les centres de similitude, les axes radicaux, ..., qui permettraient de parvenir au tracé indiqué.

Nous avons adopté ici la démonstration de M. Hart, développée par M. Desboves dans ses *Questions de Géométrie*.

VIII. — Transformation par semi-droites réciproques.

DÉFINITION DES SEMI-DROITES ET DES CYCLES.

408. Une droite étant donnée, on peut supposer qu'elle soit décrite dans un certain sens par un point mobile; une telle droite, déterminée ainsi par sa position et le sens dans lequel elle est décrite, est désignée sous le nom de *semi-droite;* ce sens est indiqué sur la figure par une flèche placée près de la droite.

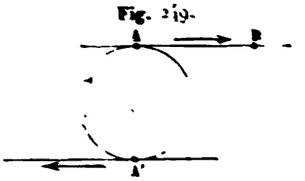
Une même droite pouvant être décrite dans deux sens différents détermine deux semi-droites distinctes que l'on appelle *semi-droites opposées*.

Un cercle étant donné, on peut supposer également qu'il soit décrit dans un certain sens par un point mobile; un tel cercle, déterminé ainsi par sa position et le sens dans lequel il est décrit, est désigné sous le nom de *cycle*; ce sens est indiqué sur la figure par une flèche placée près de la circonférence du cycle.

Un même cercle pouvant être décrit dans deux sens différents détermine deux cycles distincts que l'on appelle *cycles opposés*.

En un point A d'un cycle, la tangente doit être considérée, le long de l'élément infiniment petit commun au cycle, comme décrite dans le même sens

Fig. 249.



que le cycle; la tangente au point A est donc une semi-droite bien déterminée.

De là résultent les conséquences suivantes :

1° *On ne peut mener à un cycle donné qu'une tangente parallèle à une semi-droite donnée* (*fig.* 249).

Il est clair, en effet, qu'on peut mener au cercle déterminé par le cycle deux tangentes parallèles à la droite déterminée par la semi-droite donnée; mais, si l'on désigne par A et par A' les points de contact, on voit que les tangentes au cycle en ces points ont des directions opposées; une seule d'entre elles est donc parallèle à la semi-droite donnée.

2° *Deux cycles donnés ont deux tangentes communes et n'en ont que deux.*

Sur la *fig.* 249, on voit que les semi-droites AA' et B'B sont tangentes à la fois aux deux cycles K et K'. Les cercles déterminés par ces cycles ont quatre tangentes communes dont deux sont précisément AA' et BB'; si l'on considère une quelconque des deux autres, par exemple CC', il est aisé de voir que, quel que soit le sens dans lequel on suppose décrite cette droite, elle ne peut toucher les deux cycles donnés, d'après la définition donnée du contact d'un cycle et d'une semi-droite.

Le point de rencontre P des deux tangentes communes est le *centre de similitude* des deux cycles.

Ce centre de similitude est unique (1).

(1) Une proposition démontrée précédemment peut, par suite de cette définition, s'énoncer de la façon suivante :

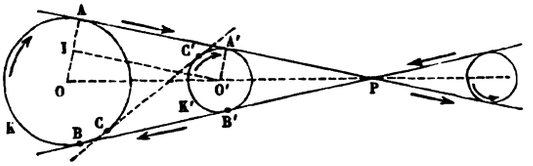
Étant donnés trois cycles, les trois centres de similitude de ces cycles pris deux à deux sont en ligne droite.

La distance AA', comprise sur l'une des tangentes communes entre les points de contact avec les cycles, est la *distance tangentielle des cycles;* elle n'est déterminée qu'en valeur absolue, mais non en signe.

Le rayon d'un cycle sera regardé comme positif si ce cycle est décrit dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, comme négatif dans le cas contraire.

Par suite, en désignant par T la distance tangentielle des deux cycles

Fig. 249.



dont les centres sont O et O', la *fig.* 249 montre immédiatement qu'en désignant par D la distance des centres, on a la relation

$$T^2 = D^2 - (R - R')^2.$$

Cette formule détermine, dans tous les cas possibles, la distance tangentielle de deux cycles; en particulier, si nous considérons deux cycles opposés et si le rayon d'un de ces cycles est R, l'autre est — R; d'ailleurs, la distance de leurs centres est nulle; on a donc, dans ce cas,

$$T^2 = -4R^2.$$

Une semi-droite étant donnée, ainsi qu'un point P, le cycle qui a pour centre ce point et qui touche la semi-droite est bien déterminé; la distance du point P à la semi-droite est le rayon de ce cycle; elle est donc déterminée en grandeur et en signe.

Un point doit être considéré comme un cycle d'un rayon infiniment petit; toutes les semi-droites passant par ce point doivent être considérées comme tangentes à ce cycle.

Étant données deux semi-droites quelconques, on peut construire une infinité de cycles qui leur soient tangents; les centres de ces cycles sont situés sur une même droite que l'on appellera la bissectrice des semi-droites.

Si, le point P d'intersection des semi-droites restant fixe, l'angle que font ces semi-droites diminue indéfiniment en sorte qu'elles tendent toutes les deux à se confondre avec leur bissectrice, les rayons de tous les cycles inscrits diminuent indéfiniment et, à la limite, ces cycles se réduisent à des points, tandis que les deux semi-droites deviennent deux semi-droites opposées.

On voit ainsi que les cycles qui touchent deux semi-droites opposées sont les divers points de la droite qu'elles déterminent.

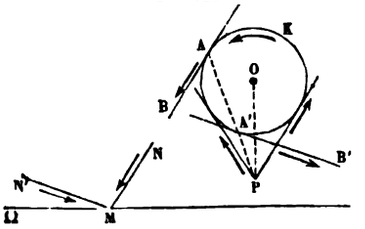
Il résulte aussi de ce qui précède qu'un cycle assujetti à toucher trois semi-droites données est entièrement déterminé. Son centre est le point de rencontre des trois bissectrices des semi-droites prises deux à deux.

MÉTHODE DE TRANSFORMATION.

409. Considérons une droite fixe Ω; traçons dans le plan un cycle quelconque K ayant pour centre le point O et, sur la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite Ω, prenons un point arbitraire P (*fig.* 249₂).

Cela posé, à chaque semi-droite NM du plan, on peut faire correspondre une autre semi-droite de la façon suivante. Menons au cycle R la tangente AB parallèle à NM, joignons le point de contact A au point P, et, au

Fig. 249₂.



point A' où la droite ainsi obtenue rencontre le cycle, menons la tangente A'B'; menons enfin, par le point M où la semi-droite donnée coupe la droite fixe Ω, une semi-droite N'M parallèle à A'B'.

N'M correspond ainsi à NM, et il est clair, en examinant les constructions effectuées, que NM correspond réciproquement à N'M; on dit que ces deux semi-droites sont *réciproques*.

Il résulte évidemment de ce qui précède que :

1° *Deux semi-droites réciproques se coupent sur la droite* Ω *que l'on appelle l'axe de transformation;*

2° *Des semi-droites parallèles ont pour réciproques des semi-droites parallèles.*

Si, du point P, on mène des tangentes au cycle K, on voit que les semi-droites parallèles à ces tangentes sont leurs réciproques à elles-mêmes. Il y a donc deux séries de semi-droites parallèles qui se transforment en elles-mêmes; ces semi-droites font des angles égaux avec l'axe de transformation. Il est toutefois à remarquer que ces semi-droites ne sont réelles que si le point P est extérieur au cycle K.

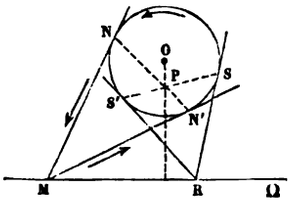
THÉORÈME.

410. *Deux couples quelconques de semi-droites réciproques sont tangents à un même cycle.*

Soient, en effet, Ω l'axe de transformation, NM et MN′ deux semi-droites réciproques, RS une semi-droite quelconque du plan (*fig.* 249$_3$).

Construisons le cycle K qui touche les semi-droites NM, MN′ et RS; menons la droite NN′ qui joint les points de contact de NM et de MN′, et désignons par P le point où cette droite coupe la perpendiculaire abaissée

Fig. 249$_3$.



du point O sur l'axe Ω. Il est clair, d'après ce qui précède, que la transformation, qui a pour axe Ω et dans laquelle NM correspond à MN′, peut être définie au moyen du cycle K et du point P. Si, maintenant, on remarque que P est le pôle de la droite Ω relativement au cycle K, on voit que la tangente S′R est la réciproque de RS; les deux couples de semi-droites réciproques NM et MN′, RS et S′R sont deux tangentes au cycle K, ce qui démontre la proposition énoncée.

La transformation par semi-droites réciproques est ainsi caractérisée par les deux propriétés suivantes :

Deux semi-droites réciproques se coupent sur l'axe de transformation; deux couples de semi-droites réciproques sont tangents à un même cycle (1).

Il est clair que la transformation est entièrement définie quand on se donne l'axe de transformation et deux semi-droites réciproques D et D′. Pour obtenir la réciproque d'une semi-droite quelconque Δ, que l'on construise le cycle tangent à D, D′ et Δ, et que, par le point M où Δ coupe l'axe de transformation, on mène la deuxième tangente au cycle, cette tangente sera la semi-droite cherchée.

---

(1) La transformation par rayons vecteurs réciproques est également caractérisée par les deux propriétés suivantes :

Deux points réciproques sont situés sur une droite passant par le pôle de transformation;

Deux couples de points réciproques sont situés sur un même cercle.

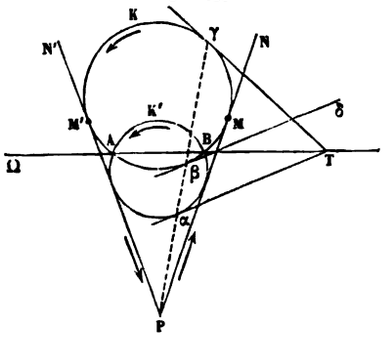
Considérons une courbe K comme l'enveloppe d'une semi-droite mobile Δ, la réciproque Δ′ de Δ enveloppera une courbe K′ qu'on appelle la *transformée de la courbe* K.

THÉORÈME.

411. *Quand on effectue une transformation par semi-droites réciproques, un cycle a pour transformé un autre cycle.*

Soit Ω l'axe de transformation, et considérons un cycle quelconque K coupant l'axe aux points A et B. Menons à ce cycle des tangentes MN et

Fig. 249.



N′M′ parallèles à la direction des semi-droites qui, dans la transformation, sont leurs réciproques à elles-mêmes, et désignons par P le point de rencontre de ces droites (*fig.* 249).

Cela posé, construisons le second cycle K′ qui, passant par les points A et B, touche les semi-droites PM et M′P; je dis que le cycle K′ est le transformé de K.

On voit en effet que la transformation est définie par l'axe Ω, le cycle K et le point P.

Par le point P, menons une sécante quelconque coupant le cycle K′ au point α et le cycle K aux points β et γ. On sait que les tangentes menées en α et γ se coupent en un point T de l'axe radical Ω des deux cycles; d'ailleurs, la tangente βδ au point β est parallèle à αT; il résulte donc de la définition donnée plus haut que αT et Tγ sont deux demi-droites réciproques. L'enveloppe des réciproques des semi-droites qui enveloppent K est donc le cercle K′; ce qu'il fallait démontrer.

On voit ainsi qu'un cycle K a pour réciproque un cycle K′. La relation qui existe entre deux cycles réciproques est caractérisée par les deux propriétés suivantes :

1° *Leur axe radical est l'axe de transformation,*

perpendiculaire à l'axe, il est clair que l'on a

$$T'^2 = p^2 + (D' - d')^2 - (R' - r')^2.$$

Or les formules énoncées plus haut donnent aisément

$$D' - d' = \frac{(D - d)(\alpha^2 + 1) - 2\alpha(R - r)}{1 - \alpha^2},$$

$$R' - r' = \frac{2\alpha(D - d) - (\alpha^2 + 1)(R - r)}{(1 - \alpha^2)}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression précédente, il viendra, toutes réductions faites,

$$T'^2 = p^2 + (D - d)^2 - (R - r)^2 = T^2;$$

ce qui démontre la proposition énoncée (1).

APPLICATIONS DE LA MÉTHODE.

413. Soient (*fig.* 2596) trois cycles K, K′ et K″ ayant respectivement pour centres les points O, O′ et O″. Soient P″ le centre de similitude des cycles O et O′, P′ le centre de similitude des cycles O et O″. Supposons que la droite P′P″ ne coupe pas le centre O; en prenant cette droite pour axe de transformation, nous pourrons toujours, en choisissant convenablement le module de la transformation, transformer le cycle O en un point ω. Les deux tangentes P″A et P″B auront pour transformées les semi-droites opposées déterminées par les points P″ et ω; le cycle K′ étant tangent à AP″ et P″B aura pour transformé un cycle tangent à ces demi-droites opposées, et, par conséquent, un point ω′ qui sera l'intersection de P″ω avec la perpendiculaire abaissée de O′ sur l'axe P′P″.

Les deux tangentes CP′ et P′D auront pour transformées les semi-droites opposées déterminées par la droite P′ω, et il est clair que le cycle O″, qui touche CP′ et P′D, aura pour transformé le point ω″ où P′ω rencontre la perpendiculaire abaissée de O″ sur l'axe P′P″. Si l'on considère

---

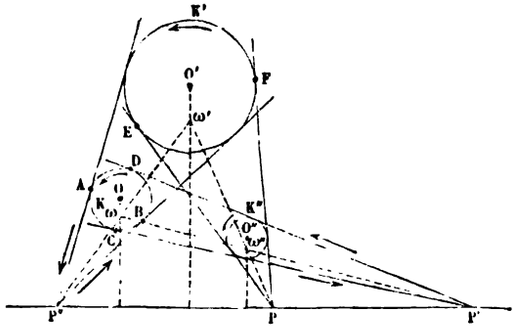
(1) Relativement à la transformation par rayons vecteurs réciproques, le théorème analogue est le suivant : *L'angle sous lequel se coupent deux cercles est égal à l'angle sous lequel se coupent les cercles correspondants.*

Ce théorème s'étend à deux courbes quelconques, et de même dans la transformation par semi-droites réciproques :

Si une semi-droite Δ *touche deux courbes aux deux points a et b, et si la semi-droite réciproque* Δ′ *touche les courbes transformées aux points a′ et b′, les deux longueurs ab et a′b′ sont égales.*

maintenant les deux tangentes communes aux cycles K', K", elles auront pour transformées les semi-droites opposées déterminées par les points ω' et ω". D'où il résulte que ces tangentes se coupent au point P où la droite ω' ω" rencontre P' P", et de là une démonstration nouvelle de cette proposition rappelée plus haut : *Les trois centres de similitude de trois cycles considerés deux à deux sont en ligne droite*; il suit de là également que *si trois cycles sont tels que la droite, qui contient leurs centres de similitude, ne les rencontre pas, on peut, par*

Fig. 249.



une transformation par semi-droites réciproques, les transformer en trois points (1).

414. La transformation par semi-droites réciproques peut servir, comme la transformation par rayons vecteurs réciproques, soit à simplifier la solution de certains problèmes, soit à généraliser certaines propriétés géométriques.

Pour en donner un exemple simple, considérons le problème suivant : *Construire un cycle touchant trois cycles donnés.*

Supposons que les cycles donnés K, K' et K" soient tels que la droite qui contient leurs centres de similitude ne les coupe pas : nous pouvons, d'après ce qui précède, en prenant cette droite pour axe de transformation, transformer les cycles donnés en trois points ω, ω' et ω". Le cercle passant par ces points détermine deux cycles opposés H et H' dont les réciproques seront les solutions du problème. Deux cycles opposés rencontrant l'axe de transformation aux mêmes points, il en est de même de

(1) La propriété analogue dans la théorie de la transformation par rayons vecteurs réciproques est la suivante : *Lorsque deux cercles se coupent, on peut toujours les transformer en deux droites.*

leurs réciproques; d'où il suit que le problème proposé a deux solutions, et que l'axe radical des deux cycles qui satisfont à la question est l'axe de similitude des cycles donnés.

Le problème de *mener un cercle tangent à trois cercles donnés* se ramène immédiatement au précédent. On peut, en effet, donner à un des cercles un sens arbitraire, de façon à le transformer en un cycle; on transformera également les deux autres cercles en cycles en fixant leur direction, ce qui pourra se faire de quatre façons différentes. A chaque groupe de cycles correspondent deux solutions; le problème proposé aura donc en tout huit solutions.

415. Un point décrivant dans un sens déterminé une semi-droite ou un cycle, si l'on emploie la transformation par rayons vecteurs réciproques, on voit que le point transformé décrit une autre semi-droite ou un autre cycle (lequel peut se réduire à une semi-droite quand le pôle de transformation est sur le cycle considéré).

On peut souvent, avec avantage, employer simultanément la transformation par rayons vecteurs réciproques et la transformation par semi-droites réciproques. Ainsi, en général, *étant donnés cinq cycles, on peut, par deux transformations successives, les transformer en deux semi-droites et en trois points*. En effet, si deux des cycles se coupent, par une première transformation par rayons vecteurs réciproques, on pourra les transformer en deux semi-droites. Les trois autres cycles ayant pour transformées K, K′ et K″, si l'axe de similitude de ces cycles ne les rencontre pas, on pourra, par une transformation par semi-droites réciproques, les transformer en trois points, tandis que les semi-droites se transformeront en semi-droites.

La méthode de *transformations par semi-droites réciproques* est due à M. Laguerre (1).

---

(1) Les pages qui précèdent, et que ce profond géomètre a bien voulu rédiger spécialement pour notre Traité, ne renferment que les principes de cette théorie si ingénieuse dont le lecteur pourra constater la fécondité en consultant les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (années 188 et 1882).

LIVRE IV.

LES AIRES.

§ I. — MESURE DES AIRES DES POLYGONES.

DÉFINITIONS.

416. On appelle *aire* l'étendue d'une portion limitée de surface.

Quand deux figures peuvent coïncider, elles sont *égales*. Quand deux figures non superposables ont des aires égales, on dit qu'elles sont *équivalentes*.

Un côté quelconque d'un triangle étant pris pour *base*, la *hauteur* du triangle est la perpendiculaire abaissée du sommet opposé sur la base.

Un côté quelconque d'un parallélogramme étant pris pour *base*, la *hauteur* du parallélogramme est la distance constante (**69**) qui existe entre sa base et le côté opposé.

D'après cela, les deux côtés adjacents d'un rectangle constituent indifféremment sa *base* et sa *hauteur*, et reçoivent le nom de *dimensions* de la figure.

Les *bases* d'un trapèze sont ses deux côtés parallèles, et sa *hauteur* est la distance constante de ces deux côtés.

THÉORÈME.

417. 1° *Si deux rectangles de même base ont des hauteurs égales, ces deux rectangles sont égaux.*

2° *Si trois rectangles de même base sont tels, que la hauteur du premier soit égale à la somme des hauteurs des deux autres, le premier rectangle est égal à la somme des deux autres.*

En effet :

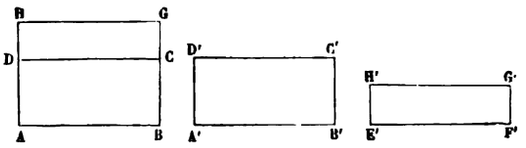
1° Soient (*fig.* 250) les deux rectangles ABCD, A'B'C'D', dont les bases AB et A'B' sont égales ainsi que les hauteurs AD et A'D'. Ces deux rectangles sont évidemment superposables.

2° Soient (*fig.* 250) les trois rectangles ABGH, A'B'C'D', E'F'G'H', dont les bases AB, A'B', E'F', sont égales, et dont les hauteurs AH, A'D', E'H', satisfont à la condition

$$AH = A'D' + E'H';$$

le rectangle AGBH est égal à la somme des deux autres; car, si l'on prend sur AH une longueur AD égale à A'D', et qu'on

Fig. 250.



mène la parallèle DC à AB, DH sera égale à E'H', en vertu de l'hypothèse. Par suite, des deux rectangles ABCD, DCGH, qui composent le rectangle ABGH, le premier sera égal au rectangle A'B'C'D', et le second au rectangle E'F'G'H' (1°).

Corollaires.

418. *Le rapport de deux rectangles de même base est égal au rapport de leurs hauteurs; en d'autres termes, l'aire d'un rectangle de base constante est proportionnelle à sa hauteur.*

Car le théorème précédent prouve qu'un rectangle de base constante et sa hauteur satisfont aux conditions nécessaires et suffisantes (Note I) pour qu'il y ait proportionnalité entre ces grandeurs.

Comme on peut échanger la base et la hauteur d'un rectangle (416), on peut dire aussi que *le rapport de deux rectangles de même hauteur est égal au rapport de leurs bases.*

En rapprochant les deux derniers énoncés, on peut dire que *l'aire d'un rectangle est à la fois proportionnelle à sa base et à sa hauteur.*

Donc (Note I), *le rapport des aires de deux rectangles quelconques est égal au produit des rapports de leurs bases et de leurs hauteurs;* en d'autres termes, *deux rectangles quelconques sont entre eux comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur.*

THÉORÈME.

419. *L'aire d'un rectangle a pour mesure le produit du nombre qui mesure sa base par le nombre qui mesure sa hauteur, lorsque l'on prend pour unité d'aire le carré construit sur l'unité de longueur.*

En effet, soient (*fig.* 250) ABGH le rectangle à mesurer, et A'B'C'D' le carré dont le côté A'B' = A'D' représente l'unité de longueur. On aura (418)

$$\frac{\text{ABGH}}{\text{A'B'C'D'}} = \frac{\text{AB}}{\text{A'B'}} \cdot \frac{\text{AH}}{\text{A'B'}}.$$

Or, le premier membre de cette relation est égal au nombre qui mesure l'aire ABGH (Note I), et les rapports qui composent le second membre sont respectivement égaux aux nombres qui mesurent la base et la hauteur du rectangle proposé. Donc, dans le système d'unités adopté, le nombre qui mesure l'aire du rectangle est égal au produit des nombres qui mesurent sa base et sa hauteur. Ainsi, en désignant ces trois nombres par S, B, H, on a la formule

$$S = B.H.$$

Comme ce théorème est d'un usage très-fréquent, on préfère l'énoncer d'une manière plus rapide, quoique incorrecte, en disant simplement : *L'aire du rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

SCOLIE.

420. L'aire d'un rectangle est encore égale au produit de sa base par sa hauteur, lorsqu'on prend pour unité d'aire le rectangle ayant pour base la longueur prise pour unité de base, et pour hauteur la longueur prise pour unité de hauteur.

421. L'aire d'un carré est égale au carré de son côté; de là, le nom de *carré* donné à la seconde puissance d'un nombre.

422. EXEMPLES :

1° *Quelle est la surface d'un rectangle dont la base est égale à* $2^m,34$, *et la hauteur à* $3^m,19$?

On a pour l'aire demandée :

$$S = 2,34 \times 3,19 = 7^{mq},4646,$$

ou 7 mètres carrés, 46 décimètres carrés, 46 centimètres carrés.

2° *Il a fallu* 15 *rouleaux de papier, de* 10 *mètres de longueur chacun sur* $0^m,60$ *de largeur, pour tapisser une paroi rectangulaire de* $18^m,25$ *de largeur; quelle est la hauteur de cette paroi?*

La surface du rectangle considéré est

$$S = 10 \times 0,60 \times 15 = 90^{mq}.$$

Sa base étant $18^m,25$, on aura pour sa hauteur

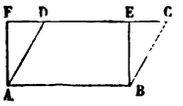
$$H = \frac{90}{18,25} = 4^m,93,$$

à moins de 1 centimètre.

THÉORÈME.

423. *L'aire d'un parallélogramme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Fig. 251.



Soit (*fig.* 251) le parallélogramme ABCD. On obtient le rectangle de même base et de même hauteur en menant des extrémités de la base AB sur le côté opposé les perpendiculaires AF et BE. Pour démontrer le théorème énoncé, il suffit alors (419) de prouver l'équivalence du parallélogramme ABCD et du rectangle ABEF. Le trapèze ABED est une partie commune à ces deux figures; il reste donc à comparer les parties non communes BEC, AFD. Or ces parties non communes sont des triangles rectangles égaux, comme ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal, savoir : BC = AD comme côtés opposés d'un parallélogramme, et BE = AF pour la même raison.

COROLLAIRES.

424. En désignant par S, B, H les trois nombres qui mesurent respectivement l'aire d'un parallélogramme, sa base et sa hauteur, on a la formule

$$S = B.H.$$

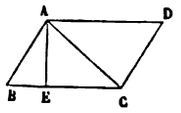
Donc :

Deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents; deux parallélogrammes sont entre eux comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur; deux parallélogrammes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs; deux parallélogrammes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

THÉORÈME.

425. *L'aire d'un triangle a pour mesure la moitié du produit de sa base par sa hauteur.*

Fig. 252.



Il suffit, pour démontrer ce théorème, de prouver que tout triangle est la moitié du parallélogramme de même base et de même hauteur.

Soit le triangle ABC (*fig.* 252). On obtient un parallélogramme de même base BC et de même hauteur AE, en menant, par les sommets A et C du triangle, des parallèles AD et CD aux côtés opposés. Le triangle ABC est la moitié de ce parallélogramme ABCD, car tout parallélogramme est partagé par une de ses diagonales en deux triangles égaux. Donc, l'aire du parallélogramme ABCD étant égale au produit de sa base BC par sa hauteur AE (423), l'aire du triangle ABC sera égale à la moitié du produit de sa base BC par sa hauteur AE.

COROLLAIRES.

426. En désignant par S, B, H, les trois nombres qui mesurent respectivement l'aire du triangle, sa base et sa hauteur,

on a la formule

$$S = \frac{B.H}{2} = \frac{B}{2} \cdot H = B \cdot \frac{H}{2}.$$

Donc :

Deux triangles de même base et de même hauteur sont équivalents; deux triangles sont entre eux comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur; deux triangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs; deux triangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

427. Quand le triangle est équilatéral, son aire s'exprime en fonction de son côté a.

La hauteur du triangle tombant alors au milieu de sa base, on a en effet

$$H = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

et la formule

$$S = \frac{B}{2} \cdot H$$

devient

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

EXEMPLE. — *Quelle est la surface du triangle équilatéral de* 1 *mètre de côté?*

On a

$$S = \frac{1^{mq} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{1^{mq},7321}{4} = 0^{mq},4330$$

à 1 centimètre carré près.

428. Considérons un triangle ABC et appelons

a, b, c, les côtés respectivement opposés aux sommets A, B, C;
p, le demi-paramètre;
S, l'aire;
h, la hauteur relative au côté a;
R, le rayon du cercle circonscrit;
r, le rayon du cercle inscrit;
r', r'', r''', les rayons des cercles ex-inscrits qui sont respectivement situés dans les angles A, B, C.

1° La proposition du n° 239 donne

$$bc = 2Rh, \quad \text{d'où} \quad abc = 2Rah = 4R.S,$$

et, par suite,

$$S = \frac{abc}{4R}. \tag{1}$$

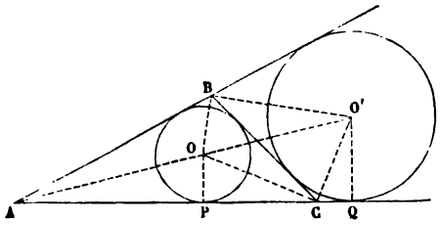
Ainsi, *l'aire d'un triangle est égale au produit des trois côtés divisé par quatre fois le rayon du cercle circonscrit.*

2° En joignant aux trois sommets A, B, C, le centre O du cercle inscrit, on voit (*fig.* 253) que

$$ABC = OBC + OCA + OAB.$$

Et, comme les triangles indiqués dans le second membre ont respecti-

Fig. 253.



vement pour bases a, b, c, et pour hauteur commune le rayon r du cercle inscrit, on a

$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

ou

$$S = pr. \tag{2}$$

3° En joignant aux trois sommets le centre O' du cercle ex-inscrit situé dans l'angle A, on voit que

$$ABC = O'CA + O'AB - O'BC$$

ou

$$S = \frac{br'}{2} + \frac{cr'}{2} - \frac{ar'}{2} = \frac{b+c-a}{2} \cdot r' = \frac{2p-2a}{2} \cdot r',$$

c'est-à-dire

$$S = (p-a)\,r'. \tag{3}$$

On trouverait de même

$$S = (p-b)\,r'', \tag{4}$$

$$S = (p-c)\,r'''. \tag{5}$$

Les formules (2), (3), (4), (5), donnent de nouvelles expressions de l'aire d'un triangle.

4° Les formules (1), (2), (3), (4), (5), permettraient inversement de calculer R, r, r', r'', r''', en fonction des trois côtés, si l'on connaissait l'expression de l'aire S en fonction de ces côtés.

Or, cette expression résulte immédiatement du calcul fait au n° 229. On a trouvé, en effet,

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

d'où, en remarquant que $S = \frac{a}{2} \cdot h$,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \tag{6}$$

On peut d'ailleurs établir cette formule géométriquement de la manière suivante (*fig.* 253).

En multipliant les relations (2) et (3) membre à membre, on obtient

$$S^2 = p(p-a)\,r.r'.$$

Les bissectrices OC et O'C des deux angles adjacents et supplémentaires BCA, BCQ, étant rectangulaires, les triangles OPC, O'QC, sont semblables comme ayant les côtés perpendiculaires, et l'on a

$$\frac{OP}{CQ} = \frac{PC}{O'Q} \quad \text{ou} \quad OP.O'Q = PC.CQ.$$

Mais OP et O'Q sont respectivement égaux à r et à r', et, d'après le n° 161, les longueurs PC et CQ sont respectivement égales à $p-b$ et à $p-c$. On a donc

$$rr' = (p-b)(p-c),$$

et, par suite, la relation qui représente le produit des équations (2) et (3) devient

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

5° Enfin, en multipliant membre à membre les relations (2), (3), (4) et (5), on obtient

$$S^4 = p(p-a)(p-b)(p-c).r.r'.r''.r''',$$

d'où résulte, eu égard à la formule (6), l'expression plus curieuse qu'utile

$$S = \sqrt{r.r'.r''.r'''}. \tag{7}$$

APPLICATION NUMÉRIQUE. — *Calculer l'aire* S *et les rayons* R, r, r', r'', r''', *des cercles circonscrit, inscrit et ex-inscrits, relatifs au triangle qui a pour côtés*

$$a = 3^m, \quad b = 4^m, \quad c = 5^m.$$

On a d'abord

$$2p = a + b + c = 3 + 4 + 5 = 12,$$

d'où

$$p = 6, \quad p - a = 3, \quad p - b = 2, \quad p - c = 1.$$

Les formules (6), (1), (2), (3), (4), (5), donnent ensuite successivement

$$S = \sqrt{6.3.2.1} = 6^{mq}, \quad R = \frac{3.4.5}{4.6} = 2^{m},5;$$

$$r = \frac{6}{6} = 1^{m}, \quad r' = \frac{6}{3} = 2^{m}, \quad r'' = \frac{6}{2} = 3^{m}, \quad r''' = \frac{6}{1} = 6^{m}.$$

Le triangle considéré étant rectangle, puisque $c^2 = a^2 + b^2$, il est facile de trouver directement les valeurs numériques que nous venons de déduire des formules générales.

429. Pour évaluer l'aire d'un polygone, il suffit de décomposer ce polygone en triangles, de calculer les aires de ces triangles et de faire la somme des nombres ainsi obtenus.

Pour opérer cette décomposition, on peut choisir un point quelconque dans le plan du polygone et le joindre à tous ses sommets. Les bases des différents triangles formés seront les côtés du polygone, leurs hauteurs seront les perpendiculaires abaissées du point choisi sur ces côtés. L'aire du polygone sera la somme arithmétique ou algébrique des aires des triangles obtenus, suivant que leur sommet commun sera intérieur ou extérieur au polygone.

Souvent, on fait la décomposition en prenant pour centre l'un des sommets du polygone, c'est-à-dire en menant toutes les diagonales qui partent d'un même sommet.

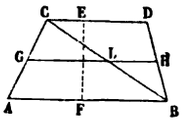
430. Si l'on peut trouver dans l'intérieur du polygone un point à égale distance de tous ses côtés, c'est-à-dire *si le polygone est circonscriptible*, les triangles qui le composent ont pour hauteur commune le rayon du cercle inscrit, et *son aire a pour mesure la moitié du produit de son périmètre par le rayon du cercle inscrit.*

THÉORÈME.

431. *L'aire d'un trapèze a pour mesure le produit de la demi-somme de ses bases par sa hauteur.*

Soit le trapèze ABCD (*fig.* 254). En menant la diagonale BC, on le partage en deux triangles ABC, BCD, qui ont pour hau-

Fig. 254.



teur commune la hauteur EF du trapèze, et pour bases respectives les bases même du trapèze. L'aire du premier est égale à $\frac{AB}{2} \cdot EF$, celle du second à $\frac{CD}{2} \cdot EF$. En ajoutant ces deux expressions, on trouve, pour l'aire du trapèze,

$$\frac{AB + CD}{2} \cdot EF.$$

Scolies.

432. En désignant par S, B, *b*, H, les nombres qui mesurent respectivement l'aire d'un trapèze, ses deux bases et sa hauteur, on a la formule

$$S = \frac{B + b}{2} \cdot H.$$

433. Menons par le point G (*fig.* 254), milieu du côté AC, une parallèle GH aux deux bases du trapèze. Cette parallèle coupera le côté BD et la diagonale BC en leurs milieux H et L (182). On aura donc

$$GL = \frac{AB}{2}, \quad LH = \frac{CD}{2}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad GH = \frac{AB + CD}{2}.$$

La droite qui joint les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze est donc égale à la demi-somme de ses bases, et l'on peut dire par suite que *l'aire d'un trapèze est égale au produit de sa hauteur par la droite qui joint les milieux de ses côtés non parallèles.*

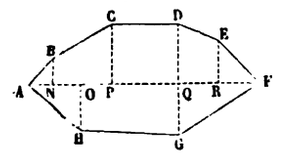
Exemple. — *L'une des bases d'un trapèze égale* 10 *mètres, sa hauteur est de* 4 *mètres, sa surface de* 32 *mètres carrés. On*

demande de calculer la longueur de la parallèle aux deux bases, menée à 1 mètre de distance de la base donnée.

En divisant la surface du trapèze par sa hauteur, on obtient 8 mètres pour la longueur de la droite qui joint les milieux de ses côtés non parallèles. Si l'on remarque maintenant que cette droite divise le trapèze proposé en deux autres trapèzes de hauteur égale à 2 mètres, on voit que, dans l'un de ces trapèzes, la droite dont on cherche la longueur est aussi celle qui joint les milieux des côtés non parallèles. Elle est donc égale à $\frac{10^m + 8^m}{2}$, ou à 9 mètres.

434. Nous avons dit au n° 429 que, pour évaluer l'aire d'un polygone, on décomposait ce polygone en triangles. Plus généralement, il suffit de le décomposer en parties que l'on sache mesurer, et de faire ensuite la somme des aires partielles. Voici un procédé de décomposition très-usité, principalement sur le terrain.

Fig. 255.



On mène la plus grande diagonale AF (*fig.* 255) du polygone proposé; puis, à l'aide des perpendiculaires BN, CP, DQ, ER, HO, GQ, abaissées des sommets extérieurs sur cette diagonale, *on décompose le polygone en triangles et en trapèzes rectangles.* En mesurant avec soin ces diverses perpendiculaires et les distances mutuelles de leurs pieds sur AF, on a tous les éléments nécessaires pour calculer les aires partielles dont le polygone considéré est la somme.

§ II. — COMPARAISON DES AIRES.

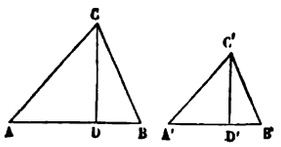
THÉORÈME.

435. *Le rapport des aires de deux polygones semblables est égal au carré de leur rapport de similitude,* ou *deux polygones*

semblables sont entre eux comme les carrés des côtés homologues.

Soient d'abord deux triangles semblables ABC, A′B′C′ (*fig.* 256), ayant pour bases les côtés AB, A′B′, et pour hauteurs les droites CD, C′D′.

Fig. 256.



On aura (425)

$$ABC = \frac{1}{2}AB.CD, \quad A'B'C' = \frac{1}{2}A'B'.C'D',$$

d'où

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB.CD}{A'B'.C'D'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{CD}{C'D'}.$$

D'ailleurs, les deux triangles rectangles ACD, A′C′D′, étant semblables (202), on peut remplacer le rapport $\frac{CD}{C'D'}$ par son égal $\frac{AC}{A'C'}$ ou $\frac{AB}{A'B'}$, et écrire

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AB}{A'B'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

Soient maintenant deux polygones semblables S et S′. Leur rapport de similitude, égal à celui de deux côtés homologues quelconques AB et A′B′, sera représenté par $\frac{AB}{A'B'}$. Ces deux polygones seront décomposables en un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés (209), et le rapport de similitude de deux triangles homologues sera égal au rapport de similitude des deux polygones. Si le polygone S est composé des triangles T, T_1, T_2, et le polygone S′, des

triangles homologues T', T'_1, T'_2, on aura donc, d'après ce qui précède,

$$\frac{T}{T'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}, \quad \frac{T_1}{T'_1} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}, \quad \frac{T_2}{T'_2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2};$$

et, par suite, en appliquant un théorème connu,

$$\frac{T + T_1 + T_2}{T' + T'_1 + T'_2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{S}{S'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

SCOLIE.

436. De la relation démontrée, on déduit réciproquement

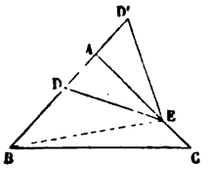
$$\frac{AB}{A'B'} = \sqrt{\frac{S}{S'}}.$$

Donc, lorsqu'on veut *amplifier* ou *réduire* un polygone dans un rapport donné, l'*échelle* à adopter pour amplifier ou réduire les côtés de ce polygone est égale à la racine carrée du rapport donné. Par exemple, si l'aire du nouveau polygone doit être la centième partie du polygone donné, il faudra faire ses côtés dix fois plus petits que les côtés homologues du polygone donné.

THÉORÈME.

437. *Deux triangles qui ont un angle égal ou supplémentaire sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle.*

Fig. 257.



Soient deux triangles ayant un angle égal. On pourra les placer l'un par rapport à l'autre comme le sont les triangles ADE, ABC (*fig.* 257), c'est-à-dire les disposer de telle sorte qu'ils aient un angle commun.

Menons alors la droite BE, et comparons successivement le triangle ABE aux deux triangles donnés. Les deux triangles ABC et ABE ont même

hauteur, puisque leurs bases AC, AE, opposées au sommet commun B, sont en ligne droite; on aura donc (426)

$$\frac{ABC}{ABE} = \frac{AC}{AE}. \qquad (1)$$

De même, les deux triangles ABE et ADE ont même hauteur, puisque leurs bases AB et AD, opposées au sommet commun E, sont en ligne droite; on aura donc également

$$\frac{ABE}{ADE} = \frac{AB}{AD}. \qquad (2)$$

En multipliant membre à membre les égalités (1) et (2) et en supprimant le facteur commun ABE, il viendra

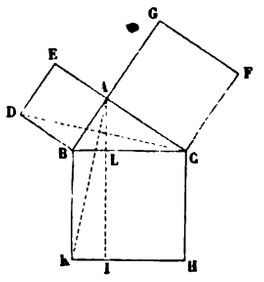
$$\frac{ABC}{ADE} = \frac{AC.AB}{AE.AD}.$$

La démonstration subsiste pour deux triangles ABC, AD'E, qui ont un angle supplémentaire; il suffit de remplacer partout la lettre D par la lettre D'.

THÉORÈME.

438. *Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit* (*fig.* 258).

Fig. 258.



Soit le triangle ABC rectangle en A; soient les carrés ABDE, ACFG, BCHK, construits sur ses trois côtés. L'angle en A étant droit, le côté AE du carré ABDE sera le prolongement du côté CA du triangle, et le côté AG du carré ACFG sera le prolongement du côté BA.

Ceci posé, abaissons sur l'hypoténuse BC la perpendiculaire AL, et prolongeons-la jusqu'en I où elle coupe le côté KH; menons les droites AK et DC. Le triangle ABK a même base BK que le rectangle BKIL, et il a aussi même hauteur, puisque son sommet A se trouve sur la droite IL : le triangle ABK équivaut donc (425) à la moitié du rectangle BKIL. De même, le triangle BCD équivaut à la moitié du carré ABDE, car il a même base BD et même hauteur, puisque son sommet C se trouve sur la droite EA. D'ailleurs, les deux triangles ABK et BDC sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : l'angle ABK égal à l'angle CBD, comme formés tous deux d'un angle droit et de l'angle ABC du triangle donné; le côté BK égal au côté BC comme côtés d'un même carré; le côté AB égal au côté BD pour la même raison. De l'égalité des deux triangles ABK et BDC, on conclut l'équivalence du rectangle BKIL et du carré ABDE.

On démontrerait d'une manière analogue, en menant les droites AH et BF, l'équivalence du rectangle CHIL et du carré ACFG.

Le carré BCHK, somme des deux rectangles BKIL et CHIL, est donc équivalent à la somme des deux carrés ABDE et ACFG.

Corollaires.

439. Deux rectangles de même hauteur étant entre eux comme leurs bases, on a

$$\frac{\text{BKIL}}{\text{BCHK}} = \frac{\text{BL}}{\text{BC}} \quad \text{et} \quad \frac{\text{CHIL}}{\text{BCHK}} = \frac{\text{CL}}{\text{BC}};$$

d'où, en remplaçant les rectangles par les carrés équivalents,

$$\frac{\text{ABDE}}{\text{BL}} = \frac{\text{ACFG}}{\text{CL}} = \frac{\text{BCHK}}{\text{BC}}.$$

Les carrés construits sur les côtés de l'angle droit et sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle sont donc respectivement proportionnels aux projections de ces côtés sur l'hypoténuse et à l'hypoténuse elle-même.

440. Si l'on construit sur les côtés de l'angle droit et sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle ABC trois polygones semblables P, Q, R, on aura (435)

$$\frac{P}{\overline{AB}^2} = \frac{Q}{\overline{AC}^2} = \frac{R}{\overline{BC}^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{P+Q}{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \frac{R}{\overline{BC}^2},$$

c'est-à-dire (224)

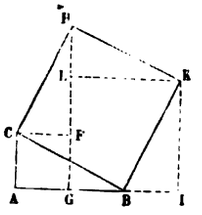
$$R = P + Q.$$

SCOLIE.

441. On peut donner du théorème qui précède (438) une autre démonstration qui montre comment on peut *décomposer effectivement* le carré construit sur l'hypoténuse en parties capables de recouvrir les carrés construits sur les côtés.

Soit (*fig.* 259) le triangle ABC rectangle en A. Sur l'hypoténuse BC, construisons le carré BCHK. Des sommets H et K,

Fig. 259.



abaissons sur le côté AB et sur son prolongement les perpendiculaires HG et KI; des sommets C et K, menons à ce même côté, jusqu'à la rencontre de HG, les parallèles CF et KL.

Les quatre triangles rectangles ABC, CFH, HLK, KIB, sont égaux, comme ayant l'hypoténuse égale et un angle aigu égal. GIKL et ACFG sont donc les carrés construits sur les côtés AB et AC du triangle donné. La figure montre alors immédiatement que, si l'on enlève les deux triangles HCF, HLK, qui, avec le pentagone irrégulier CFLKB, constituent le carré construit sur l'hypoténuse, pour les placer en CAB et BKI, on forme, avec les trois mêmes parties disposées de cette nouvelle façon, la figure ACFLKI, qui est précisément la somme des deux carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit.

442. Enfin, on peut encore déduire le même théorème de celui du n° **224**. Car, puisque l'aire du carré construit sur une droite a pour mesure le carré du nombre abstrait qui mesure la longueur de cette droite, on voit que le théorème du n° **224** exprime que la mesure du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des mesures des carrés construits sur les côtés de l'angle droit, et, par suite, que le premier carré équivaut à la somme des deux autres. Inversement, on passerait du point de vue *concret* au point de vue *abstrait*, c'est-à-dire du n° **438** au n° **224**, en remplaçant les aires des carrés par leurs mesures respectives.

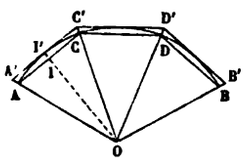
La même remarque s'applique aux diverses relations numériques que nous avons démontrées dans le § IV du Livre III, entre les divers éléments d'un triangle rapportés à une unité commune. De ces relations, résultent immédiatement autant de théorèmes sur les aires, et l'on pourrait inversement donner des démonstrations directes de ces derniers théorèmes et en déduire ensuite les relations numériques correspondantes.

§ III. — AIRES DU POLYGONE RÉGULIER ET DU CERCLE.

DÉFINITIONS.

443. Un *secteur circulaire* est la portion de cercle comprise entre un arc ACDB et les rayons OA, OB, menés aux extrémités de cet arc (*fig.* 260).

Fig. 260



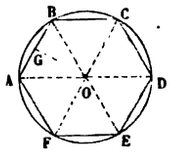
Un *secteur polygonal régulier* est la portion de plan comprise entre une ligne brisée régulière ACDB et les rayons OA, OB, menés du centre O de cette ligne (**268**) à ses extrémités. En divisant en un nombre quelconque de parties égales l'arc

AB du secteur circulaire OAB et joignant les points de division, on obtient un secteur polygonal régulier OACDB inscrit dans le secteur circulaire.

THÉORÈME.

444. *L'aire d'un polygone régulier a pour mesure le produit de son périmètre par la moitié de l'apothème* (*fig.* 261).

Fig. 261.



En effet, en joignant le centre O du polygone régulier ABCDEF à tous ses sommets, on décompose ce polygone en triangles OAB, OBC,..., OFA, qui ont respectivement pour bases les côtés AB, BC,..., FA, et pour hauteur commune l'apothème OG. La somme des aires de ces triangles, c'est-à-dire l'aire du polygone, a donc pour mesure le produit de la somme des côtés AB, BC,..., FA, par la moitié de l'apothème OG, c'est-à-dire le produit du périmètre par la moitié de l'apothème.

En désignant par S, p, a, l'aire, le périmètre et l'apothème du polygone proposé, on a donc la formule

$$S = \frac{1}{2} pa.$$

COROLLAIRE.

445. *Le rapport des aires de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés est égal au rapport des carrés de leurs apothèmes ou de leurs rayons.*

En effet, soient p, a, r, le périmètre, l'apothème et le rayon du premier polygone, et p', a', r', le périmètre, l'apothème et le rayon du second. En vertu du théorème précédent, le rapport des aires est égal à

$$\frac{\frac{1}{2}pa}{\frac{1}{2}p'a'} \quad \text{ou à} \quad \frac{p}{p'} \cdot \frac{a}{a'}.$$

D'ailleurs, on a (269)

$$\frac{p}{p'} = \frac{a}{a'} = \frac{r}{r'}.$$

Le rapport des aires est donc égal à

$$\frac{a^2}{a'^2} \quad \text{ou à} \quad \frac{r^2}{r'^2}.$$

Cette proposition résulte encore de ce que deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables (269), et de ce que les aires de deux polygones semblables sont entre elles comme les carrés de leurs droites homologues (435, 211).

SCOLIE.

446. Par un raisonnement analogue à celui du n° 444, on prouverait que *l'aire d'un secteur polygonal régulier* OACDB (*fig.* 260) *a pour mesure le produit du périmètre de la ligne brisée régulière* ACDB *par la moitié de l'apothème* OI.

447. Soit OAB un secteur circulaire (*fig.* 260). En partageant l'arc AB en un nombre quelconque n de parties égales et menant des tangentes par les milieux des divisions ainsi obtenues, on forme deux secteurs polygonaux réguliers OACDB, OA'C'D'B', semblables, l'un inscrit et l'autre circonscrit au secteur circulaire OAB. Si l'on désigne par a et p l'apothème et le périmètre de la ligne brisée régulière ACDB, et par a' et p' l'apothème et le périmètre de la ligne brisée régulière A'C'D'B', le rapport des aires des deux secteurs polygonaux sera $\frac{p}{p'} \cdot \frac{a}{a'}$. D'ailleurs, il résulte du n° 201 que, lorsqu'on fait croître n indéfiniment suivant une loi quelconque, les rapports $\frac{p}{p'}$, $\frac{a}{a'}$, ont pour limite l'unité. Donc, il en est de même du rapport $\frac{pa}{p'a'}$, et par suite, *à fortiori*, du rapport du secteur circulaire à chacun des deux secteurs polygonaux qui le comprennent. Donc :

L'aire d'un secteur circulaire est la limite commune des aires des secteurs polygonaux réguliers semblables inscrit et circonscrit, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée inscrite.

Et, de même, *l'aire d'un cercle est la limite commune des aires des polygones réguliers semblables inscrit et circonscrit, dont on fait croître indéfiniment le nombre des côtés.*

Il importe de remarquer que ces deux énoncés sont de véritables *théorèmes*, tandis que les énoncés analogues (291) sur la longueur de l'arc et de la circonférence ne sont que des *définitions*.

THÉORÈME.

448. ***L'aire d'un cercle a pour mesure le produit de sa circonférence par la moitié du rayon.***

L'aire du cercle est la limite des aires des polygones réguliers inscrits dont le nombre des côtés croît indéfiniment. D'après cela, soient S, C, R, l'aire, la circonférence, le rayon du cercle considéré, et s, p, a, l'aire, le périmètre et l'apothème d'un polygone régulier inscrit dans ce cercle. On a (444)

$$s = p \cdot \frac{1}{2} a.$$

Lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés du polygone régulier inscrit, s tend vers S, p vers C et a vers R. On a donc, à la limite,

$$S = C \cdot \frac{1}{2} R. \tag{1}$$

Corollaires.

449. En remplaçant dans la relation précédente la circonférence C par sa valeur

$$C = 2\pi R, \tag{2}$$

on obtient la nouvelle formule

$$S = \pi R^2, \tag{3}$$

qui montre :

1° Que, *pour calculer l'aire d'un cercle de rayon donné, il faut multiplier par π le carré du rayon;*

2° Que, *pour calculer le rayon d'un cercle d'aire donnée, il faut multiplier par $\frac{1}{\pi}$ ou diviser par π le nombre qui exprime cette aire, et extraire la racine carrée du résultat.*

450. Si, au lieu d'éliminer C entre les relations (1) et (2), on élimine R, on trouve la formule

$$S = \frac{C^2}{4} \cdot \frac{1}{\pi}, \tag{4}$$

qui permet de calculer directement la surface, connaissant la circonférence, ou la circonférence, connaissant la surface. Cette formule est beaucoup moins usuelle que les précédentes.

451. EXEMPLES.

1° *Quelle est la surface d'un bassin circulaire dont le rayon est* $2^m,25$?

On a

$$S = \pi(2,5)^2 = \pi.6,25$$

et, en prenant pour π la valeur 3,142 approchée à moins d'un millième, on trouve $S = 16^{mq},63$ à moins d'un décimètre carré.

2° *Quel est le rayon du cercle dont la surface est de* 20 *mètres carrés?*

La formule

$$\pi R^2 = 20$$

donne

$$R = \sqrt{20 \cdot \frac{1}{\pi}} = \sqrt{20.0,31831} = 2^m,52,$$

à moins d'un centimètre.

3° *Quelle est la surface d'un cercle dont la circonférence est égale à* 10 *mètres?*

On a

$$S = \frac{10^2}{4} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{1}{4} \cdot 31,83 = 7^{mq},96,$$

à moins d'un décimètre carré.

452. *Le rapport des aires de deux cercles est égal au rapport des carrés de leurs rayons.*

Car, en désignant par S et R l'aire et le rayon du premier

cercle, et par S′ et R′ l'aire et le rayon du second, on a

$$S = \pi R^2, \quad S' = \pi R'^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

THÉORÈME.

453. *L'aire d'un secteur circulaire a pour mesure le produit de son arc par la moitié du rayon.*

L'aire du secteur circulaire est la limite des aires des secteurs polygonaux réguliers inscrits (447) dont on fait croître indéfiniment le nombre des côtés. D'après cela, soient S l'aire du secteur considéré, l la longueur de l'arc qui le termine, et R le rayon de cet arc; soient de même s l'aire d'un secteur polygonal régulier inscrit, p le périmètre de la ligne brisée régulière qui le termine, et a l'apothème de cette ligne brisée. On a (446)

$$s = p \cdot \frac{1}{2} a.$$

Mais, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée régulière inscrite, s tend vers S, p vers l, et a vers R. On a donc, à la limite,

$$S = l \cdot \frac{1}{2} R. \tag{5}$$

COROLLAIRES.

454. En comparant les formules (1) et (5), on voit que *le secteur est au cercle entier comme son arc est à la circonférence.*

Si n est le nombre de degrés de l'arc, le rapport de cet arc à la circonférence sera $\frac{n}{360}$, et par suite l'aire S du secteur s'obtiendra en multipliant par ce rapport l'aire πR^2 du cercle, de sorte qu'on aura

$$S = \pi R^2 \frac{n}{360}.$$

Cette formule permet de calculer l'une quelconque des quantités S, R, n, lorsqu'on connaît les deux autres.

455. Exemples.

1° *Quelle est l'aire du secteur de* 60 *degrés dans le cercle dont le rayon est de* 10 *mètres?*

L'arc de 60 degrés étant le sixième de la circonférence, le secteur correspondant est le sixième du cercle, c'est-à-dire

$$\frac{100\pi}{6} = 52^{mq},3599,$$

à moins d'un centimètre carré.

2° *L'aire d'un secteur est égale à l'aire du carré construit sur le rayon. Quel est le nombre de degrés de l'arc qui le termine?*

La formule

$$\pi R^2 \frac{n}{360} = R^2$$

donne

$$n = \frac{360^\circ}{\pi} = 114^\circ 35' 29'',6.$$

3° *Quel est le rayon du cercle dans lequel le secteur de* 45 *degrés renferme* $0^{mq},1250$?

La formule

$$\pi R^2 \frac{45}{360} = 0,1250 \quad \text{ou} \quad \pi R^2 = 0,1250.8 = 1$$

donne

$$R = \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0^m,564.$$

456. *Le rapport des aires de deux secteurs semblables,* c'est-à-dire terminés par des arcs semblables, *est égal au rapport des carrés de leurs rayons.*

En effet, S, l, R, étant l'aire, la longueur de l'arc et le rayon du premier secteur, et, S', l', R', l'aire, la longueur de l'arc et le rayon du second secteur, on a

$$S = l \cdot \frac{1}{2} R, \quad S' = l' \cdot \frac{1}{2} R', \quad \text{d'où} \quad \frac{S}{S'} = \frac{l}{l'} \cdot \frac{R}{R'};$$

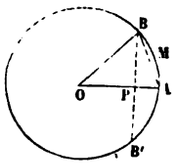
or, les deux arcs l et l' étant semblables, leur rapport est égal à celui de leurs rayons (296) : on a donc

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

THÉORÈME.

457. *L'aire d'un segment circulaire a pour mesure le produit de la moitié du rayon par l'excès de son arc sur la moitié de la corde de l'arc double* (*fig.* 262)

Fig. 262.



En effet, le segment AMB, c'est-à-dire la portion du cercle comprise entre l'arc AMB et sa corde AB, est égal à l'excès de l'aire du secteur OAMB sur l'aire du triangle OAB. Or, l'aire du secteur a pour mesure $\text{arc AB} \cdot \frac{1}{2}\,\text{OA}$; l'aire du triangle a pour mesure $\text{BP} \cdot \frac{1}{2}\,\text{OA}$, BP étant la perpendiculaire abaissée du point B sur le rayon OA, c'est-à-dire la moitié de la corde BB′ de l'arc BAB′ qui (102) est le double de l'arc AB. On a donc, en désignant par S l'aire du segment,

$$S = \text{arc AB} \cdot \frac{1}{2}\,\text{OA} - \frac{1}{2}\,\text{BB}' \cdot \frac{1}{2}\,\text{OA},$$

ou

$$S = \frac{\text{OA}}{2}\left(\text{arc AB} - \frac{1}{2}\,\text{BB}'\right).$$

Lorsque la corde BB′ est le côté de l'un des polygones réguliers que l'on sait inscrire (Liv. III, § VII), on peut calculer directement cette corde, par suite l'aire du segment; sinon, il faut recourir aux *Tables trigonométriques*.

458. Exemple :

Quelle est l'aire du segment de 60 *degrés dans le cercle dont le rayon est* 2 *mètres?*

L'arc AB est ici le sixième de la circonférence; il est donc égal à

$$\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

La corde BB′ est le côté du triangle équilatéral inscrit, égal à $2\sqrt{3}$; on a donc

$$S = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = 0^{mq},362344,$$

à moins d'un millimètre carré.

Corollaire.

459. *Le rapport des aires de deux segments semblables,* c'est-à-dire terminés par des arcs semblables, *est égal au rapport des carrés de leurs rayons.*

En effet, soient S et T les aires du secteur et du triangle dont le premier segment est la différence, et S′ et T′ les aires du secteur et du triangle dont le second segment est la différence; les secteurs S et S′ sont semblables, ainsi que les triangles T et T′; donc, si l'on désigne par R et R′ les deux rayons, on aura

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}, \quad \frac{T}{T'} = \frac{R^2}{R'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{S}{S'} = \frac{T}{T'} = \frac{R^2}{R'^2};$$

et, par suite, en vertu d'une proposition connue sur les rapports égaux,

$$\frac{S-T}{S-T'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

§ IV. — PROBLÈMES SUR LES AIRES.

PROBLÈME.

460. *Construire un triangle équivalent à un polygone donné* (*fig.* 263, 264).

Soit, par exemple, le pentagone convexe ABCDE (*fig.* 263).

En menant la diagonale EC, on détache de ce pentagone le triangle ECD. Si par le sommet D on mène alors une parallèle DF à la diagonale EC, tous les triangles qui auront EC

Fig. 263.

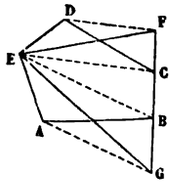
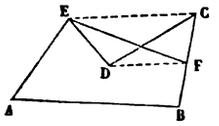


Fig. 264.



pour base et leurs sommets sur DF seront équivalents au triangle ECD (426), et formeront avec le quadrilatère ECBA un polygone équivalent au pentagone proposé. Or, pour que le nouveau polygone ABCFE ait un sommet de moins, il suffit de choisir parmi tous ces triangles celui dont le sommet est en F, à la rencontre de la parallèle DF et du côté BC prolongé.

La construction indiquée permettant de *transformer un polygone quelconque en un polygone équivalent, mais ayant un côté de moins,* on arrivera toujours, en la répétant, à un triangle équivalent au polygone proposé.

Dans la *fig.* 263, en menant par le sommet A, jusqu'à la rencontre de FB prolongé, la parallèle AG à la diagonale EB, on passe du quadrilatère EABF au triangle équivalent FEG. Ce triangle est donc équivalent au pentagone primitif.

461. Lorsque le polygone considéré n'est pas convexe (*fig.* 264), la construction reste la même. Le pentagone concave ABCDE, augmenté du triangle EDC, équivaut au quadrilatère ABCE; et ce quadrilatère, diminué du triangle EFC, qui est équivalent au triangle EDC, donne le quadrilatère ABFE équivalent au pentagone proposé.

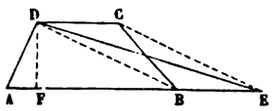
Scolie.

462. Le problème précédent fournit un nouveau moyen pour évaluer l'aire d'un polygone; on peut, en effet, transformer le polygone considéré en un triangle équivalent, puis calculer l'aire de ce triangle.

Appliquons ce procédé à la recherche de l'aire du trapèze.

Soit (*fig.* 265) un trapèze quelconque ABCD. Menons la diagonale DB et la parallèle CE à cette diagonale jusqu'à la rencontre de la base AB prolongée.

Fig. 265.



Le triangle ADE sera équivalent au trapèze ABCD. Il a d'ailleurs même hauteur DF, et sa base AE est la somme des deux bases du trapèze. On retombe ainsi sur la mesure connue (431).

PROBLÈME.

463. *Construire un carré équivalent à un polygone donné.*

Supposons d'abord qu'on veuille construire un carré équivalent à un triangle donné. Soient X le côté de ce carré, B et H la base et la hauteur du triangle proposé. On devra avoir (421, 425)

$$X^2 = \frac{B.H}{2} = \frac{B}{2}.H.$$

Le côté du carré cherché sera donc une moyenne proportionnelle à la moitié de la base du triangle et à sa hauteur.

S'il s'agit d'un parallélogramme, d'un trapèze, d'un polygone régulier et, en général, d'un polygone dont l'aire soit exprimée par le produit de deux lignes, il suffira de chercher la moyenne proportionnelle à ces deux lignes. On obtiendra ainsi le côté du carré équivalent.

Dans tout autre cas, on transformera le polygone donné en un triangle équivalent (460), et on cherchera le carré équivalent à ce triangle, comme on vient de le dire.

PROBLÈME.

464. *Trouver deux droites proportionnelles à deux polygones donnés.*

On pourra toujours remplacer les polygones considérés par

les carrés équivalents (463). Soient a et a' les côtés de ces carrés, x et y les droites cherchées. On devra avoir

$$\frac{x}{y}=\frac{a^2}{a'^2}.$$

On peut choisir arbitrairement l'une des deux droites cherchées, y par exemple, et poser $y=a'$. Il vient alors

$$\frac{x}{a'}=\frac{a^2}{a'^2} \quad \text{ou} \quad x=\frac{a^2}{a'}.$$

x sera donc, dans cette hypothèse, une troisième proportionnelle (247) aux côtés a' et a; et le rapport de cette troisième proportionnelle à a' sera le même que celui des polygones donnés.

PROBLÈME.

465. *Construire un polygone équivalent à un polygone* P *et semblable à un polygone* Q.

Il s'agit ici de transformer un polygone donné P en un autre polygone X équivalent au polygone P, mais semblable à un second polygone donné Q.

Soient q un côté quelconque du polygone Q, et x le côté homologue du polygone X. On devra avoir (435)

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{X}}=\frac{q^2}{x^2},$$

ou, puisque le polygone X doit être équivalent au polygone P,

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}=\frac{q^2}{x^2}.$$

Remplaçons les polygones Q et P par les carrés équivalents a^2 et b^2 (463). Il viendra

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{q^2}{x^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{a}{b}=\frac{q}{x}.$$

Le côté x est donc une quatrième proportionnelle aux trois droites a, b, q (246), et il restera à construire sur ce côté, homologue du côté q, un polygone semblable au polygone Q (253).

PROBLÈME.

466. ***Deux figures semblables étant données, construire une figure semblable égale à leur somme ou à leur différence.***

S'il s'agit de deux carrés dont les côtés soient a et b ($a > b$), le côté x du carré égal à leur somme sera l'hypoténuse du triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit a et b; le côté y du carré égal à leur différence sera le second côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant a pour hypoténuse et b pour premier côté de l'angle droit (438).

S'il s'agit de deux polygones semblables A et B (A > B), dont deux côtés homologues quelconques soient a et b, le côté homologue x du polygone semblable $X = A + B$ sera l'hypoténuse du triangle rectangle construit sur a et b comme côtés de l'angle droit; le côté homologue y du polygone semblable $Y = A - B$ sera le second côté de l'angle droit du triangle rectangle ayant a pour hypoténuse et b pour premier côté de l'angle droit (440).

Dans le cas de deux cercles ayant R et R′ pour rayons, il suffit de remplacer dans l'alinéa précédent a et b par R et R′, pour trouver les rayons x et y des cercles égaux respectivement à la somme ou à la différence des deux cercles donnés.

SCOLIE.

467. Soit à construire une droite x liée à plusieurs longueurs données a, b, c, d, e, par une expression de la forme

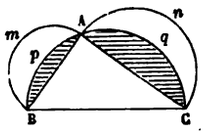
$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 + d^2 - e^2}.$$

On cherchera d'abord $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$ à l'aide d'un triangle rectangle ayant a et b pour côtés de l'angle droit: α sera l'hypoténuse de ce triangle; puis $\beta = \sqrt{\alpha^2 - c^2}$, à l'aide d'un triangle rectangle ayant α pour hypoténuse et c pour côté de l'angle droit; β sera le second côté de ce triangle. De même, on cherchera $\gamma = \sqrt{\beta^2 + d^2}$ et $x = \sqrt{\gamma^2 - e^2}$, par deux autres triangles rectangles ayant, le premier β et d pour côtés de l'angle droit, le second γ et e pour hypoténuse et côté de l'angle droit : x sera le second côté de ce dernier triangle.

SCOLIE.

468. Il résulte du dernier alinéa du n° 466 que si, sur les trois côtés d'un triangle rectangle ABC (*fig.* 266) comme diamètres, on décrit des demi-cercles, le demi-cercle décrit sur

Fig. 266.

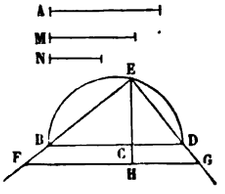


l'hypoténuse sera équivalent à la somme des demi-cercles décrits sur les côtés de l'angle droit. En enlevant de part et d'autre les parties communes ApB, AqC, qui sont ombrées sur la figure, on voit que la somme des deux *lunules* AmBpA, AnCqA, est équivalente à l'aire du triangle rectangle ABC. Cette proposition est attribuée à Hippocrate.

PROBLÈME.

469. *Construire un polygone semblable à un polygone donné, et dont l'aire soit à celle de ce polygone dans le rapport de deux droites données* M *et* N (*fig.* 267).

Fig. 267.



Supposons d'abord que le polygone donné soit un carré, et soit A son côté. Si X est le côté du carré cherché, on devra avoir (435)

$$\frac{X^2}{A^2} = \frac{M}{N}.$$

La question est donc de construire un triangle rectangle tel,

que le rapport des segments déterminés sur l'hypoténuse par la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit soit égal à $\frac{M}{N}$ (439), et que le côté adjacent au segment qui correspond à N soit égal à A.

Or, en portant sur une droite indéfinie BC = M, CD = N, en décrivant une demi-circonférence sur BD comme diamètre, et en menant à BD la perpendiculaire CE jusqu'à la rencontre de cette demi-circonférence, on obtiendra un triangle rectangle BED dans lequel les segments de l'hypoténuse présenteront le rapport demandé. Il en sera de même (213) pour tous les triangles rectangles semblables qu'on formera en menant entre les côtés de l'angle droit BED, prolongés ou non, une parallèle à l'hypoténuse BD. Parmi tous ces triangles, celui dont le côté, dirigé suivant ED, est égal à A, répond à la question.

On portera donc sur ED la longueur EG = A; par le point G, on mènera à BD la parallèle GF jusqu'à la rencontre de EB, et FE représentera le côté du carré cherché. On a, en effet,

$$\frac{\overline{EF}^2}{\overline{EG}^2} = \frac{FH}{HG} = \frac{BC}{CD} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{EF}^2}{A^2} = \frac{M}{N}.$$

470. Soit maintenant un polygone quelconque P, soient p l'un de ses côtés et x le côté homologue du polygone cherché X. On devra avoir, d'après l'énoncé,

$$\frac{X}{P} = \frac{M}{N} \quad \text{et} \quad \frac{X}{P} = \frac{x^2}{p^2},$$

d'où

$$\frac{x^2}{p^2} = \frac{M}{N}.$$

Le problème se trouve donc ramené à trouver le côté d'un carré qui soit à un carré donné dans le rapport de deux droites données, question que nous venons de résoudre. Quand on aura obtenu le côté x homologue de p, il restera à construire sur ce côté un polygone semblable au polygone P.

471. Dans le cas de deux cercles, en désignant par x et r leurs rayons, on devra avoir

$$\frac{\pi x^2}{\pi r^2} = \frac{M}{N} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{r^2} = \frac{M}{N}.$$

C'est encore le même problème.

SCOLIE.

472. Si le rapport $\frac{M}{N}$ était donné numériquement et égal, par exemple, à $\frac{5}{7}$, on choisirait une certaine longueur pour unité, et l'on rentrerait dans le cas précédent en prenant les droites BC et CD égales à cinq fois et à sept fois cette longueur.

473. On peut aussi, dans ce cas, opérer de la manière suivante. Soit $\frac{M}{N} = \frac{5}{7}$. Sur KH, côté du carré donné, comme diamètre (*fig.* 268), décrivez une demi-circonférence. Divisez KH au point I dans le rapport de

Fig. 268

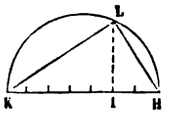
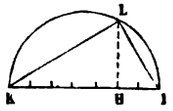


Fig. 269.



5 à $2 = 7 - 5$, et menez à KH la perpendiculaire IL. La droite KL sera le côté du carré cherché (439).

Si le rapport $\frac{M}{N}$ est plus grand que 1 et égal à $\frac{7}{5}$, par exemple, divisez le côté donné KH (*fig.* 269), au point I, dans le rapport de 7 à $2 = 7 - 5$. Décrivez sur KI comme diamètre une demi-circonférence, et menez au point H à KI la perpendiculaire HL. La droite KL sera le côté du carré cherché (223).

APPENDICE AU LIVRE IV.

I. — Valeur approchée de l'aire d'une figure plane terminée par une courbe quelconque.

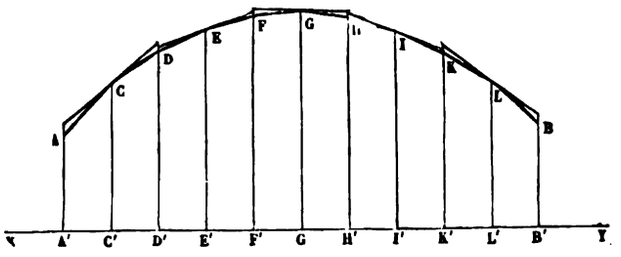
FORMULE DE SIMPSON.

474. Soit à évaluer approximativement l'aire comprise entre un arc de courbe quelconque AB, une droite fixe XY et les perpendiculaires AA′, BB′ abaissées sur cette droite par les extrémités de l'arc AB.

Nous supposerons d'ailleurs que l'arc AB soit, dans toute son étendue, concave vers la droite XY, sans quoi on le décomposerait en plusieurs parties, et l'on évaluerait séparément l'aire correspondante à chaque partie.

Divisons la base A′B′ en un nombre pair de parties égales, en dix par exemple, et par les points de division C′, D′, E′, F′, G′, H′, I′, K′, L′, éle-

Fig. 270.



vons des perpendiculaires à XY. Désignons respectivement par $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{11}$, les perpendiculaires ou ordonnées AA′, CC′, DD′, ..., BB′, et par h la distance constante de deux ordonnées consécutives.

Soit m la somme des aires des trapèzes inscrits compris entre les ordonnées successives. A l'extrémité de chaque ordonnée de rang pair, menons la tangente en la limitant aux deux ordonnées qui comprennent celle que l'on considère; nous formerons ainsi une suite de trapèzes circonscrits compris entre les ordonnées successives de rang impair; représentons par M la somme de ces trapèzes circonscrits.

L'aire cherchée est évidemment comprise entre m et M, et si l'on prend pour valeur approchée de cette aire une quantité S comprise entre m et M, l'erreur correspondante sera moindre que la plus grande des différences $M - S$, $S - m$.

La méthode de Simpson consiste à prendre $S = m + \frac{1}{3}(M - m)$; l'erreur est donc alors moindre que $\frac{2}{3}(M - m)$

Or, si l'on désigne par P la somme des ordonnées de rang pair et par I la somme des ordonnées de rang impair autres que les extrêmes, augmentée de la demi-somme de ces ordonnées extrêmes, on a

$$M = 2hy_2 + 2hy_4 + \ldots + 2hy_{10} = 2hP,$$

$$m = h\frac{y_1+y_2}{2} + h\frac{y_2+y_3}{2} + \ldots + h\frac{y_{10}+y_{11}}{2} = h(P+I),$$

et, par suite,

$$M - m = h(P-I).$$

Il en résulte, pour la valeur approchée de l'aire, $S = h\left(P + I + \frac{P-I}{3}\right)$.

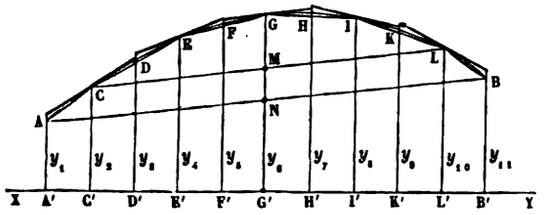
avec une erreur moindre que $2h.\frac{P-I}{3}$.

Cette démonstration fort simple nous a été communiquée par M. Mantion.

FORMULE DE PONCELET.

La base A'B' doit ici encore être partagée en un nombre *pair* de parties égales, dix par exemple (*fig.* 271). Nous désignerons les onze ordonnées correspondantes par $y_1, y_2, y_3, \ldots y_{10}, y_{11}$. Par les extrémités de

Fig. 271.



toutes les ordonnées *de rang pair* $y_2, y_4, \ldots, y_{10}$, menons des tangentes à la courbe AB, et terminons ces tangentes aux deux ordonnées voisines. Nous formerons ainsi une série de trapèzes dont la somme, évidemment supérieure à l'aire cherchée dans le cas de la figure, sera une limite supérieure du résultat demandé.

En appelant h l'intervalle constant entre deux ordonnées consécutives, on a

$$\text{trapèze AD'} = 2h.y_2,$$
$$\text{trapèze DF'} = 2h.y_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\text{trapèze KB'} = 2h.y_{10}.$$

En désignant par S la somme de ces trapèzes, il vient

$$S = 2h(y_2 + y_4 + \ldots + y_{10}) :$$

la parenthèse renferme toutes les ordonnées de rang pair. En désignant leur somme par P, on aura donc

$$S = 2h.P.$$

Menons les cordes AC et BL, qui correspondent aux divisions extrêmes; puis, dans l'intervalle, les cordes CE, EG, GI, IL, qui correspondent chacune à deux divisions. Nous formerons une nouvelle série de trapèzes dont la somme sera une limite inférieure du résultat demandé. On a

$$\text{trapèze AC}' = h\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right),$$

$$\text{trapèze CE}' = 2h\left(\frac{y_2+y_4}{2}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\text{trapèze IL}' = 2h\left(\frac{y_8+y_{10}}{2}\right),$$

$$\text{trapèze LB}' = h\left(\frac{y_{10}+y_{11}}{2}\right).$$

En désignant par s la somme de ces trapèzes, il vient

$$s = h\left[\frac{y_1+y_{11}}{2} + \frac{3}{2}(y_2+y_{10}) + 2(y_4+y_6+y_8)\right],$$

ou bien, en ajoutant et en retranchant dans la parenthèse $\frac{y_2+y_{10}}{2}$,

$$s = h\left(\frac{y_1+y_{11}}{2} - \frac{y_2+y_{10}}{2} + 2P\right).$$

A étant l'aire cherchée, on a

$$s < A < S.$$

Mais la moyenne $\frac{S+s}{2}$ tombe aussi entre s et S. On peut donc, sauf une erreur que nous estimerons, prendre

$$A = \frac{S+s}{2} = h\left(2P + \frac{E-E'}{4}\right):$$

dans cette formule, P désigne, comme nous l'avons dit, la somme de toutes les ordonnées de rang pair, E est la somme des deux ordonnées extrêmes, E' est la somme des deux ordonnées voisines des deux extrêmes.

L'avantage de cette formule, quand le nombre des divisions est grand, c'est qu'il n'y entre que les ordonnées de rang pair et les deux ordonnées

extrêmes, ce qui dispense de calculer les ordonnées intermédiaires de rang impair.

Il reste à indiquer une limite supérieure de l'erreur commise en employant la formule. Comme A tombe entre S et $\frac{S+s}{2}$ ou entre $\frac{S+s}{2}$ et s, l'erreur que l'on fait en substituant $\frac{S+s}{2}$ à A est moindre que $S - \frac{S+s}{2}$ ou que $\frac{S+s}{2} - s$, c'est-à-dire que

$$\frac{S-s}{2} = h\left(\frac{E-E'}{4}\right) = \frac{h}{2}\left(\frac{E}{2} - \frac{E'}{2}\right).$$

Menons sur la figure les droites AB et CL; ces deux droites coupent l'ordonnée du milieu GG′ en deux points M et N, et l'on a

$$\frac{y_2+y_{10}}{2} = MG', \quad \frac{y_1+y_{11}}{2} = NG',$$

c'est-à-dire

$$\frac{E}{2} - \frac{E'}{2} = MN.$$

La limite supérieure de l'erreur commise s'exprime donc géométriquement par le produit

$$\frac{h}{2} \cdot MN.$$

On peut donc, après avoir tracé la courbe, mener provisoirement les deux premières et les deux dernières ordonnées, ainsi que celle du milieu, en donnant à h une certaine valeur; puis, avant tout calcul, vérifier, en mesurant MN, si l'approximation demandée est bien obtenue, c'est-à-dire si la valeur choisie pour h est convenable.

Remarque. — Si l'arc AB était convexe vers la droite XY dans toute son étendue, une marche analogue conduirait à la même formule. Si cet arc était en partie concave et en partie convexe, en menant une perpendiculaire à XY par le point d'inflexion, on mesurerait, d'après les règles précédentes, les aires situées de part et d'autre de cette perpendiculaire et l'on en ferait la somme.

Application. — Pour le quart de cercle de rayon 1, on trouve, en divisant le rayon en dix parties égales :

$y_1 = 1,$	$y_3 = 0,980,$	$y_2 = 0,995,$
$y_{11} = 0,$	$y_5 = 0,917,$	$y_4 = 0,954,$
	$y_7 = 0,800,$	$y_6 = 0,866,$
	$y_9 = 0,600,$	$y_8 = 0,714,$
		$y_{10} = 0,436.$

La vraie valeur est $\frac{\pi}{4} = 0^{mq},7854$. La formule de Simpson donne $0^{mq},7818$, celle de Poncelet donne $0^{mq},7822$.

II. — Sur la différence entre la longueur d'un arc de cercle et celle de sa corde.

LEMME.

475. *L'aire d'un triangle isocèle* PNQ, *inscrit dans un segment circulaire moindre qu'un demi-cercle, est plus petite que le cube de l'arc* α *qui limite ce segment, divisé par* 16 *fois le rayon* R (*fig.* 272).

Car cette aire, ayant pour expression (428, 1°)

$$\frac{PQ.PN.QN}{4R},$$

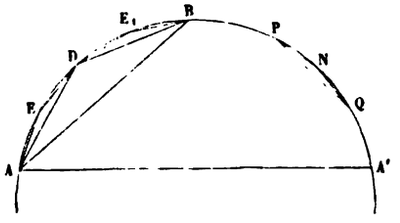
est moindre que

$$\frac{\alpha \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2}}{4R} = \frac{\alpha^3}{16R}.$$

THÉORÈME.

476. *La différence entre un arc de cercle* ABA' *moindre qu'une demi-circonférence et sa corde* AA' *est plus petite que le cube de l'arc divisé par* 24 *fois le carré du rayon* (*fig.* 272).

Fig. 272.



Désignons par a l'arc ABA', par c sa corde AA' et en général par c_x la corde de l'arc $\frac{a}{2^x}$.

B étant le milieu de l'arc ABA', l'aire du segment ADB a pour mesure (457)

$$\frac{R}{2}\left(\frac{a}{2} - \frac{c}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{R}{4}(a - c).$$

D'autre part, si l'on prend le milieu D de l'arc AB, puis les milieux E et E_1 des arcs AD et DB, et ainsi de suite, et si l'on désigne respectivement par t_1, t_2,..., les aires des triangles ADB, AED,..., l'aire du segment sera la limite de la somme

$$t_1 + 2t_2 + 2^2 t_3 + \ldots + 2^{n-1} t_n + \ldots.$$

Donc, comme, d'après le lemme précédent (475), on a

$$t_n < \frac{1}{16R}\left(\frac{a}{2^n}\right)^3,$$

on aura aussi

$$\frac{R}{4}(a-c) < \frac{1}{16R}\left[\frac{a^3}{2^3} + \frac{a^3}{2^4} + \frac{a^3}{2^7} + \ldots\right]$$

ou

$$a - c < \frac{a^3}{32R^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right),$$

c'est-à-dire

$$a - c < \frac{a^3}{32R^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}},$$

ou enfin

$$a - c < \frac{a^3}{24R^2}. \qquad (1)$$

Pour présenter une application de cette formule, cherchons, par exemple, *quel doit être le rayon* R *d'un cercle pour que la différence entre un arc de* 60 *mètres et sa corde n'atteigne pas* 1 *millimètre.*

Il suffit, d'après la formule (1), que R satisfasse à l'inégalité

$$\frac{60^3}{24R^2} \leq \frac{1}{1000},$$

d'où

$$R \geqq \sqrt{\frac{10^3 . 60^3}{24}} \quad \text{ou} \quad R \geqq 3000$$

Le rayon du cercle devra donc être au moins égal à 3 kilomètres.

Remarque. — La formule (1) répond à la formule trigonométrique connue

$$x - \sin x < \frac{x^3}{6}. \qquad (2)$$

En effet, si l'on suppose $R = 1$ et $a = 2x$, on a

$$c = 2\sin x,$$

puisque, *dans le cercle de rayon* 1, *le sinus d'un arc est la moitié de la corde de l'arc double;* et, si l'on substitue ces valeurs dans la relation (1), on obtient la relation (2).

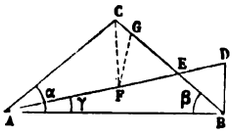
III. — Sur les maximums et les minimums des figures planes.

477. On attribue à l'École de Pythagore les premières recherches, par voie synthétique, sur les maximums et les minimums des figures. En 1782, Lhuilier (*De relatione mutuâ capacitatis et terminorum figurarum*) a résumé toutes les découvertes faites sur ce sujet depuis les Grecs jusqu'à R. Simpson; il a corrigé avec une admirable sagacité les erreurs de ses devanciers et accru considérablement par ses propres découvertes le domaine de cette théorie. Enfin, en 1842, Steiner, dans deux Mémoires (*Journal de Crelle,* t. XXIV), véritables chefs-d'œuvre de Géométrie synthétique, a fait connaître, pour la recherche des maximums des figures planes, cinq méthodes, dont les deux premières s'appliquent à la sphère. Nous exposerons ici la première de ces méthodes, qui surpasse d'ailleurs les autres en élégance et en généralité.

THÉORÈME.

478. *Entre tous les triangles isopérimètres et de même base* AB, *le triangle isocèle* ACB *est un maximum* (*fig.* 273).

Fig. 273.



En effet, soit ADB un triangle non isocèle construit sur la base AB, au-dessus d'elle et tel que AD + DB = AC + CB. Les triangles ACB, ADB, ayant une partie commune AEB, il s'agit de prouver que le triangle BED est moindre que le triangle AEC. Or si l'on prend sur EA et sur EC, EF = EB et EG = ED, les triangles FEG, BED, seront égaux, et il suffira de faire voir que le triangle FEG est compris dans AEC, c'est-à-dire que le point F tombe entre E et A, et le point G entre E et C.

D'abord F tombe entre E et A; car l'angle β, égal à α, est supérieur à γ; donc EA est plus grand que EB ou EF.

En second lieu, G tombe entre E et C; il suffit pour le prouver d'établir l'inégalité

$$FG + GE < FC + CE$$

ou, en ajoutant AF + FE de part et d'autre,

$$AF + FG + GE + FE < AF + FC + CE + EF;$$

mais on a

$$EG = ED, \quad FG = BD, \quad EF = EB;$$

l'inégalité précédente ne diffère donc pas de

$$AD + DB \quad \text{ou} \quad AC + CB < AF + FC + CB,$$

c'est-à-dire de l'inégalité

$$AC < AF + FC,$$

qui est évidente.

479. Réciproquement, *entre tous les triangles de même base et de même aire, le triangle isocèle* G *a le périmètre minimum.*

En effet, soit U un triangle non isocèle ayant la même base et la même aire que G, et G_1 un triangle isocèle ayant la même base et le même périmètre que U; d'après le théorème précédent, G_1 sera plus grand que U, c'est-à-dire que G; or, de deux triangles isocèles construits sur la même base, celui qui a l'aire la plus grande a le périmètre le plus grand; donc le périmètre de G_1, c'est-à-dire le périmètre de U, est plus grand que celui de G.

Nous supprimerons dans ce qui suit les démonstrations des réciproques; ces démonstrations seraient toutes analogues à la précédente.

COROLLAIRE.

480. *Entre tous les triangles de même périmètre, le triangle équilatéral est un maximum;* car le triangle maximum correspondant au périmètre donné doit être isocèle, quel que soit celui de ses côtés que l'on prenne pour base.

Réciproquement, *entre tous les triangles équivalents, le triangle équilatéral a le plus petit périmètre.*

THÉORÈME.

481. *Entre tous les triangles construits avec deux côtés, celui dans lequel ces deux côtés sont à angle droit est un maximum.*

En effet, si l'on prend l'un des côtés donnés pour base, la hauteur est moindre que l'autre côté donné, à moins que ce second côté ne soit perpendiculaire au premier; dans cette position, la hauteur est maximum, et par suite l'aire l'est aussi.

COROLLAIRE.

482. *Entre tous les triangles dont la somme de deux côtés est donnée, celui dans lequel ces deux côtés sont à la fois égaux et à angle droit est un maximum.*

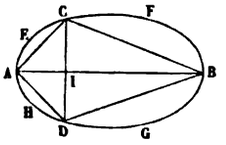
En effet, que l'on répartisse comme on voudra la somme donnée sur les deux côtés, le triangle maximum sera toujours celui dans lequel ces deux côtés seront perpendiculaires entre eux; il ne reste donc plus qu'à comparer les triangles rectangles dont la somme des côtés de l'angle droit est constante. Considérons un de ces triangles rectangles P et sur son hypoténuse construisons un triangle isocèle Q dont les côtés égaux aient la même somme que les côtés de l'angle droit de P; enfin, désignons par R le triangle isocèle dont les côtés égaux auraient la même longueur que ceux de Q et seraient de plus à angle droit; on aura, par ce qui précède, $P < Q$ et $Q < R$; il en résulte donc $R > P$.

THÉORÈME.

483. *Entre toutes les figures planes isopérimètres, le cercle est un maximum* (*fig.* 274).

L'aire d'une figure de périmètre donné peut évidemment devenir aussi petite qu'on veut; mais elle ne peut grandir indéfiniment, puisque cette figure reste forcément comprise dans l'intérieur du cercle décrit d'un point de son contour comme centre avec un rayon égal à la moitié du périmètre donné. Entre toutes les figures planes isopérimètres, il y a donc une figure maximum, ou plusieurs figures maximums de différentes formes et de même aire.

Fig. 274.



D'ailleurs, toute figure maximum de périmètre donné est *convexe*, sans quoi on pourrait agrandir son aire sans changer la longueur de son contour.

Cela posé, soit EFGH une figure maximum ayant le périmètre donné. A tout point A pris à volonté sur son contour répond un autre point B de ce contour, tel que la droite AB divise le périmètre en deux parties égales. Les aires AEFB, AHGB, devront être égales, sans quoi, en remplaçant la plus petite d'entre elles par la figure symétrique par rapport à AB, on obtiendrait une figure totale de même périmètre que la première et d'aire plus grande, de sorte que la première figure ne serait pas un maximum comme on l'a supposé.

Il résulte de là que, si dans une figure maximum EFGH de périmètre donné on remplace la partie au-dessous de AB par une partie symétrique

de celle qui est au-dessus de cette droite, la nouvelle figure totale sera encore une des figures maximums.

Raisonnons actuellement sur cette nouvelle figure; en d'autres termes, admettons que la partie AHGB soit symétrique de AEFB par rapport à AB. Soit C un point quelconque du contour AEFB; prenons son symétrique D par rapport à AB et menons CA, AD, DB, BC. L'angle ACB sera droit; car si les angles ACB, ADB, n'étaient pas droits, on pourrait construire avec les mêmes côtés CA, AD, DB, BC, un quadrilatère $\alpha\gamma\beta\delta$ dans lequel les angles γ et δ seraient droits; ce nouveau quadrilatère serait plus grand que l'ancien (481), et en plaçant respectivement sur les côtés $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, $\delta\beta$, $\alpha\delta$, les segments AEC, CFB, BGD, DHA, qui sont actuellement sur CA, BC, DB, AD, on aurait une figure totale ayant le même périmètre que AECFBGDHA et une aire plus grande, de sorte que cette figure AECFBGDHA ne serait pas un maximum comme on l'a supposé. Donc, de tout point C du contour AECFB, on voit la droite AB sous un angle droit; par suite, ce contour est le demi-cercle décrit sur AB comme diamètre.

Ainsi, si une figure de périmètre donné est maximum, sa moitié ACB, *prise à partir d'un point quelconque* A *de son contour,* est un demi-cercle. La figure totale est donc un cercle.

Donc, enfin, il n'y a qu'une seule figure maximum de périmètre donné, et cette figure est un cercle.

Steiner donne à ce théorème le nom de *théorème principal,* parce que sa démonstration renferme les principes les plus essentiels relatifs à la plupart des questions de maximums dans les figures planes (ou sphériques).

THÉORÈME.

484. 1° *Si le périmètre d'une figure se compose d'une droite de longueur arbitraire l et d'une ligne de forme arbitraire* L, *et si en même temps la longueur de la ligne* L *ou l'aire de la figure est donnée, celle-ci est un maximum ou la ligne* L *est un minimum, quand cette figure est un demi-cercle.*

Toute figure comprise dans ce théorème peut être considérée comme la moitié d'une figure symétrique, dont la droite *l* est l'axe de symétrie, et dont le périmètre, égal à 2L, est donné; mais l'aire de la moitié est nécessairement un maximum, dès que la figure entière en est un. L'énoncé est donc une conséquence du théorème principal. Il s'ensuit en particulier : qu'*entre tous les segments de cercle à arcs égaux ou à aires égales, c'est le demi-cercle qui a l'aire la plus grande ou l'arc le plus petit.*

2° *Entre toutes les figures dont le périmètre est composé d'une droite donnée a et d'une ligne prise à volonté* L, *le segment de cercle a la plus grande aire pour des longueurs égales de la ligne* L, *et la plus petite ligne* L *quand les aires sont égales.*

Supposons la ligne L de forme quelconque, et qu'elle compose avec la droite a le périmètre de la figure aL; on peut toujours construire sur a un segment de cercle dont l'arc α soit égal à L, α et L étant situés du même côté de a. Complétons le cercle, et désignons l'autre arc par β; alors le cercle de périmètre $\alpha + \beta$ est plus grand que la figure limitée par $L + \beta$; ainsi $a\alpha + a\beta > aL + a\beta$; donc $a\alpha > aL$.

On déduit de ce théorème cette règle générale :

Dans toute figure dont l'aire doit être un maximum sous des conditions quelconques, chaque partie du périmetre, qui est libre d'avoir une forme quelconque entre deux points donnés, doit être un arc de cercle.

THÉORÈME.

485. 1° *Un polygone de côtés donnés est maximum lorsqu'il est inscriptible au cercle.*

Observons d'abord qu'on peut toujours, avec des côtés donnés a, b, $c, \ldots, l$, dont le plus grand a est moindre que la somme de tous les autres, former un polygone convexe inscriptible, et un seul. En effet, décrivons un premier cercle O assez grand pour que, en portant les unes à la suite des autres, à partir de l'un des points A de la circonférence, des cordes $AB = a$, $BC = b, \ldots$, $LM = l$, l'extrémité M de la dernière corde n'atteigne pas le point A. Le centre O étant d'abord situé dans le segment BCMA au-dessus de AB, supposons que ce centre s'abaisse d'une manière continue en décrivant la droite OZ perpendiculaire sur le milieu de AB. L'arc BCMA de la circonférence variable qui a pour centre O et qui passe par A et B décroîtra, et comme il a pour limite la droite AB, c'est-à-dire une longueur moindre que $b + c + \ldots + l$, on voit que l'extrémité M de la ligne brisée inscrite BC...M s'approchera du point A, et l'atteindra pour le dépasser ensuite. Il y aura donc une position du centre O et une seule, pour laquelle la ligne brisée ABC... M formera un polygone inscrit, comme nous l'avons annoncé.

Cela posé, soient S un cercle et P un polygone inscrit de côtés donnés $a, b, c, \ldots, l$; P′ étant un polygone quelconque formé avec les mêmes côtés, ajoutons à ce polygone P′, sur chacun des côtés, les segments circulaires qui surmontent les côtés correspondants du polygone inscrit P. On obtient ainsi une figure S′ terminée par des arcs circulaires, et dont le périmètre est égal à la circonférence du cercle S. On aura donc (483) $S > S'$, d'où, en retranchant de part et d'autre les segments circulaires qui surmontent les côtés, $P > P'$.

2° *Entre tous les polygones isopérimètres d'un même nombre de côtés, le polygone régulier est un maximum*; et réciproquement, *entre les périmètres de tous les polygones équivalents d'un même nombre de côtés, celui du polygone régulier est un minimum.*

En effet, le maximum parmi les polygones isopérimètres de n côtés doit d'abord avoir tous ses côtés égaux entre eux ; car si deux côtés consécutifs AB et BC étaient inégaux, en remplaçant le triangle ABC par un triangle isocèle AB'C construit sur la même base et de même périmètre, on aurait (478) une figure isopérimètre de n côtés et d'aire plus grande. Par suite, les côtés du polygone sont donnés et égaux chacun à la $n^{ième}$ partie du périmètre ; de plus, en vertu de la première partie du théorème qui nous occupe, le polygone maximum doit être inscriptible au cercle. Donc, enfin, le polygone maximum, devant être à la fois équilatéral et inscriptible, est régulier.

COROLLAIRE.

486. D'après cela, quand on cherchera quel polygone a l'aire maximum pour un périmètre constant, ou le périmètre minimum pour une aire constante, le nombre des côtés étant variable, on n'aura qu'à s'occuper des polygones réguliers, et l'on trouvera la loi suivante :

Les aires des polygones réguliers isopérimètres forment une série croissante, qui commence par le triangle et se termine par le cercle ; et les périmètres des polygones équivalents forment une série décroissante, à partir du triangle jusqu'au cercle.

En effet, deux polygones réguliers isopérimètres d'un nombre de côtés différents étant donnés, par exemple un pentagone ABCDE et un quadrilatère *abcd*, on peut considérer ce dernier comme un pentagone dont l'un des côtés serait nul, ou bien, en prenant arbitrairement un point *e* sur un des côtés de ce quadrilatère, par exemple sur *ad*, le considérer comme un pentagone *abcde*, dont l'un des angles *e* serait égal à deux angles droits ; le quadrilatère régulier peut donc être regardé comme un pentagone irrégulier : donc son aire est plus petite que celle du pentagone régulier ABCDE.

gru
ligne.

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR LA GÉOMÉTRIE PLANE.

LIVRE PREMIER.

LA LIGNE DROITE.

§§ I, II, III. — Des angles. — Des triangles. — Des perpendiculaires et des obliques.

1. Étant données quatre droites OA, OB, OC, OD, issues d'un même point O, si les angles DOA, BOC, sont égaux entre eux, ainsi que les angles AOB, COD, les côtés OA et OC sont en ligne droite, ainsi que les côtés OB et OD.

2. Le périmètre d'un triangle est plus grand que la somme des droites qui joignent un point intérieur quelconque aux trois sommets, et moindre que le double de cette somme.

3. Une médiane quelconque d'un triangle est moindre que la demi-somme des deux côtés issus du même sommet, et plus grande que la moitié de l'excès de cette somme sur le troisième côté.

4. Le périmètre d'un triangle est plus grand que la somme de ses trois médianes et moindre que le double de cette somme.

5. ABC étant un triangle quelconque, on prend sur AB, prolongé s'il le faut, une longueur AC′ égale à AC; on prend de même sur AC une longueur AB′ égale à AB; on tire B′C′ qui coupe BC en I : démontrer que la droite AI est la bissectrice de l'angle BAC.

6. Si, d'un point A pris hors d'une droite XY, on mène sur cette droite la perpendiculaire AB et les obliques AC, AD, d'un même côté, telles que BC = CD, l'angle BAC est plus grand que l'angle CAD.

7. On dit que deux points A et A′ sont *symétriques* par rapport à une droite indéfinie XY, lorsque cette droite XY est perpendiculaire sur le milieu de AA′. Démontrer d'après cette définition : 1° que, si A′ et B′ sont les symétriques par rapport à XY de deux points quelconques A et B, les deux droites symétriques AB et A′B′ sont égales entre elles; 2° que l'angle

CAB de deux droites AB et AC est égal à l'angle C'A'B' de leurs symétriques A'B' et A'C'.

8. Par le sommet A d'un triangle ABC, on mène la droite indéfinie XY perpendiculaire sur la bissectrice de l'angle A. Démontrer que, si M est un point quelconque de XY, le périmètre du triangle BMC est plus grand que celui du triangle donné ABC.

9. Les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle concourent en un même point.

10. Les bissectrices des trois angles d'un triangle concourent en un même point. — La bissectrice de l'un des angles et les bissectrices des suppléments des deux autres angles concourent aussi en un même point.

§ IV. — Des parallèles.

11. Si deux droites égales AB et CD, comprises entre deux parallèles AC et BD se coupent en un point O, on a AO = OC et OB = OD.

12. Si par le milieu D du côté AB d'un triangle ABC on mène une parallèle DE au côté BC, la droite DE passera par le milieu E de AC et sera égale à la moitié de BC. — Réciproquement, la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et égale à sa moitié.

13. Trouver le lieu des milieux des portions de droites qui vont d'un point donné à une droite donnée.

14. Étant donné un point à l'intérieur *ou* à l'extérieur d'un angle, mener entre les côtés de l'angle une droite qui soit divisée par ce point *ou* par l'un des côtés de l'angle en deux parties égales.

15. Un triangle quelconque est le quart de celui qu'on obtient en menant par chacun de ses sommets une parallèle au côté opposé. Chaque côté du nouveau triangle est le double du côté correspondant du triangle donné.

16. Les trois hauteurs d'un triangle concourent en un même point

17. Déduire du résultat précédent un procédé pour mener par un point donné une droite qui aille passer par le point de concours, supposé inaccessible, de deux droites données.

18. Les trois médianes d'un triangle concourent en un même point, situé au tiers de chacune d'elles à partir du côté correspondant.

19. Dans un triangle, la plus petite médiane correspond au plus grand côté. — Conséquence.

20. Dans un triangle, le point de concours des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés, le point de concours des trois médianes et celui des trois hauteurs, sont en ligne droite, et la distance du premier point au second est moitié de la distance du second point au troisième.

21. Si, par le point d'intersection I des bissectrices des angles B et C d'un triangle ABC, on mène entre les côtés de l'angle A la parallèle DIE à BC, la droite DE sera égale à la somme de BD et de CE. Si, par le point d'intersection I' de la bissectrice de l'angle B et de celle du supplément de l'angle C, on mène entre les côtés de l'angle A ou de son opposé par le sommet la parallèle D'I'E' à BC, la droite D'E' sera égale à la différence de BD' et de CE'. — Conséquences.

22. Des extrémités A et B et du milieu C d'une droite AB, on mène dans une direction quelconque des droites parallèles AA', BB', CC', jusqu'à leur rencontre avec une droite indéfinie XY. Démontrer que le point C' est le milieu de A'B', et que la parallèle CC' est égale à la demi-somme ou à la demi-différence des parallèles AA' et BB', suivant que les points A et B sont situés d'un même côté ou de part et d'autre de XY.

23. La somme des distances d'un point quelconque de la base d'un triangle isocèle aux deux autres côtés est constante. — Qu'arrive-t-il lorsque le point considéré est pris sur le prolongement de la base?

24. Trouver le lieu géométrique des points dont la somme ou la différence des distances à deux droites fixes est constamment égale à une longueur donnée.

25. La somme des distances d'un point pris à l'intérieur d'un triangle équilatéral à ses trois côtés est constante. — Qu'arrive-t-il lorsque le point considéré est extérieur au triangle ?

26. AX étant une droite quelconque menée par le sommet A d'un triangle ABC, et BE, CF, étant les perpendiculaires abaissées des points B et C sur cette droite AX, démontrer que le milieu D de BC est à égale distance des points E et F.

27. Démontrer : 1° que si deux angles ont leurs côtés respectivement parallèles, leurs bissectrices sont parallèles ou perpendiculaires entre elles; 2° que si deux angles ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, leurs bissectrices sont perpendiculaires ou parallèles entre elles.

28. Déterminer sur l'un des côtés d'un triangle un point tel, que les longueurs interceptées par les deux autres côtés sur les parallèles menées de ce point à ces mêmes côtés soient égales entre elles.

29. Étant donnés deux points A et B et une droite XY, trouver sur cette droite un point M tel que la somme AM + BM soit un minimum.

30. Étant donnés deux points A et B et une droite XY, trouver sur cette droite un point M tel que la différence BM — AM soit un maximum.

31. Trouver sur un côté d'un triangle un point tel que la somme de ses distances aux deux autres côtés soit un minimum.

32. Trouver dans le plan d'un triangle un point tel que la somme de ses distances aux trois côtés soit un minimum.

§ V. — Somme des angles d'un polygone.

33. Étant donnés un triangle ABC et un point O pris dans son intérieur, démontrer que l'angle BOC est toujours plus grand que l'angle BAC du triangle.

34. Un angle d'un triangle est droit, aigu ou obtus, suivant que la médiane issue du sommet de cet angle est égale, supérieure ou inférieure à la moitié du côté opposé. — Réciproques.

35. AD et BC étant deux parallèles coupées obliquement par AB et perpendiculairement par AC, on mène entre ces deux parallèles la droite BED qui coupe AC en E, de manière que $ED = 2AB$: démontrer que l'angle DBC est le tiers de l'angle ABC.

36. Si, d'un point A pris hors d'une droite XY, on mène sur cette droite la perpendiculaire AB et les obliques AC, AD, AE, de manière que ces obliques soient situées d'un même côté de AB et que les angles BAC, CAD, DAE, soient égaux, on a $BC < CD < DE$.

37. Soient un triangle ABC, et AO, BO, CO, les bissectrices de ses angles ; AO prolongée coupant le côté BC en D, et OI étant la perpendiculaire menée du point O sur BC, démontrer que l'angle BOD est égal à l'angle COI.

38. L'angle formé par la bissectrice de l'angle A d'un triangle ABC et par la perpendiculaire menée du sommet A sur le côté BC est égal à la demi-différence des angles B et C.

39. La différence entre les deux angles aigus d'un triangle rectangle est égale à l'angle formé par la hauteur et la médiane issues du sommet de l'angle droit. — Si l'on rapproche ce résultat du précédent, quelle conclusion peut-on en déduire?

40. Si l'on mène les bissectrices des angles extérieurs d'un triangle ABC, les trois triangles partiels et le triangle total qu'elles déterminent autour du triangle donné sont équiangles. Chaque angle du triangle ABC a pour supplément le double de l'angle qui lui est opposé dans le triangle total.

41. Dans un triangle ABC, on prend sur le côté AB et sur son prolongement AD = AE = AC, puis on joint le sommet C aux points D et E. Démontrer que l'angle E est la moitié de l'angle A du triangle ABC, et que l'angle DCE est droit.

42. Dans un triangle ABC on mène, jusqu'au côté BC, une droite AD faisant avec le côté AB un angle égal à l'angle C et une droite AE faisant avec le côté AC un angle égal à l'angle B. Démontrer que le triangle DAE est isocèle.

43. Dans un triangle rectangle, si l'un des angles aigus est double de l'autre, l'hypoténuse est double du plus petit côté. — Réciproque.

44. Dans un triangle quelconque ABC où l'angle B est double de l'angle C, on mène AD perpendiculaire sur le côté BC; sur AB, prolongé ou non suivant que l'angle B est aigu ou obtus, on prend BE égal à BD, puis on tire la droite EDF qui coupe AC au point F. Démontrer : 1° que les longueurs FD, FC, FA, sont égales et que les triangles ABC, AFE, sont équiangles; 2° que le côté AB est égal à la différence des segments DC et DB de la base BC si l'angle B est aigu, à leur somme si l'angle B est obtus

45. L'angle des bissectrices de deux angles consécutifs d'un quadrilatère convexe est égal à la demi-somme des deux autres angles du quadrilatère. L'angle des bissectrices de deux angles opposés est égal à la demi-différence des deux autres angles.

46. Les bissectrices des angles formés en prolongeant jusqu'à leur rencontre les côtés opposés d'un quadrilatère convexe se coupent sous un angle égal à la demi-somme de deux angles opposés du quadrilatère.

§ VI. — Du parallélogramme.

47. Deux quadrilatères convexes sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal, et leurs quatre côtés égaux chacun à chacun et disposés de la même manière. Énoncer le théorème correspondant pour le cas de deux parallélogrammes, de deux rectangles, de deux losanges, de deux carrés.

48. Deux trapèzes sont égaux lorsqu'ils ont leurs quatre côtés égaux chacun à chacun et disposés de la même manière.

49. Toute droite passant par le centre d'un parallélogramme le divise en deux quadrilatères égaux.

50. Tout quadrilatère est la moitié du parallélogramme que l'on obtient en menant par les extrémités de chaque diagonale des parallèles à l'autre

diagonale. — Déduire de ce théorème que deux quadrilatères ont même surface lorsque leurs diagonales sont respectivement égales et se coupent sous le même angle.

51. Si l'on mène la droite DE qui joint les milieux des côtés AB et AC du triangle ABC et, par les points D et E, deux parallèles quelconques DF, EG, jusqu'à la rencontre du côté BC, le triangle ADE est le quart du triangle ABC et le parallélogramme DEGF en est la moitié.

52. Les droites qui joignent successivement les milieux des côtés d'un quadrilatère forment un parallélogramme, moitié de la figure primitive. — Conséquence relative aux droites qui joignent les milieux des côtés du quadrilatère.

53. En divisant arbitrairement, mais de la même manière, les côtés d'un carré, et en joignant successivement les points de division, on forme un nouveau carré inscrit dans le premier.

54. Étant donné un parallélogramme ABCD, on prend en sens inverse, sur les côtés opposés AB, CD, deux longueurs AE et CF, arbitraires, mais égales; de même, sur les côtés opposés AD, BC, on prend en sens inverse les longueurs arbitraires AH = CG. Démontrer : 1° que la figure EGFH est un parallélogramme inscrit dans le parallélogramme proposé; 2° que le centre du parallélogramme proposé est en même temps celui de tous les parallélogrammes qu'on peut y inscrire.

55. Le point de rencontre des droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère quelconque est le milieu de la droite qui unit les milieux des diagonales de ce quadrilatère.

56. Les bissectrices des angles d'un quadrilatère convexe forment un second quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires. Lorsque le premier quadrilatère est un parallélogramme, le second est un rectangle dont les diagonales sont parallèles aux côtés du parallélogramme et égales à la différence de ses côtés adjacents. Lorsque le premier quadrilatère est un rectangle, le second est un carré.

57. Si, par un point quelconque de la base d'un triangle isocèle, on mène des parallèles aux deux autres côtés, on forme un parallélogramme dont le périmètre est constant.

58. ABC étant un triangle rectangle et ABDM, ACEN, étant les carrés construits sur les côtés AB et AC de l'angle droit, des sommets D et E, opposés au sommet A, on abaisse des perpendiculaires DF, EG, sur l'hypoténuse BC prolongée. Démontrer : 1° que l'hypoténuse BC est égale à la somme des perpendiculaires DF et EG; 2° que le triangle proposé ABC est la somme des triangles DFB, CEG.

59. Démontrer que dans tout trapèze isocèle les angles opposés sont supplémentaires.

60. Dans tout trapèze, les quatre points, milieux des deux côtés non parallèles et des deux diagonales, sont sur une même droite parallèle aux deux bases du trapèze; la distance des points extrêmes est égale à la demi-somme de ces bases; la distance des points intermédiaires est égale à leur demi-différence.

61. ABCD étant un parallélogramme, E et F étant les milieux des côtés opposés AB et CD, les droites BF et DE divisent la diagonale AC en trois parties égales.

62. Par le sommet A d'un parallélogramme ABCD, on mène une droite quelconque AX. Prouver que la distance du sommet C à la droite AX est égale à la somme ou à la différence des distances des sommets B et D à la même droite, suivant que AX est extérieure au parallélogramme ou le traverse.

63. D, E, F, étant respectivement les milieux des côtés AB, BC, CA, d'un triangle ABC, on mène DG parallèle à la médiane BF jusqu'à la rencontre de EF prolongée. Démontrer que les trois côtés du triangle DGC sont respectivement égaux aux trois médianes du triangle ABC.

64. Démontrer qu'un polygone convexe, d'un nombre impair de côtés, est déterminé quand on donne les milieux de ses côtés.

65. Parmi tous les triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés variables dont la somme est constante, quel est celui dont le périmètre est minimum?

66. Étant données deux parallèles XY, X'Y', et deux points A et B situés hors de ces parallèles et de côtés différents, trouver le plus court chemin de A en B par une ligne brisée AMNB telle, que la portion MN comprise entre les parallèles ait une direction donnée.

67. Sur un billard rectangulaire, dans quelle direction faut-il lancer la bille pour qu'elle revienne au point de départ après avoir frappé successivement les quatre côtés? — Quelle est la longueur du chemin parcouru alors par la bille? — Comment généraliserait-on la question? (On admet que, lorsque la bille frappe une bande, les deux droites qu'elle suit, avant et après le choc, sont également inclinées sur la bande).

LIVRE II.

LA CIRCONFÉRENCE DE CERCLE.

§ I. — Des arcs et des cordes.

68. Étant données la base d'un triangle et la différence des deux autres côtés, trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées des extrémités de la base sur la bissectrice de l'angle au sommet. — Même question en remplaçant la différence des deux côtés par leur somme, et la bissectrice de l'angle au sommet par celle de son supplément.

69. Si l'on divise la corde d'un arc de cercle en trois parties égales, les rayons qui passent par les points de division partagent l'arc en trois parties, dont les deux extrêmes sont égales entre elles et moindres que la partie intermédiaire.

70. Par un point A extérieur à une circonférence O, on mène une sécante ACD dont la partie extérieure AC est égale au rayon; on mène en outre le diamètre AOB : démontrer que l'angle COA est le tiers de l'angle DOB.

71. Étant donnés une circonférence et un point dans son plan, quelle est la plus petite corde qu'on puisse mener par ce point dans la circonférence?

72. Si deux cordes égales se coupent à l'intérieur ou à l'extérieur d'une circonférence, les segments déterminés sur ces deux cordes par leur point de rencontre sont respectivement égaux.

§ II. — Tangente au cercle. — Positions mutuelles de deux circonférences.

73. La plus petite et la plus grande des droites qu'on peut mener entre deux circonférences passent par les centres de ces circonférences.

74. Étant donnés trois points non en ligne droite, faire passer par un point donné *ou* décrire avec un rayon donné une circonférence dont les trois premiers points soient également distants.

75. Si deux cordes AB et CD se coupent dans un cercle, la somme AC + BD des arcs qu'elles interceptent est égale à la somme des arcs interceptés par les deux diamètres parallèles à ces cordes.

76. Un cercle étant donné, combien faut-il de cercles de même rayon pour l'entourer?

77. On donne un cercle de centre O et de rayon R, et un point extérieur A. Du point A comme centre, avec OA pour rayon, on décrit un arc BOC, et du point O comme centre avec 2R pour rayon, on décrit un nouvel arc qui coupe le précédent en B et en C. On mène OB et OC qui rencontrent respectivement en E et en D la circonférence primitive. Démontrer que AE et AD sont tangentes à cette circonférence.

78. AB étant un diamètre fixe d'un cercle, et CD une corde parallèle à ce diamètre, on mène CB et DA qui se coupent en M, puis CA et DB qui se coupent en N. Trouver le lieu des points M et N quand la corde CD se déplace parallèlement à elle-même.

79. Quel est le lieu des centres des circonférences de même rayon qui partagent une circonférence donnée en deux parties égales?

80. Quel est le lieu des centres des circonférences de même rayon qui coupent sous un angle donné une circonférence donnée?

§ III. — Mesure des angles.

81. A, B, C, étant trois points quelconques d'une circonférence, D le milieu de l'arc AB, et E le milieu de l'arc AC, la droite DE coupe respectivement en F et en G les cordes AB et AC. Démontrer que AF = AG.

82. A étant un point quelconque d'un diamètre, B l'extrémité du rayon perpendiculaire à ce diamètre, on mène BA qui coupe le cercle en P, puis la tangente au point P qui coupe en C le diamètre prolongé. Démontrer que CA = CP.

83. A, B, C, A', B', C', étant six points pris sur une circonférence, de telle manière que AB soit parallèle à A'B' et AC à A'C', démontrer que BC' et CB' sont parallèles.

84. Les hauteurs AA', BB', CC', d'un triangle quelconque ABC, sont les bissectrices des angles du triangle A'B'C'.

85. ABC étant un triangle inscrit dans un cercle, on joint le centre O au milieu D de l'arc BC, et l'on mène AD. Démontrer que l'angle ADO est la moitié de la différence des angles B et C.

86. Si par le point A, commun à deux circonférences qui se coupent, on mène à volonté deux sécantes ABC, ADE, les cordes BD et CE qui

joignent leurs extrémités se rencontrent sous un angle constant. — Dans le cas où les deux sécantes se confondent, comment faut-il énoncer le théorème?

87. On donne deux circonférences O et O' et un angle XAY situé dans leur plan. Le côté AX coupe la circonférence O aux points B et C et la circonférence O' aux points B' et C'; le côté AY coupe la circonférence O en D et E, la circonférence O' en D' et E'. Démontrer que les cordes BD, CE, B'D', C'E', indéfiniment prolongées, forment un quadrilatère inscriptible.

88. Si par le point d'intersection O des diagonales d'un quadrilatère inscrit ABCD, on mène la corde EOF qui a son milieu en O, la partie de cette corde interceptée entre les côtés opposés du quadrilatère sera aussi divisée par le point O en deux parties égales.

89. O étant le point de concours des hauteurs d'un triangle ABC et G le point où la hauteur AD rencontre le cercle circonscrit au triangle, on a OD = DG.

90. Étant donnés un triangle ABC et le cercle circonscrit, si du milieu de l'un quelconque des deux arcs sous-tendus par le côté BC on abaisse des perpendiculaires sur AB et sur AC, la somme des distances des pieds de ces perpendiculaires aux sommets du triangle est égale à la demi-somme ou à la demi-différence des côtés AB et AC.

91. Si par le point A, milieu d'un arc BAC d'une circonférence, on mène deux cordes quelconques AD et AE qui coupent en F et en G la corde BC, le quadrilatère DFGE est inscriptible.

92. ABCD étant un quadrilatère inscriptible, on mène une circonférence passant par A et B, une seconde par B et C, une troisième par C et D, et une quatrième par D et A. Ces quatre circonférences se coupent successivement en quatre points L, M, N, P, autres que les points A, B, C, D. Démontrer que le quadrilatère LMNP est inscriptible.

93. Si dans un quadrilatère ABCD on prolonge les côtés opposés AB et CD jusqu'à leur rencontre E, puis les côtés opposés AD et BC jusqu'à leur rencontre F, on forme une figure qu'on nomme *quadrilatère complet*, et qui renferme quatre triangles ABF, ADE, BCE, DCF. Démontrer : 1° que les cercles circonscrits à ces quatre triangles passent par un même point; 2° que ce point et les centres des quatre cercles sont sur une même circonférence.

94. Sur les trois côtés d'un triangle ABC, on construit extérieurement à ce triangle les triangles équilatéraux ABC', ACB', BCA'. Démontrer : 1° que les trois droites AA', BB', CC', sont égales; 2° qu'elles concourent

en un même point O; 3° que, du point O, on voit sous le même angle les trois côtés du triangle ABC.

95. Par un point fixe pris dans le plan d'un cercle, on mène diverses cordes : trouver le lieu des milieux de ces cordes.

96. Par l'une des extrémités d'un diamètre AB d'un cercle, on mène une corde quelconque AC que l'on prolonge d'une quantité CM égale à CB : quel est le lieu des points M?

97. On donne un cercle et un point fixe A situé dans son plan. ABC étant une corde quelconque issue du point A, on élève sur le milieu de cette corde une perpendiculaire IM égale à IA. Quel est le lieu des points M?

98. ABC étant un triangle équilatéral, quel est le lieu des points M, tels que $MA = MB + MC$?

99. Trouver le lieu du point de concours des hauteurs des triangles qui ont même base et même angle au sommet.

100. Une circonférence roule dans l'intérieur d'un cercle de rayon double : quel est le lieu décrit par un point de cette circonférence?

101. Trouver le lieu des points tels, que si l'on abaisse de l'un d'eux des perpendiculaires sur les trois côtés d'un triangle fixe, les trois pieds de ces perpendiculaires soient en ligne droite.

102. Dans un triangle, on donne : la somme ou la différence de deux côtés et l'angle formé par ces côtés en grandeur et en position. Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit.

103. Deux circonférences O et O′ étant tangentes intérieurement au point A, et BC étant une corde de la grande circonférence tangente en D à la petite circonférence, la droite AD est la bissectrice de l'angle BAC.

104. La circonférence O touchant les deux circonférences O′ et O″ aux points A et B, on prolonge la corde AB jusqu'à son second point de rencontre C avec la circonférence O″. Démontrer que les deux rayons O′A et O″C sont parallèles. La droite O′O″ rencontrant les circonférences O′ et O″ aux points D et E, démontrer en second lieu que le quadrilatère ABDE est inscriptible.

105. Le point C étant le milieu d'un arc AB, et le point D un point quelconque de cet arc, on a $AC + BC > AD + BD$.

§ IV. — Construction des angles et des triangles.

106. Construire un triangle, connaissant :
1° Deux côtés et une médiane (deux cas);

2° Un côté et deux médianes (deux cas),

3° Les trois médianes;

4° La base, la différence des deux autres côtés et la différence des angles à la base;

5° La base, un angle à la base, et la somme ou la différence des deux autres côtés;

6° La base, l'angle au sommet, et la somme ou la différence des deux autres côtés.

107. Diviser un angle droit en trois parties égales.

108. Par un point donné O, mener trois droites OA, OB, OC, de longueurs données et telles, que leurs extrémités A, B, C, soient en ligne droite, et que les intervalles AB et BC soient égaux entre eux.

109. Soient ABC un triangle, et ABDE, ACFG, BCHK, les carrés construits sur les trois côtés; connaissant les longueurs des trois droites EG, FH, KD, construire le triangle ABC.

§ V. — Tracé des parallèles et des perpendiculaires.

110. Décrire un cercle :

1° Touchant deux droites données, et l'une d'elles en un point donné;

2° Touchant une droite et une circonférence données, et cette circonférence en un point donné.

111. Construire un triangle, connaissant :

1° Les pieds des trois hauteurs;

2° Un angle, une hauteur et le périmètre (deux cas);

3° Un côté, l'un des angles adjacents et la longueur de la bissectrice de cet angle;

4° La somme de deux côtés et les angles;

5° Le périmètre et les angles;

6° Un angle, la longueur de sa bissectrice et l'une des hauteurs (deux cas);

7° Les angles et une hauteur;

8° La base, la somme des deux autres côtés et la différence des angles à la base.

112. Construire un quadrilatère, connaissant les quatre côtés et la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés.

113. Construire un pentagone, connaissant les milieux des cinq côtés.

114. Par l'un des points d'intersection de deux cercles, mener une sécante commune qui ait son milieu en ce point.

115. Par un point donné, mener une droite qui fasse des angles égaux avec deux droites données.

116. Tracer une droite de longueur donnée, dont les extrémités s'appuient sur deux droites données, et qui soit parallèle à une droite donnée.

Même problème en remplaçant les deux droites par deux circonférences.

117. On donne trois droites issues d'un même point, et un point pris sur l'une d'elles; mener par ce point une sécante qui soit divisée par les trois droites en deux parties égales.

118. Par un point extérieur à un cercle, mener une sécante dont la longueur totale soit double de sa partie extérieure.

119. Inscrire dans un triangle un losange dont l'un des angles coïncide avec un angle du triangle.

120. Tracer une circonférence qui passe à égale distance de quatre points donnés, dont trois quelconques ne soient pas en ligne droite.

121. Décrire une circonférence de rayon donné, dont le centre soit sur une droite donnée et telle, que la somme des distances, maximum et minimum, d'un point donné à cette circonférence, soit égale à une longueur donnée.

122. Par un point pris dans le plan d'un parallélogramme, mener une sécante telle, que la partie comprise entre deux côtés opposés (prolongés s'il le faut) soit égale à la partie comprise entre les deux autres côtés.

§ VI. — Problèmes sur les tangentes.

123. Mener à un cercle une tangente qui fasse un angle donné avec une droite donnée.

124. Deux cercles étant donnés, mener une sécante telle, que les cordes interceptées sur elle par les deux cercles aient des longueurs données.

125. Des sommets d'un triangle comme centres, décrire trois cercles qui se touchent deux à deux.

126. Décrire un cercle qui touche deux circonférences, et l'une d'elles en un point donné.

127. Construire un triangle rectangle, connaissant :

1° L'un des côtés de l'angle droit et l'excès de l'hypoténuse sur le troisième côté;

2° Les angles et l'excès de l'hypoténuse sur un des côtés de l'angle droit.

128. Étant donnés un cercle et un angle circonscrit, toute tangente à l'arc qui tourne sa convexité vers le sommet détermine avec les côtés de

l'angle un triangle dont le périmètre est constant et dont le troisième côté est vu du centre du cercle sous un angle constant. — Qu'arrive-t-il lorsque la tangente est menée par un point de l'arc concave?

129. Construire un triangle, connaissant son périmètre, un angle en grandeur et en position, et un point du troisième côté.

130. Construire un triangle, connaissant :
1° Un angle, ainsi que la hauteur et la médiane issues de son sommet;
2° Un côté, un angle et une hauteur (cinq cas).

131. Construire un triangle ayant des angles donnés et tel, que ses sommets appartiennent à deux circonférences concentriques données.

132. Construire un triangle, connaissant la base, la différence des angles à la base, et sachant que le sommet doit être situé sur une droite donnée.

133. Dans tout triangle rectangle, le diamètre du cercle inscrit est égal à l'excès de la somme des deux côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse.

134. Étant donnés un triangle, le cercle inscrit et les trois cercles ex-inscrits, démontrer : 1° que les quatre points de contact qui se trouvent sur un même côté (deux intérieurs et deux extérieurs) sont deux à deux équidistants du milieu de ce côté; 2° que la distance d'un point de contact extérieur au plus éloigné des deux sommets situés sur le même côté est égale au demi-périmètre du triangle; 3° que la distance du point de contact du cercle inscrit à l'un des sommets situés sur le même côté est égale au demi-périmètre diminué du côté opposé à ce sommet; 4° que la distance des deux points de contact intérieurs situés sur le côté considéré est égale à la différence des deux autres côtés du triangle; 5° que la distance des deux points de contact extérieurs est égale à la somme des deux autres côtés du triangle; 6° que la distance du point de contact du cercle inscrit à l'un des points de contact extérieurs est égale à celui des deux autres côtés du triangle qui aboutit au sommet situé entre ces deux points de contact.

135. Soient ABC un triangle, D le centre du cercle circonscrit, O celui du cercle inscrit, et O′, O″, O‴, les centres des cercles ex-inscrits respectivement situés dans les angles A, B, C; démontrer : 1° que le cercle circonscrit passe par les milieux des droites OO′, OO″, OO‴; 2° que les quatre points O, B, C, O′, sont sur un même cercle dont le centre est sur la circonférence D; 3° que les points O″, B, C, O‴, sont sur un même cercle dont le centre est sur la circonférence D.

136. Si l'on désigne par R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC; par r celui du cercle inscrit, par r', r'', r''', ceux des cercles ex-inscrits;

par δ, δ', δ'', les perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit sur les côtés; par μ, μ', μ'', les portions de ces perpendiculaires comprises entre les côtés du triangle et la circonférence circonscrite, on a les relations

$$r' + r'' + r''' = 4R + r,$$
$$\mu + \mu' + \mu'' = 2R - r,$$
$$\delta + \delta' + \delta'' = R + r.$$

La dernière relation suppose que le centre D du cercle circonscrit est situé à l'intérieur du triangle. Dans le cas où le point D est extérieur, comment faut-il modifier cette relation?

137. Construire un triangle, connaissant :

1° Le rayon du cercle inscrit, un angle et la hauteur issue de son sommet;

2° Un côté, la somme ou la différence des deux autres, et le rayon du cercle inscrit ou de l'un des cercles ex-inscrits;

3° Les centres des trois cercles ex-inscrits.

138. Construire trois cercles égaux qui se touchent deux à deux et qui touchent intérieurement un cercle donné.

139. Étant donnés la base et l'angle au sommet d'un triangle, trouver les lieux des centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits.

140. Le trapèze isocèle est le seul trapèze inscriptible.

APPENDICE DU DEUXIÈME LIVRE.

141. ABC étant un triangle quelconque, on construit sur les côtés les carrés ABDE, ACFG, BCHK; on mène EG, DK, HF, DC, BF, et l'on abaisse la hauteur AI; démontrer : 1° que les trois droites DC, BF, AI, concourent en un même point; 2° que les perpendiculaires abaissées respectivement de A sur EG, de B sur DK, et de C sur FH, concourent en un même point.

142. Partager un arc de cercle en deux parties telles, que la somme ou la différence de leurs cordes soit égale à une droite donnée.

143. Deux cercles O et O' et une droite XY étant donnés, trouver sur XY un point tel, que les tangentes menées de ce point aux deux cercles soient également inclinées sur la droite XY.

144. Étant donnés une droite XY et deux points A et B situés d'un même côté de cette droite, trouver sur XY un point M tel, que l'angle AMX soit double de l'angle BMY.

145. On donne un cercle de centre O et un diamètre fixe AOB. Du

point B, on mène une corde BC, que l'on prolonge d'une quantité CD égale à BC. On tire les droites CA et DO, qui se coupent en M. Quel est le lieu du point M, lorsque la corde BC tourne autour du point B?

146. On donne un cercle O et deux diamètres rectangulaires AA', BB'. Du point A, on mène une sécante ACI qui coupe le cercle en C et le diamètre BB' prolongé en I. La tangente en C au cercle O et la perpendiculaire en I au diamètre BB' se rencontrent en un point M dont on demande le lieu.

147. Construire un triangle équilatéral, sachant qu'il doit s'appuyer par ses trois sommets sur trois circonférences concentriques données.

148. Construire un triangle dont on connaît les angles, et qui ait ses trois sommets sur trois droites parallèles données.

149. Trouver, dans le plan d'un triangle, le point dont la somme des distances aux trois sommets est un minimum.

150. Construire un quadrilatère, connaissant deux angles opposés, les longueur des deux diagonales et l'angle qu'elles forment.

151. Dans le plan d'un angle donné BAC, mener par un point donné D une droite DBC telle, que le périmètre du triangle ABC ainsi formé ait une longueur donnée.

152. D'un point donné comme centre, décrire une circonférence qui coupe une droite donnée, de manière que l'un des segments déterminés par la droite soit capable d'un angle donné.

153. Couper un triangle donné par une droite telle, que les deux segments interceptés sur cette droite par les trois côtés du triangle (prolongés s'il est nécessaire) aient des longueurs données.

154. Décrire un cercle qui touche une droite donnée en un point donné, et qui coupe un cercle donné sous un angle donné.

155. On donne un triangle ABC rectangle en A; une perpendiculaire quelconque DE à l'hypoténuse coupe le côté BA en D, le côté CA en F; on mène les droites DC et BF qui se rencontrent en M; trouver le lieu du point M.

LIVRE III.

LES FIGURES SEMBLABLES.

§ I. — Lignes proportionnelles.

156. Démontrer que, si l'on mène entre les deux côtés d'un triangle une suite de parallèles à la base, la médiane qui correspond à cette base est le lieu des points d'intersection des diagonales des trapèzes ainsi obtenus.

157. Trouver le lieu géométrique des points d'un plan également éclairés par deux foyers lumineux placés dans ce plan, et dont les intensités à l'unité de distance sont représentées par les nombres a et b.

158. Trouver dans le plan déterminé par trois foyers lumineux le point également éclairé par chacun d'eux.

159. Trouver le lieu des points qui partagent dans un rapport donné $\frac{m}{n}$ toutes les droites comprises entre un point donné A et un cercle donné O.

160. Trouver le lieu des points d'où l'on voit sous un même angle donné deux cercles donnés.

161. Trouver le point d'où l'on voit sous un même angle donné trois cercles donnés.

162. Soient deux droites quelconques AB et XY. Si AB est divisée au point C dans le rapport $\frac{m}{n}$, et si des points A, B, C, on mène jusqu'à XY les parallèles AA', BB', CC', à une direction quelconque, on a toujours

$$CC'(m+n) = n.AA' + m.BB'.$$

§ II. — Lignes proportionnelles dans le cercle.

163. Étant donnés un point A et un cercle O, on mène à ce cercle par le point A une sécante ABC sur laquelle on prend un point M tel, qu'on ait $AM.AC = k^2$; trouver le lieu décrit par le point M quand la sécante ABC tourne autour du point A.

164. D'un point donné hors d'un cercle, lui mener une sécante telle, que la corde interceptée soit moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.

165. D'un point donné hors d'un cercle, lui mener une sécante telle, que le produit de la sécante entière par sa partie intérieure soit égal à un carré donné k^2.

166. Étant donné un triangle obtusangle, mener du sommet de l'angle obtus au côté opposé une droite dont le carré soit égal au produit des segments qu'elle détermine sur ce côté.

167. AB est un diamètre d'un cercle, CD une corde perpendiculaire à AB; par un point P pris sur CD, on mène une corde APQ : démontrer que le produit AP.AQ est constant.

168. Si l'on joint le centre d'un cercle à un point d'une corde, le carré de la droite obtenue, plus le produit des segments que le point choisi détermine sur la corde, est égal au carré du rayon.

169. Les cordes communes à un cercle fixe et à tous les cercles que l'on peut mener par deux points donnés, passent par un point fixe.

170. Dans tout triangle, la demi-différence de deux côtés est la moyenne proportionnelle des distances du milieu du troisième côté aux points où ce côté est coupé par la bissectrice et la hauteur issues du sommet de l'angle opposé; de même, la demi-somme de deux côtés est la moyenne proportionnelle des distances du milieu du troisième côté aux points où ce côté est coupé par la bissectrice du supplément de l'angle opposé et par la hauteur issue du sommet de cet angle.

171. Étant donnés un triangle ABC et le cercle circonscrit à ce triangle, on mène la bissectrice AD de l'angle A qui coupe BC en D et le cercle circonscrit en E, et la bissectrice AD′ du supplément de l'angle A qui coupe BC prolongé en D′ et le cercle circonscrit en E′ : démontrer que BE est la moyenne proportionnelle de EA et de ED, et que BE′ est la moyenne proportionnelle de E′A et de E′D′.

172. On donne l'angle au sommet d'un triangle en grandeur et en position, et la somme des inverses des côtés qui comprennent cet angle : démontrer que la base du triangle passe par un point fixe.

173. Deux droites se coupent à angle droit dans un cercle ou hors d'un cercle : démontrer que la somme des carrés des deux droites opposées déterminées par leurs points d'intersection avec la circonférence est égale au carré du diamètre, ainsi que la somme des carrés des quatre segments des deux droites données.

174. Si, dans le problème précédent, AB et CD sont les cordes interceptées par la circonférence O sur les deux droites données qui se coupent perpendiculairement en E, on a

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + 4\overline{OE}^2 = 8\overline{OA}^2.$$

175. Soit un demi-cercle décrit sur AB; deux cordes quelconques AD et BC se coupent en P : démontrer que

$$\overline{AB}^2 = AD.AP + BC.BP.$$

176. Dans un triangle quelconque ABC, soient M le milieu de la base BC, I son point de contact avec le cercle inscrit au triangle, H et K les points de rencontre de la hauteur et de la bissectrice issues du sommet A avec BC : démontrer la relation

$$MI.HI = MH.KI.$$

177. R, r, ρ_1, ρ_2, ρ_3, étant les rayons du cercle circonscrit, du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits à un triangle quelconque, et d, δ_1, δ_2, δ_3, étant les distances du centre du cercle circonscrit aux centres des cercles inscrit et ex-inscrits : démontrer les relations

$$R^2 = d^2 + 2Rr = \delta_1^2 - 2R\rho_1 = \delta_2^2 - 2R\rho_2 = \delta_3^2 - 2R\rho_3 = \frac{d^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}{12}.$$

178. Si ABCD est un parallélogramme, et si l'on décrit un cercle passant par A et coupant respectivement en F, H, G, les côtés AB et AD et la diagonale AC, démontrer la relation

$$AB.AF + AD.AH = AC.AG.$$

179. Étant donnés deux cercles concentriques, mener au plus petit une tangente telle, que, si l'on joint respectivement les points A et B où elle coupe le second cercle avec deux points C et D donnés dans le plan des deux cercles, les droites AC et BD soient parallèles.

180. Deux cercles A et B se touchent en C; d'un point D quelconque extérieur à ces cercles, on voit sous le même angle les rayons AC et BC. Si du point D on mène aux deux cercles les tangentes DE et DF, on a

$$DE.DF = \overline{DC}^2.$$

181. Si, du sommet d'un angle A d'un triangle quelconque ABC, on mène une droite AB′ anti-parallèle à AC par rapport à l'angle C, puis une

droite AC′ anti-parallèle à AC par rapport à l'angle B, on obtient sur le troisième côté BC trois segments B′C′, BC′, CB′, dont les deux extrêmes BC′ et CB′ sont, l'un BC′ adjacent au côté AB, l'autre CB′ adjacent au côté AC; démontrer :

1° Que chaque côté de l'angle A est moyen proportionnel entre le troisième côté et le segment qui lui est adjacent;

2° Que les deux droites AC′ et AB′ sont égales entre elles, et que chacune d'elles est moyenne proportionnelle entre les deux segments extrêmes BC′ et CB′.

182. Dans tout triangle, la somme des perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit sur les trois côtés est égale à la somme des rayons des cercles inscrit et circonscrit.

183. Par deux points donnés, faire passer un cercle qui coupe en deux parties égales une circonférence donnée.

184. Si les bissectrices des angles à la base d'un triangle sont égales, ce triangle est isocèle.

185. ABC étant un triangle quelconque, D le milieu de la base, E le pied de la hauteur abaissée sur cette base, L le pied de la bissectrice de l'angle opposé A, enfin H et K les points de contact de BC avec le cercle inscrit au triangle et le cercle ex-inscrit dont le point de contact est entre B et C, démontrer les relations

$$LH.LK = LD.LE, \quad HD.HE = DE.HL.$$

186. Quatre points étant sur une même circonférence, dans chacun des triangles formés par ces quatre points pris trois à trois, existe un point de rencontre des hauteurs : démontrer que ces quatre points de rencontre sont sur une même circonférence égale à la première.

187. La somme des carrés des trois côtés d'un triangle est égale :

1° A deux fois la somme des produits de chaque hauteur par la portion comprise sur elle entre le sommet correspondant et le point de concours des trois hauteurs;

2° A douze fois le carré du rayon du cercle circonscrit, moins la somme des carrés des trois droites qui unissent les sommets au point de concours des trois hauteurs.

§ III. — Similitude des polygones.

188. Si les trois côtés d'un triangle font respectivement avec les trois côtés d'un autre triangle des angles égaux, ces deux triangles sont semblables.

189. Étant donné un triangle ABC, y inscrire un triangle semblable à un triangle donné, et qui ait l'un de ses sommets en un point donné sur l'un des côtés du triangle ABC.

190. Un billard circulaire étant donné, dans quelle direction faut-il lancer la bille pour qu'elle revienne au point de départ, après avoir frappé deux fois la bande?

191. Si un triangle circonscrit à un triangle fixe se meut en restant semblable à lui-même, un point quelconque de son plan décrit une circonférence.

192. On donne une droite XY et un angle BAC dont le sommet est en un point fixe A hors de cette droite. Le point B étant le point commun à la droite XY et au côté BA, on prend sur l'autre côté de l'angle BAC un point C tel, qu'on ait

$$AB.AC = k^2.$$

Déterminer le lieu décrit par le point C lorsque l'angle BAC tourne autour de son sommet.

193. Mener à un cercle donné, par deux points donnés extérieurement, deux sécantes qui se coupent sur le cercle, et dont les deux autres points d'intersection avec la circonférence déterminent une corde parallèle à une direction donnée.

194. Inscrire dans un triangle donné un triangle semblable à un triangle donné, et qui soit minimum.

195. Circonscrire au système de trois cercles donnés un triangle semblable à un triangle donné, et qui soit maximum.

196. Inscrire dans un triangle donné trois cercles dont les rayons et les distances des centres soient dans un rapport donné, et qui forment un système minimum.

197. Trouver le lieu du troisième sommet d'un triangle semblable à un triangle donné, et dont un sommet reste fixe, tandis que l'autre décrit une droite ou une circonférence donnée.

198. On donne un point A et une droite BC; trouver le lieu des points M qui divisent les sécantes AN menées du point à la droite, de manière qu'on ait

$$AM.AN = k^2.$$

199. Les diagonales AC, BD d'un quadrilatère inscrit ABCD se coupent en E : démontrer qu'on a

$$\frac{AB.BC}{AD.DC} = \frac{BE}{ED}.$$

200. Si un carré DEFG est inscrit dans un triangle rectangle ABC, de manière qu'un côté DE du carré coïncide avec l'hypoténuse BC, ce côté est moyen proportionnel entre les deux segments BD et EC de l'hypoténuse.

201. La droite AB étant divisée aux points C et D de manière qu'on ait

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD},$$

si l'on mène par le point A une autre droite AE égale à AC, démontrer que l'angle BED a EC pour bissectrice.

202. Si deux cordes se coupent dans un cercle, de manière que les segments de l'une présentent le même rapport que les segments de l'autre, la bissectrice de l'angle formé par deux segments homologues passe par le centre du cercle.

203. On donne un triangle ABC rectangle en A; une perpendiculaire DE à l'hypoténuse coupe le côté BA en D, le côté CA en F; on mène les droites CD, BF, qui se coupent : lieu des points M d'intersection.

204. Un triangle BAC étant inscrit dans une demi-circonférence, une perpendiculaire menée en D à l'hypoténuse BC coupe les côtés BA et AC du triangle et la demi-circonférence aux points E, G, F : démontrer la relation

$$\overline{DF}^2 = DE.DG.$$

205. Si, d'un point A d'une circonférence, on mène les cordes AB, AC, etc., qu'on les coupe par une corde DE parallèle à la tangente en A, le produit de chaque corde issue du point A par le segment compris sur elle entre le point A et la corde DE, est constant.

206. Étant donnés un parallélogramme ABCD et deux points P et Q sur les côtés AD et CD, si l'on mène par ces points, dans une direction quelconque, deux parallèles qui rencontrent respectivement en M et en M' les deux côtés AB et CB, le produit AM.CM' est constant.

207. On donne trois droites parallèles et deux points P et Q; si, autour de ces points, on fait tourner deux droites qui se coupent sur l'une des trois parallèles et qui rencontrent respectivement les deux autres en M et en M', la droite MM' passe par un point fixe.

208. Si, par le sommet d'un angle donné et par un point extérieur à cet angle, on fait passer une série de cercles, ces cercles divisent les deux côtés de l'angle en parties proportionnelles. — Quel est le lieu du milieu des cordes interceptées entre les côtés de l'angle donné?

209. Quand un losange ABCD est circonscrit à un cercle, toute tangente MM' à ce cercle détermine sur les côtés AB et AD deux segments BM et DM' dont le produit est constant.

210. Deux cercles tangents extérieurement étant donnés, la portion de tangente commune extérieure comprise entre ses deux points de contact est la moyenne proportionnelle des diamètres des deux cercles.

211. Trouver dans le plan d'un triangle ABC un point O tel, que les circonférences passant par ce point et deux des sommets du triangle soient entre elles comme trois droites données.

212. Si, sur les deux côtés AB et AC d'un triangle ABC, on décrit des cercles de manière que leur second point d'intersection se trouve sur la base BC ou sur son prolongement, les diamètres de ces cercles sont proportionnels aux côtés sur lesquels on les a respectivement décrits.

213. CDE étant la tangente commune à deux circonférences et rencontrant la ligne des centres AB au point E, si l'on mène aux deux circonférences une sécante FGHKE, démontrer la relation

$$EC.ED = EF.EK = EG.EH.$$

214. Si un cercle quelconque touche deux autres cercles donnés, la droite qui unit les deux points de contact passe par un point fixe.

215. Lorsque deux triangles ont deux angles égaux et deux angles supplémentaires chacun à chacun, les côtés de ces triangles respectivement opposés à ces angles sont proportionnels.

216. Soient dans un cercle le diamètre AB et la perpendiculaire AC à ce diamètre; si, par un point C quelconque de cette perpendiculaire, on mène au cercle une seconde tangente CD, la perpendiculaire DE, menée par le point de contact D au diamètre AB, est divisée en deux parties égales par la droite CB.

217. On donne deux cercles dont l'un a pour centre un point O de la circonférence de l'autre; si l'on mène au cercle O une tangente quelconque qui rencontre l'autre cercle en M et en M', le produit OM.OM' est constant.

218. Inscrire un carré dans un triangle. — Discussion.

219. Inscrire dans un rectangle donné un rectangle semblable à un autre rectangle donné. — Discussion.

220. Un angle AOB, tournant autour de son sommet O, intercepte sur les côtés d'un angle fixe, supplémentaire du premier, une corde AB : trouver le lieu des points qui divisent cette corde dans un rapport donné.

221. a, b, c, désignant les longueurs des trois côtés d'un triangle; p, q, r, celles des trois hauteurs; x, y, z, les côtés des trois carrés inscrits; x', y', z', les côtés des trois carrés ex-inscrits : démontrer les relations

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{p}+\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{y}=\frac{1}{q}+\frac{1}{b}, \quad \frac{1}{z}=\frac{1}{r}+\frac{1}{c},$$

$$\frac{1}{x'}=\frac{1}{p}-\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{y'}=\frac{1}{q}-\frac{1}{b}, \quad \frac{1}{z'}=\frac{1}{r}-\frac{1}{c}.$$

222. Sur la base BC d'un triangle ABC, on décrit extérieurement au triangle un carré BCDE; on mène les droites AD et AE qui coupent BC en P et Q : démontrer que PQ est égal au côté du carré inscrit dans le triangle ABC et reposant sur BC.

223. Dans tout triangle ABC, le produit des distances des points B et C à la bissectrice de l'angle intérieur A, est égal au produit de la bissectrice de l'angle extérieur supplémentaire par la distance du milieu de BC à la première bissectrice; de même, le produit des distances des points B et C à la bissectrice de l'angle extérieur A est égal au produit de la bissectrice de l'angle intérieur supplémentaire par la distance du milieu de BC à la première bissectrice.

224. La distance d'un point M d'une circonférence à une corde quelconque est la moyenne proportionnelle des distances du même point aux tangentes menées par les extrémités de la corde considérée.

225. Le produit des distances d'un point quelconque d'une circonférence à deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans cette circonférence, est égal au produit des distances du même point aux deux autres côtés.

226. Si des trois sommets d'un triangle et du point de rencontre de ses médianes, on mène des parallèles dans une direction donnée jusqu'à un axe quelconque, la dernière parallèle est la moyenne arithmétique des trois premières.

227. Étant donnés deux triangles et un point, mener par ce point une droite telle, que les sommes respectives des distances des sommets des deux triangles à cette droite soient dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

§ IV. — Relations métriques entre les différentes parties d'un triangle.

228. Si, du milieu d'un des côtés d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendicu'aire sur l'hypoténuse, la différence des carrés des seg-

ments déterminés sur l'hypoténuse est égale au carré de l'autre côté du triangle.

229. Soit l'angle droit AOB placé au centre de la circonférence OA. D'un point quelconque C pris sur l'arc AB, on abaisse sur OA ou sur OB la perpendiculaire CD, qui rencontre en E le rayon, bissectrice de l'angle AOB : démontrer la relation

$$\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{OA}^2.$$

230. Si, d'un point pris dans le plan d'un polygone, on abaisse des perpendiculaires sur tous ses côtés, les deux sommes des carrés des segments ainsi déterminés, pris alternativement, sont égales.

231. Étant donné un cercle O, on décrit un demi-cercle sur l'un de ses rayons OA, et l'on mène à ce rayon une perpendiculaire CDE qui coupe le cercle O en D et le demi-cercle OA en E : démontrer la relation

$$\overline{AD}^2 = 2\overline{AE}^2.$$

232. Dans tout quadrilatère, la somme des carrés des diagonales est le double de la somme des carrés des droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

233. Soit G le point de rencontre des médianes d'un triangle ABC; démontrer la relation

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 3\left(\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2\right).$$

— En déduire le rapport de la somme des carrés des côtés d'un triangle à la somme des carrés de ses médianes.

234. Soient G le point de rencontre des médianes d'un triangle ABC, et M un point quelconque pris dans son plan : démontrer la relation

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 + 3\overline{MG}^2$$

235. Étant donné un triangle ABC, trouver le lieu des points dont la somme des carrés des distances aux trois sommets du triangle est constante et égale à un carré donné k^2.

236. La somme des carrés de deux côtés d'un quadrilatère, plus la somme des carrés des diagonales, est égale à la somme des carrés des deux autres côtés, plus quatre fois le carré de la ligne qui joint les milieux de ces côtés.

237. La somme des carrés des diagonales d'un trapèze est égale à la

somme des carrés des côtés non parallèles, plus deux fois le produit des bases.

238. Si l'on prend deux points à égale distance du centre sur le diamètre d'un cercle, la somme des carrés des distances d'un point de la circonférence à ces deux points est constante.

239. Dans tout triangle ABC, le produit des distances des points B et C à la bissectrice de l'angle intérieur A est égal au carré de la moitié de BC, diminué du carré de la demi-différence des côtés AB et AC; de même, le produit des distances des points B et C à la bissectrice de l'angle extérieur A est égal au carré de la demi-somme des côtés AB et AC, diminué du carré de la moitié de BC.

240. Le sommet A d'un rectangle ABCD est fixe, les sommets B et D se meuvent sur un même cercle; quel est le lieu du sommet C opposé au sommet A?

241. Trouver le lieu des points qui partagent les diverses cordes d'un cercle donné en deux segments (additifs ou soustractifs) dont le produit soit constant.

242. Étant donnés un cercle O et un point P, trouver le lieu des points M tels, que la distance MP soit égale à la tangente menée du point M au cercle O.

243. b et c étant les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, et h la hauteur qui correspond à l'hypoténuse, démontrer la relation

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

244. a, b, c, étant les côtés d'un triangle rectangle en A, et h la hauteur qui correspond à l'hypoténuse a, le triangle qui a pour côtés $b + c$, h et $a + h$, est aussi rectangle.

245. Si un triangle équilatéral a ses sommets respectivement situés sur trois droites parallèles, et si b et c sont les distances de la parallèle intermédiaire aux deux autres, le côté du triangle a pour expression

$$2.\sqrt{\frac{b^2 + bc + c^2}{3}}.$$

246. Dans tout trapèze, la différence des carrés des diagonales est à la différence des carrés des côtés non parallèles comme la somme des côtés parallèles est à leur différence.

247. Calculer les diagonales d'un trapèze, connaissant ses quatre côtés.

248. ABCD est un quadrilatère, E le milieu de la droite qui unit les milieux des diagonales; si du point E comme centre on décrit un cercle, montrer que la somme des carrés des distances d'un point P de ce cercle aux quatre sommets A, B, C, D, est constante et égale à la somme des carrés des distances du centre E aux mêmes sommets, plus quatre fois $\overline{EP}^2$.

249. Une corde PAQ coupe en A le diamètre d'un cercle sous un angle de 45 degrés, démontrer que $\overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2$ est égale à deux fois le carré du rayon.

250. Si deux cordes se coupent dans un cercle, la différence de leurs carrés est égale à la différence des carrés des différences de leurs segments.

251. Si l'on prend un point dans l'intérieur d'un rectangle, les sommes des carrés des distances de ce point à deux sommets opposés sont égales.

252. Si l'on mène une tangente à un cercle, la partie de cette tangente interceptée par les tangentes menées aux extrémités d'un même diamètre est divisée au point de contact en deux segments dont le produit est égal au carré du rayon.

253. Si, autour de deux points A et B d'une circonférence, on fait tourner les côtés d'un angle droit M, et que du point N où le côté BM coupe la circonférence on abaisse la perpendiculaire NP sur le diamètre AA', le rapport $\frac{AM^2}{AP}$ est constant.

254. Si l'on prend respectivement sur les trois côtés BC, CA, AB, d'un triangle ABC, trois points α, β, γ, tels, qu'on ait

$$\left(\overline{B\alpha}^2 - \overline{C\alpha}^2\right) + \left(\overline{C\beta}^2 - \overline{A\beta}^2\right) + \left(\overline{A\gamma}^2 - \overline{B\gamma}^2\right) = 0,$$

les perpendiculaires élevées par ces points sur les côtés du triangle concourent en un même point.

255. Déduire de la proposition précédente :

1° Que les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle se coupent en un même point, qu'il en est de même des trois hauteurs et des perpendiculaires menées aux côtés d'un triangle par les points de contact des trois cercles ex-inscrits,

2° Que si les perpendiculaires menées des sommets d'un triangle ABC sur les côtés d'un triangle A'B'C' se coupent en un même point, réciproquement les perpendiculaires menées des sommets du triangle A'B'C' sur les côtés du triangle ABC sont aussi concourantes.

256. Soit un triangle ABC rectangle en A, et partagé en deux autres triangles rectangles par la perpendiculaire AD abaissée du sommet A sur l'hypoténuse; si l'on désigne par R, r, r', les rayons des cercles inscrits dans les triangles ABC, ABD, ACD, on a

$$R^2 = r^2 + r'^2.$$

257. Dans un triangle quelconque, une perpendiculaire étant menée du sommet sur la base, cette base est à la somme des deux autres côtés comme leur différence est à la différence ou à la somme des segments de la base, suivant que la hauteur considérée tombe en dedans ou en dehors du triangle.

258. Si un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est double de l'autre, la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse la divise en deux segments qui sont dans le rapport de 1 à 4.

259. Deux cercles dont les rayons sont dans le rapport de 2 à 3 se touchent intérieurement, et par le centre du plus petit cercle on mène une droite perpendiculaire à la ligne des centres; démontrer que les tangentes menées au plus petit cercle par les points où cette perpendiculaire rencontre le plus grand sont à angle droit l'une sur l'autre.

260. Deux cercles sont tangents en O; par le point O, on mène à angle droit l'une sur l'autre les sécantes communes POP', QOQ'; A et A' étant les points où la ligne des centres coupe les deux cercles, démontrer la relation

$$\overline{PP'}^2 + \overline{QQ'}^2 = \overline{AA'}^2.$$

261. AOB est un quadrant; si l'on tire la corde Qq parallèle à la corde AB, en la prolongeant jusqu'à ses points de rencontre R et r avec les rayons AO et OB, on a

$$\overline{QR}^2 + \overline{Qr}^2 = \overline{AB}^2.$$

§ V. — Problèmes relatifs aux lignes proportionnelles.

262. Mener par un point donné entre deux droites données une droite telle, que le point donné la partage dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

263. Étant donnés deux points sur une circonférence, déterminer sur cette circonférence un troisième point tel, que le rapport de ses distances aux deux premiers soit égal à un rapport donné $\frac{m}{n}$.

264. Déterminer hors d'un cercle un point tel, que la somme des deux tangentes menées au cercle par ce point soit égale à la sécante entière qui passe par ce point et le centre du cercle.

265. Inscrire dans un triangle un rectangle dont le rapport des côtés soit donné.

266. On donne sur deux parallèles deux points A et B, et un point C extérieur à ces parallèles. Mener par le point C, à ces parallèles, une sécante dont les distances des points d'intersection aux points A et B soient dans un rapport donné.

267. Déterminer le point dont les distances à trois points donnés sont dans des rapports donnés.

268. Étant donnés une circonférence et un point, mener par le point une sécante qui soit divisée par cette circonférence dans un rapport donné.

269. On donne deux cercles qui se coupent : mener par un de leurs points d'intersection une sécante telle, que le produit des deux cordes interceptées soit égal à un carré donné.

270. Déterminer sur la bissectrice de l'angle A d'un triangle ABC le point M pour lequel la différence des angles MBC et MCB est maximum.

271. Inscrire dans un triangle un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné.

272. Décrire un cercle qui coupe en deux parties égales trois circonférences données.

273. Construire un triangle, connaissant sa base, la somme ou la différence des deux autres côtés, et sachant que son troisième sommet est situé sur une droite donnée.

274. Construire un triangle, connaissant un côté, un angle et le rapport des deux autres côtés.

275. Construire un triangle, connaissant deux côtés et la longueur de la bissectrice de l'angle qu'ils comprennent.

276. Dans un cercle donné, inscrire un triangle :

1° Tel que sa base soit parallèle à une droite donnée, ses deux autres côtés passant respectivement par deux points donnés sur cette droite;

2° Tel que sa base soit parallèle à une droite donnée, ses deux autres côtés passant respectivement par deux points donnés d'une manière quelconque;

3° Tel que ses trois côtés passent respectivement par trois points donnés d'une manière quelconque.

277. Construire un triangle, connaissant le produit de deux côtes, la médiane relative au troisième côté et la différence des angles adjacents à ce côté.

278. Construire un triangle, connaissant un angle, la hauteur relative au côté opposé et la somme ou la différence des deux autres côtés.

279. Par deux points donnés, mener à une circonférence donnée deux sécantes qui se coupent sur la circonférence, et dont les deux autres points d'intersection déterminent une corde parallèle à la droite qui joint les deux points donnés.

280. Étant données trois circonférences concentriques, construire un triangle semblable à un triangle donné et qui ait ses sommets respectivement situés sur les trois circonférences données.

281. Construire un carré, connaissant la somme ou la différence de sa diagonale et de son côté.

282. Étant données deux droites qu'on ne peut prolonger, mener par un point donné une droite qui aille passer par le point de concours inconnu des deux premières.

283. Mener par le point d'intersection de deux circonférences une sécante telle, que les cordes interceptées sur elle par les deux circonférences soient dans un rapport donné.

284. On donne deux droites et un point dans leur angle; déterminer sur l'une d'elles un point qui soit à la même distance du point donné et de la seconde droite.

285. Partager, lorsque cela est possible, une droite donnée en deux parties telles, que la somme de leurs carrés soit égale à un carré donné.

286. Diviser une droite donnée en deux parties telles, que la somme de leurs carrés soit minimum.

287. Partager une droite donnée en trois parties telles, que la première et la seconde soient dans le rapport de deux droites données M et N, et la seconde et la troisième dans le rapport de deux autres droites données P et Q.

288. Déterminer le point dont les distances aux trois côtés d'un triangle sont proportionnelles à trois droites données.

289. Mener, par un point pris à l'intérieur d'un angle donné, une droite limitée aux côtés de l'angle et partagée par le point en moyenne et extrême raison.

290. Construire un trapèze, connaissant les deux diagonales et les deux côtés non parallèles.

291. Par un point donné, faire passer une circonférence qui touche deux droites données.

292. Par un point donné, faire passer une circonférence tangente à deux circonférences données.

293. Par un point donné, faire passer une circonférence tangente à une droite et à une circonférence données.

294. Construire une circonférence tangente à deux droites données et à une circonférence donnée.

295. Construire une circonférence tangente à une droite donnée et à deux circonférences données.

§ VI. — Polygones réguliers.

296. En joignant de deux en deux les sommets d'un pentagone régulier *ou* en prolongeant ses côtés de deux en deux, les points d'intersection obtenus forment intérieurement *ou* extérieurement un autre pentagone régulier.

297. Si l'on prolonge deux côtés AB et CD d'un polygone régulier de centre O, séparés par un seul côté BC, jusqu'à leur rencontre en E, le quadrilatère AECO est inscriptible.

298. Prouver qu'on peut exécuter un pavage, soit avec des triangles équilatéraux, soit avec des carrés, soit avec des hexagones réguliers. — On ne peut le faire en employant des pentagones réguliers ou des polygones réguliers de plus de six côtés.

299. On peut exécuter un pavage, soit en assemblant à la fois des carrés et des octogones réguliers de même côté, soit en assemblant des triangles équilatéraux et des dodécagones réguliers de même côté, soit en assemblant des décagones et des pentagones réguliers de même côté.

300. Un polygone équilatéral inscrit dans un cercle est régulier. — Un polygone équilatéral circonscrit à un cercle est régulier, si le nombre de ses côtés est impair.

301. Un polygone équiangle inscrit dans un cercle est régulier, si le nombre de ses côtés est impair. — Un polygone équiangle circonscrit à un cercle est régulier.

302. Si l'on rapporte un polygone régulier à deux axes coordonnés, les coordonnées de son centre sont respectivement les moyennes arithmétiques

des coordonnées de ses différents sommets par rapport aux axes considérés. — Application au triangle équilatéral.

303. Si des sommets d'un triangle équilatéral inscrit, on mène des perpendiculaires sur un diamètre du cercle circonscrit, l'ordonnée qui tombe d'un côté de ce diamètre est égale à la somme des deux ordonnées qui tombent de l'autre côté; de même, l'abscisse qui tombe d'un côté du centre est égale à la somme des deux abscisses qui tombent de l'autre côté.

304. La somme des distances d'un point pris à l'intérieur d'un polygone régulier aux m côtés de ce polygone est égale à m fois l'apothème. — Considérer le cas où le point choisi est extérieur.

305. Si d'un point P du cercle circonscrit à un triangle équilatéral ABC, on mène des droites à ses sommets, la somme $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ est constante. — Si ABCP, A'B'C'P', sont deux cercles concentriques dans lesquels soient inscrits les triangles équilatéraux ABC, A'B'C', on a

$$\overline{AP'}^2 + \overline{BP'}^2 + \overline{CP'}^2 = \overline{A'P}^2 + \overline{B'P}^2 + \overline{C'P}^2.$$

306. AB et AC étant les côtés du pentagone et du décagone régulier inscrits dans un cercle dont le centre est O, on mène la bissectrice de l'angle AOC qui coupe en D le côté AB : démontrer la similitude des triangles ACB et ACD, ainsi que celle des triangles AOB et DOB, et en déduire la relation connue

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{OA}^2.$$

307. Deux diagonales d'un pentagone régulier qui n'aboutissent pas au même sommet se coupent en moyenne et extrême raison.

308. Dans un polygone inscrit d'un nombre de côté pair, la somme des angles de rang impair est toujours égale à la somme des angles de rang pair.

§ VII. — Problèmes sur les polygones réguliers.

309. Sur une droite donnée comme côté, décrire un octogone régulier.

310. Inscrire un carré dans l'espace compris entre deux cercles sécants égaux.

311. Inscrire un triangle équilatéral dans un carré donné, en plaçant l'un de ses sommets soit en l'un des sommets du carré donné, soit au milieu d'un de ses côtés.

312. Sur une droite donnée comme diagonale, décrire un parallélogramme dont les angles soient doubles l'un de l'autre. — Déduire de la solution de ce problème un moyen d'opérer la trisection de l'angle droit.

313. Connaissant le côté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle, calculer le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés deux fois moindre. — Appliquer cette formule à la recherche du côté du pentagone régulier, connaissant le côté du décagone régulier.

314. Sur le diamètre AB d'un cercle O, on construit un triangle équilatéral ABC; on divise AB en n parties égales, et l'on joint le sommet C à l'extrémité D de la seconde division; CD prolongée coupe le cercle en F, et l'on demande de calculer la corde AF. — Examiner les cas particuliers de $n = 3, 4, 6$.

315. Trouver le lieu des points dont la somme des carrés des distances aux sommets d'un polygone régulier est constante et égale à un carré donné.

316. Connaissant l'apothème du décagone régulier, calculer son côté et le rayon du cercle circonscrit.

317. Dans une circonférence O, on trace les deux diamètres perpendiculaires AB et CF; du point D milieu de OC comme centre, avec DA pour rayon, on décrit un arc de cercle jusqu'à sa rencontre au point E avec le diamètre CF : démontrer que OE représente le côté du décagone régulier et AE celui du pentagone régulier inscrit.

318. Calculer les rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle équilatéral, au carré, au pentagone, à l'hexagone, au décagone et au dodécagone, en prenant pour unité le côté du polygone régulier considéré.

319. Calculer l'apothème du pentagone, de l'hexagone, du décagone et du dodécagone régulier, en prenant pour unité le rayon du cercle circonscrit.

320. Connaissant le rapport du périmètre d'un polygone régulier inscrit au périmètre du polygone régulier circonscrit semblable, calculer les périmètres de ces deux polygones en prenant pour unité le diamètre du cercle donné.

321. m étant le rapport des périmètres des polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un même nombre de côtés, et m' le rapport des périmètres des polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double, démontrer la relation

$$m' = \sqrt{\frac{m+1}{2}}.$$

322. Inscrire dans un triangle équilatéral donné trois cercles égaux tangents entre eux, et déterminer leur rayon en fonction du côté du triangle.

323. Inscrire dans un carré donné quatre cercles égaux tangents entre eux, et déterminer leur rayon en fonction du côté du carré.

324. Inscrire dans un cercle donné m cercles égaux tangents entre eux, et déterminer leur rayon en fonction du rayon du cercle donné et de la corde qui sous-tend la $m^{ième}$ partie de sa circonférence.

§ VIII. — Mesure de la circonférence.

325. Dans deux circonférences de rayons différents, le rapport des angles au centre qui interceptent des arcs de même longueur est égal au rapport inverse des rayons.

326. Si deux circonférences sont tangentes intérieurement à une troisième circonférence, et si la somme de leurs rayons est égale à celui de cette troisième circonférence, l'arc compris entre leurs points de contact sur la grande circonférence est égal à la somme des arcs respectivement compris sur les circonférences intérieures entre leur point de rencontre le plus rapproché de la grande circonférence et les mêmes points de contact.

327. Démontrer que π est compris entre 3 et 4, par la considération des périmètres de l'hexagone régulier inscrit et du carré circonscrit.

328. Quelle erreur commet-on en remplaçant la demi-circonférence d'un cercle par la somme des côtés du triangle équilatéral et du carré inscrit dans ce cercle?

329. Soient dans un cercle O le diamètre AB et la corde AC égale au rayon; menons le rayon OD perpendiculaire sur AC, et prolongeons-le jusqu'à son point de rencontre en E avec la tangente en A; portons à partir du point E sur cette tangente, et dans le sens EA, une longueur EF égale à trois fois le rayon OA; puis menons la droite FB. Quelle erreur commet-on en remplaçant par cette droite la demi-circonférence OA?

330. Si l'on décrit deux demi-cercles égaux sur le diamètre d'un demi-cercle donné, si l'on inscrit un cercle dans l'espace compris entre les trois demi-circonférences, le diamètre de ce cercle est à celui des cercles égaux dans le rapport de 2 à 3.

331. Connaissant les longueurs a, b, c, des cordes de trois arcs formant ensemble la demi-circonférence, chercher de quelle équation dépend le diamètre x du cercle considéré.

332. Évaluer le périmètre du polygone régulier de vingt côtés formé par les intersections successives des côtés du décagone régulier étoilé.

333. Démontrer les formules

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \cdots \text{(indéfiniment)};$$

$$\pi = \lim . 2^m \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}}}}$$

Dans la dernière formule, le nombre m, qu'il faut faire croître indéfiniment, est égal au nombre des radicaux placés sous le premier radical.

334. Soient p et p' les *demi-périmètres* de deux polygones réguliers inscrits dans le cercle de rayon 1, le second polygone ayant deux fois plus de côtés que le premier. — Démontrer que l'expression

$$p' + \frac{1}{3}(p' - p)$$

est une valeur de π approchée par défaut, et que l'erreur correspondante est moindre que

$$\frac{2(p'-p)^2}{3(2p+p')}.$$

APPENDICE DU TROISIÈME LIVRE.

335. A, B, C, D, étant quatre points en ligne droite, on a, en grandeur et en signe, la relation

$$AB.CD + AC.DB + AD.BC = 0.$$

336. Si l'on désigne par ρ le premier des six rapports anharmoniques distincts

(ABCD), (ACBD), (ADBC), (ABDC), (ACDB), (ADCB),

auxquels donnent lieu quatre points, A, B, C, D, en ligne droite, les cinq autres ont respectivement pour valeurs

$$1 - \rho, \quad \frac{\rho - 1}{\rho}, \quad \frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{1-\rho}, \quad \frac{\rho}{\rho - 1}.$$

337. Si les points P et P' divisent harmoniquement la droite AB, O étant le milieu de AB, I le milieu de PP', et M un point pris arbitrairement sur AB, on a

$$MP.MP' + MA.MB = 2MI.MO.$$

338. La moyenne proportionnelle de deux droites est aussi la moyenne proportionnelle de leur moyenne arithmétique et de leur moyenne harmonique.

339. Si A, B, C, D et A', B', C', D', sont deux systèmes de quatre points correspondants, situés sur deux droites distinctes L et L' et ayant même rapport anharmonique, les trois droites PB, PC, PD, issues d'un point quelconque P de AA', coupent respectivement les trois droites P'B', P'C', P'D', issues d'un autre point quelconque P' de AA', en trois points β, γ, δ, situés en ligne droite.

340. A, B, C, D et A', B', C', D', étant deux systèmes de quatre points correspondants, situés sur deux droites L et L' qui se coupent en A, si l'on prend dans leur plan deux points quelconques O et O', les droites OB, OC, OD, coupent respectivement les droites correspondantes O'B', O'C', O'D', en trois points β, γ, δ, situés en ligne droite.

341. A, B, C, étant trois points d'une droite L, et A', B', C', trois points correspondants d'une autre droite L', prouver que les trois couples de droites AB' et A'B, AC' et A'C, BC' et B'C, se coupent en trois points λ, μ, ν, situés en ligne droite.

342. Si les trois côtés d'un triangle tournent autour de trois points fixes situés en ligne droite, et si deux sommets glissent sur deux droites fixes, le troisième sommet décrit une ligne droite.

343. Si les côtés d'un polygone tournent autour d'autant de points fixes situés en ligne droite, et si tous les sommets moins un glissent sur des droites fixes, le dernier sommet décrit une ligne droite; et il en est de même du point de rencontre de deux côtés quelconques non contigus.

344. Si les trois sommets d'un triangle glissent sur trois droites fixes qui se coupent en un même point, et si deux de ses côtés tournent autour de deux points fixes, le troisième côté passe par un point fixe en ligne droite avec les deux premiers.

345. Si les sommets d'un polygone glissent sur autant de droites fixes qui concourent en un même point, et si tous les côtés moins un tournent autour d'autant de points fixes arbitraires, le dernier côté passe par un point fixe; et il en est de même d'une diagonale quelconque.

346. Lorsque trois triangles homologiques deux à deux ont le même axe d'homologie, les trois centres d'homologie sont en ligne droite; et lorsque trois triangles homologiques deux à deux ont le même centre d'homologie, les trois axes d'homologie concourent en un même point.

347. Lorsqu'une corde d'un cercle tourne autour d'un point fixe O, la somme des deux quotients qu'on obtient en divisant la distance de chaque extrémité de la corde à une droite donnée L, par la distance de cette corde à la polaire du point O, est constante.

348. Lorsque le sommet d'un angle circonscrit à un cercle décrit une droite L, la somme des deux quotients qu'on obtient en divisant les distances de chaque côté de l'angle à un point fixe et au pôle de L est constante.

349. Les polaires des différents points de l'axe radical de deux cercles se coupent sur cet axe; et réciproquement, si les polaires de chaque point d'une droite par rapport à deux cercles se coupent sur cette droite, elle est l'axe radical des deux cercles.

350. Les pôles de l'axe radical de deux cercles, pris par rapport à ces cercles, divisent harmoniquement la droite qui joint leurs centres de similitude.

351. Si du centre de similitude de deux circonférences on leur mène deux sécantes, les cordes qui joignent dans les deux circonférences les points d'intersection correspondants sont parallèles; et des huit points d'intersection obtenus, quatre quelconques (non situés sur la même sécante) se trouvent sur une même circonférence, pourvu que parmi les quatre points choisis il n'y en ait pas deux homologues.

352. Un cercle O inscrit dans un quadrilatère ABCD, touchant ses côtés aux points E, F, G, H, si l'on joint le point d'intersection K des droites EH et FG au centre O, la droite KO est perpendiculaire sur la diagonale AC.

353. Quand un quadrilatère est circonscrit à deux cercles, chaque diagonale coupe la ligne des centres en un point qui a la même polaire par rapport aux deux cercles.

354. Si l'on divise un quadrilatère en deux autres par une sécante quelconque, les points de rencontre des diagonales des trois quadrilatères sont trois points en ligne droite.

355. Le rapport anharmonique de quatre points d'un cercle est égal au rapport des produits des côtés opposés du quadrilatère inscrit déterminé par ces quatre points.

356. Trois cercles O, O', O'', étant donnés, en décrivant un quatrième cercle quelconque ω et en prenant les axes radicaux du cercle ω et de chacun des cercles donnés, on forme un triangle ABC; en décrivant un autre cercle ω', on obtient d'une manière analogue un second triangle A'B'C': démontrer que les triangles ABC, A'B'C', sont homologiques.

357. Lorsqu'une série de cercles ayant leurs centres sur une droite donnée coupent orthogonalement un cercle donné, leur axe radical commun est la perpendiculaire abaissée du centre du cercle donné sur la droite donnée.

358. Les trois cercles décrits sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet, comme diamètres, ont deux à deux le même axe radical et coupent orthogonalement le cercle circonscrit au triangle formé par les trois diagonales.

359. Lorsque deux triangles sont polaires réciproques par rapport à un cercle situé dans leur plan, ils sont homologiques.

360. Si la base d'un triangle est fixe, la somme ou la différence des deux autres côtés restant constante, la polaire du sommet par rapport à un cercle quelconque, ayant pour centre l'une des extrémités de la base donnée, touche constamment un cercle fixe.

361. ABC étant un triangle donné, et a, b, c, les projections des sommets A, B, C, sur les côtés opposés, les trois couples de droite ab et AB, bc et BC, ca et CA, se coupent en trois points γ, α, β, situés sur l'axe radical des cercles circonscrits aux triangles ABC et abc.

362. Toute tangente commune à deux cercles donnés est divisée harmoniquement par tout cercle dont les axes radicaux avec chacun des cercles donnés se confondent.

363. Dans un cercle donné, inscrire un quadrilatère dont on connaît les trois diagonales.

364. Un triangle étant donné, construire un cercle tel, que chaque sommet du triangle soit, par rapport à ce cercle, le pôle du côté opposé.

365. Décrire un cercle passant par un point donné et coupant orthogonalement deux cercles donnés.

366. Étant donnés trois cercles, en décrire un quatrième tel, que les trois axes radicaux de ce cercle, comparé successivement à chacun des trois premiers, passent par trois points donnés.

367. Étant donnés six points A, B, C, D, E, F, sur une circonférence, marquer sur cette ligne un septième point X tel, que les rapports anharmoniques (XAEC), (XDBF), soient égaux. — Même question en supposant les six points sur une droite donnée.

368. Étant donnés un polygone de n côtés et n points placés arbitrairement, inscrire dans ce polygone un autre polygone dont les n côtés passent respectivement par les n points donnés.

369. Étant donné un triangle coupé par une transversale, si sur chaque côté on prend le conjugué harmonique du point de rencontre de la transversale par rapport aux extrémités de ce côté, les droites qui joignent les trois points ainsi obtenus aux sommets opposés passent par un même

point. — En déduire le théorème du n° 312, relatif aux médianes d'un triangle.

370. Étant donné un triangle coupé par une transversale, si sur deux côtés on prend le conjugué harmonique du point de rencontre de la transversale par rapport aux extrémités du côté considéré, les deux points ainsi obtenus et le point où la transversale coupe le troisième côté sont en ligne droite.

371. Un triangle ABC inscrit dans un cercle O, étant coupé aux points a, b, c, par une transversale, si α, β, γ, représentent les longueurs des tangentes menées des points a, b, c, au cercle O, démontrer la relation

$$\alpha.\beta.\gamma = Ab.Bc.Ca = Ac.Ba.Cb.$$

372. Quatre droites dans un même plan, prises trois à trois, forment quatre triangles, dans chacun desquels existe un point de rencontre des hauteurs; démontrer que ces quatre points sont en ligne droite.

LIVRE IV

LES AIRES.

§ I. — Mesure des aires des polygones.

373. Chercher l'expression de l'aire d'un trapèze, en le considérant comme la différence des deux triangles obtenus en prolongeant jusqu'à leur point de rencontre ses deux côtés non parallèles.

374. Étant données les bases et la hauteur d'un trapèze, calculer les aires des deux triangles dont il est la différence.

375. L'aire d'un trapèze est égale au produit d'un de ses côtés non parallèles par la perpendiculaire abaissée du milieu de l'autre côté sur le premier.

376. Par un point pris sur la bissectrice d'un angle, mener une droite telle, que la partie interceptée par les côtés de l'angle soit minimum ou qu'il en soit de même de l'aire du triangle déterminé.

377. Dans un angle donné, mener une droite minimum qui intercepte un triangle dont l'aire soit équivalente à un carré donné.

378. Si, dans un triangle rectangle, l'un des angles aigus est égal à $\frac{2}{3}$ d'angle droit, l'aire du triangle équilatéral construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des triangles équilatéraux respectivement construits sur les côtés.

379. On donne un triangle ABC ; aux points B et C, et d'un même côté de BC, on mène à cette droite des perpendiculaires BD et CE qu'on prend égales à deux fois la hauteur du triangle ABC. Les points F et G étant les milieux des côtés AB et AC, démontrer que le triangle ABC est équivalent à la somme ou à la différence des triangles BDF, CEG, suivant que ses angles en B et en C sont ou non tous les deux aigus.

380. Les deux triangles opposés, qu'on forme en joignant un point quelconque pris dans l'intérieur d'un parallélogramme à ses quatre sommets, équivalent ensemble à la moitié du parallélogramme.

381. On donne un rectangle ABCD; on prend un point quelconque E sur BC, un point quelconque F sur CD. Démontrer que le rectangle ABCD équivaut au double du triangle AEF, augmenté du rectangle ayant pour dimensions les segments BE et DF.

382. Tout rectangle est moitié du rectangle qui a pour dimensions les diagonales des carrés construits sur ses côtés adjacents.

383. Si, par le milieu E de la diagonale BD d'un quadrilatère ABCD, on mène la parallèle FEG à la seconde diagonale AC, démontrer que la droite AG divise le quadrilatère en deux parties équivalentes.

384. ABCD étant un rectangle, on inscrit dans le triangle ABC un cercle qui touche AB en E et BC en F; on mène ensuite EH parallèle à AD et FK parallèle à CD. Démontrer que le rectangle KH est la moitié du rectangle ABCD.

385. Dans un quadrilatère, les perpendiculaires abaissées sur une diagonale des sommets opposés sont égales : on demande de le diviser en quatre triangles équivalents par des droites menées d'un point intérieur aux quatre sommets.

386. Si, des sommets d'un triangle jusqu'aux côtés opposés ou à leurs prolongements, on mène trois droites égales à une longueur donnée et si, d'un point intérieur, des parallèles sont menées à ces droites jusqu'aux mêmes côtés, la somme de ces parallèles est égale à la longueur donnée.

387. Si les diagonales d'un quadrilatère inscrit se coupent à angle droit, la somme des produits des côtés opposés représente une aire double de celle du quadrilatère donné.

388. P étant un point quelconque pris dans le plan d'un parallélogramme ABCD, démontrer que le triangle PBD est équivalent à la somme des triangles PAB, PBC.

389. ABCD étant un quadrilatère inscrit, démontrer par les propriétés des aires la relation connue

$$\frac{AC}{BD} = \frac{BA.AD + BC.CD}{AB.BC + AD.DC}.$$

390. D'un point O pris dans l'intérieur d'un triangle ABC, on mène jusqu'aux côtés BC, AC, AB, les droites Oa, Ob, Oc; puis, par les sommets A, B, C, jusqu'aux mêmes côtés, les parallèles Aa', Bb', Cc', aux premières droites; démontrer la relation

$$\frac{Oa}{Aa'} + \frac{Ob}{Bb'} + \frac{Oc}{Cc'} = 1.$$

391. Démontrer par les propriétés des aires que, si l'on mène la parallèle cb à la base BC d'un triangle ABC, les droites Bb, Cc, se croisent sur la médiane qui correspond au sommet A.

392. Si l'on inscrit un cercle dans un triangle rectangle, ce triangle est équivalent au rectangle qui a pour dimensions les segments déterminés sur l'hypoténuse par le point de contact du cercle inscrit.

393. Démontrer que l'aire d'un triangle en fonction de ses médianes α, β, γ, est exprimée par la formule

$$S = \frac{1}{3}\sqrt{2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4}.$$

394. La droite qui contient les trois projections d'un point A d'une circonférence O sur les côtés d'un triangle équilatéral inscrit passe par le milieu du rayon OA.

395. Dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle, la droite qui joint les milieux des diagonales passe par le centre du cercle.

396. Étant données les trois hauteurs h, h', h'', d'un triangle, trouver ses trois côtés et sa surface.

397. L'aire d'un triangle est égale au rayon du cercle circonscrit, multiplié par le demi-périmètre du triangle formé en joignant les pieds des hauteurs.

398. Deux triangles ont un sommet commun : quel est le lieu décrit par ce sommet lorsque, les deux bases restant fixes, la somme ou la différence des aires des deux triangles demeure constante? — Discussion. — Déduire du résultat obtenu que les milieux des trois diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.

399. Les côtés consécutifs d'un quadrilatère quelconque étant représentés par a, b, c, d, et ses diagonales par m et n, l'aire de ce quadrilatère est exprimée par la formule

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(2mn + a^2 - b^2 + c^2 - d^2)(2mn - a^2 + b^2 - c^2 + d^2)}.$$

Si le quadrilatère est inscriptible et si p désigne son demi-périmètre, cette formule devient

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Si le quadrilatère est un trapèze ayant a et c pour bases, on a

$$S = \frac{1}{4}\cdot\frac{a+c}{a-c}\sqrt{(b+d+a-c)(b+d+c-a)(a-c+b-d)(a-c+d-b)}.$$

400. Trouver l'aire d'un quadrilatère quelconque en fonction des deux diagonales et des deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

401. Démontrer que l'aire d'un quadrilatère, à la fois inscriptible et circonscriptible, est égale à la racine carrée du produit de ses quatre côtés.

§ II. — Comparaison des aires.

402. On donne un triangle rectangle sur les côtés duquel on construit trois carrés; on joint les sommets consécutifs de ces carrés, et l'on demande l'expression de l'aire de la figure totale ainsi formée.

403. Un triangle étant donné, partager sa surface en moyenne et extrême raison par une parallèle à sa base.

404. Sur les côtés AB, AC, d'un triangle ABC, on construit des parallélogrammes quelconques ABDE, ACFG, dont on prolonge les côtés DE et FG jusqu'à leur rencontre au point H; démontrer que la somme des aires de ces deux parallélogrammes équivaut à l'aire du parallélogramme qui a pour côtés adjacents BC et une droite égale et parallèle à AH. — Déduire de ce théorème celui du carré de l'hypoténuse.

405. On donne un quadrant AOB et un point P quelconque sur l'arc AB; par ce point P, on mène à cet arc la tangente STP : S est son point d'intersection avec le rayon OA, T avec le rayon OB. On mène PM perpendiculaire sur OA, et l'on demande de prouver que le triangle AOB est la moyenne proportionnelle des triangles SOT et OMP.

406. Sur les côtés AB, AC, d'un triangle ABC, on marque deux points M et N, et sur la droite MN un point P, tels qu'on ait

$$\frac{BM}{AM} = \frac{AN}{CN} = \frac{PM}{PN};$$

démontrer que le triangle BPC équivaut au double du triangle AMN.

407. Soit un triangle quelconque ABC; on mène BD perpendiculaire et égale à AB, CE perpendiculaire et égale à AC, et l'on tire DE. Démontrer que la somme des carrés construits sur BC et sur DE équivaut à deux fois la somme des carrés construits sur les côtés AB et AC.

408. Par le milieu de chacune des deux diagonales d'un quadrilatère, on mène une parallèle à l'autre, et l'on joint le point d'intersection de ces deux parallèles aux milieux des quatre côtés; démontrer que le quadrilatère est ainsi partagé en quatre parties équivalentes.

409. Deux polygones d'un nombre pair de côtés sont équivalents, lorsque leurs côtés ont les mêmes points milieux.

410. L'aire d'un polygone d'un nombre pair de côtés ne varie pas, lorsque tous les sommets de rangs pairs ou tous les sommets de rangs impairs décrivent des droites égales, parallèles et de même sens.

411. Si deux polygones semblables et intérieurs l'un à l'autre ont leurs côtés homologues parallèles, tout polygone à la fois inscrit dans l'un et circonscrit à l'autre a une aire moyenne proportionnelle entre les aires de ces deux polygones.

412. Démontrer que la surface du triangle formé avec les médianes d'un triangle donné est les trois quarts de la surface de ce triangle. — En déduire : 1° qu'entre tous les triangles qui ont la somme de leurs médianes constante, le triangle équilatéral est maximum; 2° que de tous les triangles équivalents, le triangle équilatéral est celui dans lequel la somme des médianes est minimum.

§ III. — Aires du polygone régulier et du cercle.

413. Trouver en fonction du rayon du cercle circonscrit l'aire du dodécagone régulier.

414. L'aire de l'octogone régulier inscrit dans un cercle équivaut à celle du rectangle qui a pour côtés adjacents les côtés des carrés inscrit et circonscrit.

415. L'aire de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle est les trois quarts de celle de l'hexagone régulier circonscrit.

416. L'aire de l'hexagone régulier inscrit est la moyenne proportionnelle de celles des triangles équilatéraux inscrit et circonscrit.

417. Étant donné un polygone régulier, on mène les diagonales qui sous-tendent successivement deux côtés; ces diagonales déterminent par leurs intersections un autre polygone dont on demande la nature, et l'aire en fonction de celle du premier polygone.

418. On prend les points B et D à égale distance des extrémités de l'arc d'un quadrant AOC, et l'on mène sur OC les perpendiculaires BG et DH; démontrer que la figure mixtiligne BGHD est équivalente au secteur OBD.

419. Si l'on prend un point C sur le diamètre AB d'un cercle, l'aire comprise entre ce cercle et les cercles décrits sur les segments AC et CB comme diamètres équivaut au cercle qui a pour diamètre la moyenne proportionnelle des segments AC et CB.

420. Dans des cercles différents, les secteurs dont les angles sont en raison inverse des carrés des rayons sont équivalents.

421. La différence de deux secteurs semblables a pour mesure de son aire le produit de la différence des rayons par l'arc concentrique mené à égale distance des arcs considérés.

422. Si des demi-cercles sont décrits sur les trois côtés d'un triangle rectangle comme diamètres, et si l'on tourne vers l'intérieur du triangle ceux décrits sur les côtés de l'angle droit, la somme des segments extérieurs correspondant aux côtés de l'angle droit, moins la somme des segments déterminés par l'hypoténuse, équivaut à l'aire commune aux demi-cercles décrits sur les côtés.

423. Des demi-cercles OEDA, OFDB, étant décrits sur les rayons OA, OB, d'un quadrant OACB, démontrer : 1° que les trois points A, B, D, sont en ligne droite; 2° que les aires ACBD, OEDF, sont équivalentes; 3° que les aires OFDA, OEDB, équivalent chacune au quart du carré construit sur le rayon OA.

424. Si AB et CD sont deux diamètres perpendiculaires d'un cercle O, et si, du point D comme centre avec DA pour rayon, on décrit un arc de cercle AEB, démontrer que l'aire de la *lune* AEB équivaut à celle du triangle DAB.

425. Dans un triangle rectangle ABC, AD étant la perpendiculaire abaissée du sommet sur l'hypoténuse, démontrer que les cercles inscrits dans les triangles ABD, ACD, sont proportionnels à ces triangles.

426. On donne deux droites qui se coupent en A, et l'on décrit une série de cercles tous tangents à ces deux droites et successivement tangents entre eux; OA étant la distance du centre du cercle le plus éloigné au point A, et OB son rayon, la somme des aires de tous les cercles est à l'aire du plus éloigné dans un rapport exprimé par $\frac{(OA + OB)^2}{4OA.OB}$.

427. Si le diamètre d'un cercle est divisé en n parties égales aux points P_1, P_2,..., et si l'on décrit des demi-cercles au-dessus de AB sur les diamètres AP_1, AP_2,..., et au-dessous de AB sur les diamètres BP_1, BP_2,..., le contour de chaque figure telle que $AP_{m-1}BP_m$ est égal à la circonférence du cercle donné, et l'aire de la même figure à la $n^{ième}$ partie de celle du cercle donné.

428. A étant l'aire d'un polygone régulier inscrit et B l'aire du polygone circonscrit semblable, démontrer que la différence $B - A$ équivaut à l'aire du polygone régulier semblable inscrit dans la circonférence qui a pour diamètre le côté du polygone B, ou encore à l'aire du polygone régulier semblable circonscrit à la circonférence qui a pour diamètre le côté du polygone A.

429. CBD étant un triangle rectangle en B dans lequel BD est le double de BC, on prolonge BD d'une longueur $Da = \frac{BC}{4}$, puis encore d'une longueur $ab = \frac{2BC}{5}$; on mène les droites Ca, Cb, et l'on prolonge BC de telle sorte que $BA = Ca$; enfin, par A, on mène à la droite Cb une parallèle qui coupe en E le prolongement de BD. Démontrer que la longueur BE diffère très-peu de la demi-circonférence dont BC est le rayon, et que le triangle BCE diffère très-peu du cercle correspondant; évaluer les deux différences.

430. A et B désignant les surfaces de deux polygones réguliers semblables inscrit et circonscrit à un cercle, et A′ et B′ celles des deux polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double, démontrer les formules

$$\frac{1}{A'} = \sqrt{\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{B}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{B'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{A'}\right);$$

prouver en outre que $B' - A'$ est $< \frac{B - A}{4}$. — Déduire des formules obtenues une nouvelle démonstration du théorème de Schwab (300).

431. r et a désignant le rayon et l'apothème d'un polygone régulier, r' et a' le rayon et l'apothème du polygone régulier de même aire et d'un nombre de côtés double, démontrer les formules

$$r' = \sqrt{r.a}, \quad a' = \sqrt{a \cdot \frac{r + a}{2}}.$$

— Déduire de ces formules, en partant du carré dont l'aire est égale à 2, un théorème analogue à celui de Schwab, c'est-à-dire le moyen d'obtenir une série de nombres tendant vers $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

§ IV. — Problèmes sur les aires.

432. Partager un triangle en parties proportionnelles à des droites données par des parallèles à sa base.

433 Partager un trapèze en parties proportionnelles à des droites données par des parallèles aux bases.

434. Partager un polygone en parties proportionnelles à des nombres donnés par une série de droites parallèles à une droite donnée.

435. Partager un triangle en trois triangles équivalents par trois droites menées d'un même point intérieur à ses trois sommets.

436. Par un point pris dans le plan d'un angle donné, mener une droite telle, que le triangle qu'elle détermine par sa rencontre avec les côtés de l'angle soit équivalent à un carré donné.

437. Partager un quadrilatère quelconque en deux parties qui soient dans le rapport de deux droites données, par une parallèle ou une perpendiculaire à l'un de ses côtés.

438. Étant donnés trois points A, B, C, en trouver un quatrième O tel, que les surfaces AOC, AOB, BOC, présentent des rapports donnés.

439. Par un point pris sur l'un des côtés d'un polygone, mener une série de droites qui partagent sa surface en un nombre donné de parties équivalentes.

440. Inscrire dans un triangle donné un parallélogramme ayant une aire donnée. — Discussion.

441. Partager un polygone en n parties équivalentes par une série de droites issues d'un point intérieur.

442. Inscrire dans un cercle donné un trapèze, connaissant son aire et la longueur commune des deux côtés non parallèles.

443. Inscrire dans un cercle donné un rectangle de surface donnée.

444. Construire un triangle, connaissant ses angles et sa surface.

445. Après avoir inscrit un carré dans un carré donné, on en inscrit un troisième dans le second obtenu, et ainsi de suite indéfiniment, en adoptant toujours la même loi d'inscription.

On demande : 1° la limite vers laquelle tend la somme des carrés inscrits; 2° combien il faut construire de carrés inscrits pour que leur somme soit équivalente à une surface donnée.

446. Étant donné un triangle, on en forme un second en joignant les milieux de ses trois côtés, un troisième en joignant les milieux des trois côtés du second, et ainsi de suite indéfiniment. On demande la limite de la somme de tous les triangles inscrits de cette manière.

447. Construire un triangle équivalent à un triangle donné et tel, que ses sommets soient respectivement situés sur trois droites données.

448. Partager un trapèze en parties proportionnelles à des droites données, par des sécantes coupant les deux bases.

449. Partager un cercle en parties proportionnelles à des nombres donnés, par des rayons.

450. Partager un cercle en parties proportionnelles à des nombres donnés, par des circonférences concentriques.

451. Partager un triangle en deux parties proportionnelles à des droites données, par une perpendiculaire à l'un des côtés.

452. Partager un triangle en deux parties proportionnelles à des droites données, par une sécante minimum.

453. Partager un triangle quelconque en quatre parties équivalentes, par deux droites perpendiculaires entre elles.

454. Étant donné un cercle, trouver quatre autres cercles dont les rayons soient proportionnels à des droites données et dont la somme des aires soit équivalente au cercle donné.

455. On donne trois droites en grandeur et en position; trouver un point tel, qu'en le prenant pour sommet commun de trois triangles ayant ces droites pour bases respectives, ces trois triangles soient équivalents.

456. Inscrire dans un carré un rectangle d'aire donnée.

457. Trouver sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle un point tel, que le carré construit sur la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'un des côtés de l'angle droit, soit équivalent au rectangle qui a pour dimensions les deux segments correspondants de l'hypoténuse.

458. Décrire quatre circonférences qui soient en proportion, dont la plus grande soit égale à la somme des trois autres, et telles, que leur somme et la somme des cercles correspondants soient respectivement égales à une circonférence et à un cercle donnés.

459. Trouver sur la diagonale prolongée d'un carré donné un point tel, que si l'on mène de ce point une parallèle à l'un des côtés du carré jusqu'à la rencontre du côté adjacent prolongé, on forme ainsi, avec la diagonale prolongée elle-même, un triangle équivalent au carré donné.

460. Construire un triangle isocèle équivalent à un triangle donné.

461. D'un point donné sur l'un des côtés égaux d'un triangle isocèle, mener une droite jusqu'à la rencontre de l'autre côté prolongé, de manière à déterminer un triangle équivalent au triangle donné.

462. On donne un triangle ABC et un point D sur AB; construire un triangle équivalent au triangle ABC, qui ait l'un de ses sommets en D et l'angle A commun avec le triangle ABC.

463. Construire un triangle, connaissant son aire, un de ses angles et la médiane qui correspond à l'un des deux autres angles.

464. Transformer un triangle quelconque en un triangle isocèle qui ait même angle au sommet.

465. Construire un parallélogramme équivalent à un carré donné et qui ait un angle donné. — Cas du losange.

APPENDICE DU QUATRIÈME LIVRE.

466. De tous les triangles qui ont même angle au sommet et même somme des côtés de cet angle, le triangle isocèle est maximum et sa base est minimum.

467. De tous les triangles satisfaisant aux conditions de l'énoncé précédent, le triangle minimum est celui dans lequel la différence des côtés de l'angle donné est maximum, et sa base est maximum. — Réciproque.

468. De tous les triangles équivalents qui ont même angle au sommet, c'est le triangle isocèle qui a le périmètre minimum.

469. De tous les triangles qui ont pour angle au sommet un angle donné et dont la base est astreinte à passer par un point donné, le triangle minimum est celui dont le point donné est le milieu de la base.

470. De tous les triangles ayant même base et même hauteur, le triangle isocèle a le plus grand angle au sommet.

471. De tous les triangles qui ont même angle au sommet et même périmètre, le triangle isocèle a l'aire maximum et la base minimum. — Il en est de même de tous les triangles qui ont même angle au sommet et même différence entre la somme des côtés de cet angle et la base.

472. De tous les triangles qui ont même angle au sommet et des bases égales, le triangle isocèle a l'aire maximum et le périmètre maximum.

473. De tous les triangles qui ont même angle au sommet et même hauteur, le triangle isocèle est minimum.

474. Étant donnés dans un quadrilatère un angle et les deux côtés opposés à cet angle, l'aire du quadrilatère est maximum lorsque le sommet de l'angle donné est à égale distance des trois autres sommets.

475. De tous les triangles dont deux côtés ont des grandeurs données, le triangle maximum est celui dans lequel les trois sommets sont à égale distance du milieu du troisième côté.

476. L'aire d'un quadrilatère, dans lequel on donne un angle et la

somme des deux côtés opposés, est maximum lorsque ces deux côtés sont égaux.

477. Étant donnés un angle d'un polygone et les côtés non adjacents à cet angle, l'aire du polygone est maximum lorsque le sommet de l'angle donné est également distant de tous les autres sommets.

478. Étant donnés tous les côtés d'un polygone à l'exception d'un seul, son aire est maximum lorsque tous ses sommets sont à égale distance du milieu de ce dernier côté.

479. De tous les polygones d'un même nombre de côtés, circonscrits à un même cercle, le polygone régulier a l'aire minimum et le périmètre minimum; et, de tous les polygones réguliers circonscrits à un même cercle, celui qui a le plus grand nombre de côtés a l'aire minimum et le périmètre minimum.

480. Étant donnés n points situés comme on voudra dans un plan, décrire le plus petit cercle qui les contienne tous.

481. Les bases de deux triangles et la somme des quatre autres côtés étant données, trouver les conditions du maximum de la somme des aires de ces deux triangles.

QUESTIONS DIVERSES

DE GÉOMÉTRIE PLANE.

482. Étant donnés les milieux des côtés d'un polygone convexe d'un nombre impair de côtés, déterminer ses sommets en employant seulement le compas.

483. Construire un triangle rectangle tel, qu'un de ses côtés soit la moyenne proportionnelle de l'hypoténuse et de l'autre côté.

484. Construire un triangle égal à un triangle donné et dont les trois côtés passent respectivement par trois points donnés.

485. On donne un demi-cercle de diamètre AB; soit C un point quelconque de ce diamètre. On décrit deux autres demi-cercles sur AC et CB comme diamètres, et l'on mène à AB une perpendiculaire par le point C. Démontrer que les deux cercles inscrits de part et d'autre de cette perpendiculaire sont égaux entre eux.

486. Si deux cercles de rayons égaux se coupent en A et en B et si, par le point A, on mène la droite AEC qui rencontre respectivement les deux cercles en E et en C, le triangle EBC est équivalent à l'aire comprise entre les deux arcs BE et BC et le côté EC.

487. Trouver, sur la droite qui joint les centres de deux triangles équilatéraux donnés, un point tel, que les sommes respectives des carrés de ses distances aux côtés des deux triangles soient dans un rapport donné.

488. Inscrire dans un cercle donné un triangle isocèle dont la somme de la base et de la hauteur soit égale à une droite donnée.

489. Étant donnés une circonférence et un triangle, trouver sur la circonférence un point tel, que la somme des carrés de ses distances aux trois sommets du triangle soit égale à un carré donné.

490. Étant donnés un cercle et une tangente à ce cercle, trouver sur sa circonférence un point dont la somme des distances à la tangente et à son point de contact soit égale à une droite donnée.

491. On partage une droite donnée en moyenne et extrême raison, puis le plus grand segment trouvé en moyenne et extrême raison, et ainsi de suite indéfiniment. Vers quelle limite tend la somme des plus grands segments ainsi obtenus?

492. Étant données la hauteur d'un triangle et les différences de chacun des segments qu'elle détermine sur la base avec le côté adjacent, construire le triangle.

493. Si, du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle, on mène des droites aux sommets opposés du carré construit sur l'hypoténuse, la différence des carrés de ces droites est égale à la différence des carrés des côtés du triangle.

494. Étant donnés sur une droite trois segments $AB = a$, $BC = b$, $DC = c$, déterminer le point P d'où ces trois segments sont vus sous le même angle; discussion. — Application aux valeurs $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

495. Soient six points pris dans un plan, les trois premiers A, C, E, sur une même droite, les trois autres, B, D, F, sur une autre droite. Démontrer que les trois intersections de AB et de DE, de BC et de EF, de CD et de AF sont en ligne droite.

496. Un cercle et un quadrilatère inscrit étant donnés, démontrer que, si l'on *complète* le quadrilatère :

1° Le carré de la troisième diagonale est égal à la somme des carrés des tangentes issues de ses extrémités; 2° Cette diagonale est égale à la somme des deux tangentes issues de son milieu; 3° Le cercle décrit sur cette diagonale comme diamètre coupe orthogonalement le cercle donné.

497. Dans un triangle ABC, on mène la bissectrice AK de l'angle au sommet et la hauteur AF correspondante; des extrémités B et C de la base, on abaisse sur la bissectrice AK les perpendiculaires BD et CE; démontrer que le cercle déterminé par les trois points F, D, E, passe par le milieu G de la base BC, et que l'aire du triangle équivaut au rectangle BD.AE ou CE.AD.

498. La courbe plane dont toutes les normales concourent en un même point, est une circonférence.

499. Démontrer que D étant un point quelconque de la base BC d'un triangle ABC, et AD la droite qui le joint au sommet du triangle, on a

$$\overline{AB}^2 . CD + \overline{AC}^2 . BD = \overline{AD}^2 . BC + BC . BD . CD.$$

500. On donne un point C quelconque sur une droite AB; trouver sur CB et sur CB prolongée les points D et D' tels, que CD soit la moyenne

proportionnelle de AD et de BD, et CD′ la moyenne proportionnelle de AD′ et de BD′.

501. AB est divisée au point C en moyenne et extrême raison; sur le plus grand segment CA prolongé, on prend AD = CA, et sur CA on prend AE = BC; démontrer que les droites BD et BE sont aussi divisées en moyenne et extrême raison aux points A et C.

502. AB, AC, DE, DF, étant quatre droites qui, par leurs intersections trois à trois, forment quatre triangles, démontrer que les cercles circonscrits à ces triangles passent par un même point.

503. Si l'on prolonge la base d'un triangle de part et d'autre, de manière que chaque prolongement soit égal au côté adjacent, et si l'on fait passer un cercle par les extrémités obtenues et le sommet du triangle, la droite qui joindra ce sommet au centre du cercle sera la bissectrice de l'angle au sommet.

504. Trouver le lieu des points dont les puissances par rapport à deux cercles donnés sont égales et de signes contraires.

505. Si l'on partage un losange en losanges égaux par deux séries de parallèles aux côtés, la somme des cercles inscrits dans les losanges partiels équivaut au cercle inscrit dans le losange total.

506. Les côtés d'un triangle étant en progression arithmétique, a et a' étant le plus petit et le plus grand côté, R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle, on a

$$6\mathrm{R}r = aa'.$$

507. Construire un triangle rectangle, connaissant la somme des deux côtés de l'angle droit et la somme formée par l'un d'eux et l'hypoténuse.

508. Du sommet A de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC, on abaisse Ap perpendiculaire sur l'hypoténuse BC, pq perpendiculaire sur AB, qr perpendiculaire sur BC, rs perpendiculaire sur AB, et ainsi de suite indéfiniment; démontrer que le rapport de la somme de ces perpendiculaires à AB est égal au rapport de AB + BC à AC.

509. On a dans un cercle une corde CD parallèle à une droite de longueur donnée AB; la droite AC coupant le cercle une seconde fois en E, et la droite BE une seconde fois en F, démontrer que la droite DF coupe AB en un point fixe, quand la corde CD se déplace parallèlement à elle-même.

510. Dans un triangle inscrit ABC, on mène par le sommet A jusqu'à

la base BC des parallèles AD et AE aux tangentes en C et en B; démontrer la relation

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

511. Le côté d'un polygone est divisé en n parties; sur chacune de ces parties, on construit par rapport au polygone donné un polygone semblable et semblablement placé; démontrer que la somme des périmètre de tous ces polygones est égale au périmètre du polygone donné, et que la somme de leurs aires (si le côté du polygone donné a été divisé en n parties égales) est égale à la $n^{ième}$ partie de ce polygone.

512. Si l'on désigne par a, b, c, les trois côtés d'un triangle ABC, et si Aa', Bb', Cc', sont les bissectrices de ses angles, on a la relation

$$Ab'.Ca'\ Bc' = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

513. Si Aa, Bb, Cc, sont les droites menées des sommets d'un triangle aux points de contact des côtés opposés avec le cercle inscrit, on a

$$Ab.Ca.Bc = Ac.Ba.Cb.$$

514. Si l'on prolonge le côté AB d'un triangle ABC jusqu'en D, et si l'on prend CF = BD sur le côté CA, la base BC divise la droite DF dans le rapport des côtés AC et AB; de même, la droite DF divise BC dans le rapport des segments AF et AD.

515. Soient deux cercles extérieurs l'un à l'autre dont les deux tangentes communes intérieures, qui correspondent aux rayons AC et BD, se rencontrent en O et coupent aux points K et H l'une des tangentes communes extérieures; démontrer la relation

$$OC.OD + AC.BD = OK.OH.$$

516. ABCD étant un quadrilatère quelconque et T le point de concours des perpendiculaires menées par les extrémités du côté AB aux côtés adjacents AD et BC, démontrer que la perpendiculaire menée par le point T sur la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère, divise le côté AB en deux segments proportionnels aux projections des côtés BC et AD sur AB.

517. La somme algébrique des perpendiculaires abaissées des sommets d'un polygone régulier sur une droite menée par son centre, est nulle quelle que soit la direction de cette droite.

518. Étant donnés un triangle ABC et des droites Aa, Bb, Cc, qui allant des sommets aux côtés opposés se rencontrent en un même point, on fait passer un cercle par les trois points a, b, c, lequel coupe les mêmes côtés du triangle en trois autres points a', b', c'; démontrer que les droites Aa', Bb', Cc', se rencontrent aussi en un même point.

519. D'un point pris dans l'intérieur d'un triangle ABC, on mène des sommets aux côtés opposés les droites AH, BE, CF, puis on joint deux à deux les points H, E, F; démontrer que les droites AH, BE, CF, sont alors divisées harmoniquement. — Inversement, si une droite AH est divisée harmoniquement en G et D, et si F est un point d'une autre droite AB, les intersections E et C des droites FG et BD, FD et BH, sont en ligne droite avec le point A.

520. Par le sommet A d'un triangle ABC, mener une droite telle, que les perpendiculaires BB', CC', abaissées sur elle des extrémités de la base, forment des triangles rectangles ABB', ACC', équivalents.

521. L'aire d'un quadrilatère quelconque ABCD est égale à l'aire du triangle ayant pour base l'un des côtés AB et pour sommet le point de concours des deux diagonales, plus trois fois le triangle ayant pour base le côté CD et pour sommet le point de concours des deux droites qui joignent les centres de gravité des triangles ABC et CDA et des triangles BCD et DAB.

522. Inscrire un carré dans un parallélogramme. — Discussion.

523. Étant donné un quadrilatère ABCD, si l'on prend à volonté un point M sur AB et un point N sur CD, et que l'on mène les droites AN et DM qui se coupent en P, puis les droites CM et BN qui se coupent en Q, la droite PQ passe par un point fixe.

524. Décrire un cercle tangent à deux cercles donnés et qui passe par un point donné de leur axe radical.

525. Étant donnés deux points A et B et deux circonférences passant, l'une par A, l'autre par B, trouver sur l'axe radical de ces circonférences un point C tel, que la droite qui unit les secondes extrémités des cordes déterminées par les sécantes CA et CB soit perpendiculaire à cet axe radical.

526. Un triangle PQR étant circonscrit à un cercle O, on forme un second triangle ABC ayant pour sommets les milieux des côtés du premier; des points A, B, C, on mène au cercle O des tangentes qui rencontrent en a, b, c, les côtés opposés du triangle ABC; démontrer que les points a, b, c, sont en ligne droite.

527. Deux triangles circonscrits à un cercle donné de rayon R et ayant leurs côtés parallèles deux à deux, déterminent en s'entrecoupant six triangles partiels; démontrer que le produit des surfaces de ces six triangles et des deux triangles donnés est égal à la seizième puissance du rayon R.

528. Les droites, qui joignent les milieux des diagonales de tous les quadrilatères formés en prenant quatre côtés consécutifs d'un pentagone, concourent en un même point.

529. Inscrire dans un cercle un polygone régulier de 17 côtés; montrer que le côté de ce polygone est sensiblement égal à la moitié de l'excès du côté du triangle équilatéral inscrit sur le côté de l'hexagone régulier inscrit, et trouver une limite de l'erreur que comporte cette valeur approchée.

530. Étant donnés deux triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$, tels que les côtés $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, du second passent respectivement par les sommets C, A, B, du premier, on demande d'évaluer l'aire du triangle $\alpha\beta\gamma$ en fonction de l'aire du triangle ABC et des rapports des segments que les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$ déterminent sur ceux du triangle ABC. — Déduire, de la formule obtenue, le théorème de Céva (311).

NOTES.

NOTES.

NOTE I.

MESURE DES GRANDEURS.

La mesure de l'étendue étant l'un des objets principaux de la Géométrie, nous avons cru, pour éviter les répétitions et pour fixer les idées, devoir réunir les questions relatives à la mesure et à la proportionnalité des grandeurs, en les traitant d'une manière succincte, mais méthodique. Tel est l'objet de cette Note; les commençants pourront omettre les parties marquées d'un astérisque.

Mesure d'une grandeur commensurable avec l'unité.

1. On acquiert la notion du nombre entier en considérant des objets distincts et semblables. Nous allons expliquer comment le problème de la mesure des grandeurs conduit à étendre cette première idée.

On ne considère, en Mathématiques, que les grandeurs dont on peut définir d'une manière précise *l'égalité et l'addition;* tels sont, par exemple, les angles : nous avons dit en effet ce qu'on entend par angles égaux et par somme de deux angles. Une grandeur est *plus grande* qu'une autre quand elle est la somme de cette autre et d'une troisième de même nature.

Lorsqu'une grandeur est la somme de 2, 3, 4, ... parties, égales à une autre grandeur de même espèce, on dit que la première est un multiple de la seconde, et que la seconde est une *partie aliquote* de la première.

Deux grandeurs sont dites *commensurables* entre elles lorsqu'elles sont des multiples d'une troisième grandeur qu'on appelle alors leur *commune mesure;* dans le cas contraire, elles sont *incommensurables* entre elles.

Pour *mesurer* une grandeur, on cherche une commune mesure entre cette grandeur et une autre de même espèce, arbitraire, mais bien connue, et qui reçoit le nom d'*unité*.

Si cette commune mesure est l'unité elle-même, et que la grandeur proposée la contienne, par exemple, 3 fois sans reste, on dit que la grandeur est mesurée par le *nombre entier* 3.

Si cette commune mesure est une partie aliquote de l'unité, par exemple, si, l'unité étant partagée en cinq parties égales, la grandeur proposée est la somme de trois de ces parties, on dit que cette grandeur

est les trois-cinquièmes de l'unité et qu'elle est mesurée par le nombre *trois-cinquièmes*, que l'on écrit $\frac{3}{5}$. On qualifie d'ailleurs un tel nombre de *fractionnaire* pour le distinguer des nombres entiers seuls considérés jusque-là.

En résumé, *mesurer une grandeur commensurable avec l'unité, c'est chercher combien cette grandeur renferme d'unités ou de parties aliquotes de l'unité.* Suivant que la grandeur est un multiple de l'unité ou un multiple d'une partie aliquote de l'unité, *le nombre qui exprime sa mesure est entier ou fractionnaire.* Réciproquement, toute grandeur mesurée par un nombre entier ou fractionnaire est commensurable avec l'unité, car elle est un multiple de l'unité ou d'une partie aliquote de l'unité.

Deux nombres entiers ou fractionnaires sont égaux s'ils expriment les mesures de deux grandeurs égales, l'unité étant la même.

La somme de deux nombres entiers ou fractionnaires est le nombre qui mesure une grandeur égale à la somme des grandeurs mesurées par les deux autres, l'unité étant la même.

Un nombre est plus grand qu'un autre quand il est la somme de cet autre et d'un troisième nombre.

C'est dans les Traités d'Arithmétique qu'il faut voir les conséquences de ces principes fondamentaux; nous regarderons ici comme acquises toutes les règles du calcul des nombres entiers ou fractionnaires.

* *Mesure d'une grandeur incommensurable avec l'unité.*

2. Considérons maintenant une grandeur A incommensurable avec l'unité U.

On appelle *valeur approchée de* A *par défaut à moins de* $\frac{1}{n}$; n étant entier ou fractionnaire, le nombre qui mesure le plus grand multiple de la grandeur $\frac{U}{n}$ contenu dans A. Ainsi, A contenant $\frac{U}{n}$ un nombre entier de fois m, avec un reste moindre que $\frac{U}{n}$,

$$\frac{m}{n}$$

est la valeur approchée de A à moins de $\frac{1}{n}$ *par défaut*, et

$$\frac{m+1}{n}$$

est la valeur approchée de A à moins de $\frac{1}{n}$ *par excès*.

Cela posé, le nombre qui mesure une grandeur A incommensurable avec l'unité est *par définition* la limite vers laquelle tendent les valeurs approchées de A à moins de $\frac{1}{n}$, lorsque n croît indéfiniment.

Pour justifier cette définition, il faut montrer que cette limite existe et qu'elle est unique, c'est-à-dire indépendante de la loi suivant laquelle on fait croître n indéfiniment.

A cet effet, nous désignerons par a_n la valeur approchée de A par défaut et par a'_n la valeur approchée par excès à moins de $\frac{1}{n}$.

a_n n'augmente pas toujours avec n (1); désignons par α_n et appelons *valeur principale de* A *à moins de* $\frac{1}{n}$ *par défaut* la plus grande des valeurs de a_ν pour toutes les valeurs de ν non supérieures à n. Alors, lorsque n croîtra, la valeur principale α_n croîtra aussi ou du moins ne décroîtra jamais, et comme α_n, mesurant une grandeur moindre que A, reste inférieur à l'une quelconque des valeurs a'_n approchées par excès, α_n aura une certaine limite a quand n croîtra indéfiniment.

De même a'_n ne décroît pas toujours quand n augmente; désignons par α'_n et appelons *valeur principale de* A *à moins de* $\frac{1}{n}$ *par excès* la plus petite des valeurs de a'_ν pour toutes les valeurs de ν non supérieures à n. Alors, lorsque n croîtra, la valeur principale α'_n décroîtra ou du moins ne croîtra jamais; et comme α'_n, mesurant une grandeur supérieure à A, reste supérieur à l'une quelconque des valeurs a_n approchées par défaut, α'_n tend vers une certaine limite quand n croît indéfiniment.

Or, on voit de suite que cette limite n'est autre que a et que les valeurs approchées a_n, a'_n tendent aussi vers a lorsque n croît indéfiniment suivant une loi quelconque. En effet, α_n et α'_n étant, d'après leur définition même, compris l'un et l'autre entre a_n et a'_n, la différence entre α_n et chacune des quantités α'_n, a_n, a'_n est moindre en valeur absolue que $a'_n - a_n$, et par suite moindre que la fraction $\frac{1}{n}$, qui tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

* *Calcul des nombres incommensurables.*

5. Un nombre est dit *commensurable* ou *incommensurable* suivant que

(1) Par exemple, si A est la diagonale du carré dont le côté est égal à l'unité, on a $a_{10} = \frac{14}{10}$ et $a_{11} = \frac{15}{11}$, et par conséquent $a_{11} < a_{10}$.

la grandeur dont il exprime la mesure est commensurable ou incommensurable avec l'unité adoptée. Les nombres commensurables sont les entiers et les fractions.

Par définition, *le résultat d'une opération sur des nombres incommensurables est la limite du résultat de la même opération sur leurs valeurs approchées à moins de* $\frac{1}{n}$, *lorsque n croît indéfiniment.*

Il faut démontrer que cette limite existé et est unique, c'est-à-dire indépendante de la loi suivant laquelle n croît indéfiniment : c'est ce que nous allons faire en considérant successivement chacune des opérations élémentaires.

Pour employer des notations uniformes, nous désignerons tout nombre incommensurable par une lettre minuscule, a par exemple; alors a_n et a'_n seront ses valeurs approchées par défaut et par excès à moins de $\frac{1}{n}$, α_n et α'_n ses valeurs principales à moins de $\frac{1}{n}$; enfin, nous emploierons le symbole A_n pour désigner indifféremment l'une quelconque des valeurs a_n et a'_n, sans spécifier l'une d'elles.

Addition. — Soient les deux nombres incommensurables a et b. Lorsque n augmente, la somme $\alpha_n + \beta_n$ croît ou du moins ne diminue pas, et, comme elle reste inférieure à l'une quelconque des valeurs de $\alpha'_n + \beta'_n$, on voit qu'elle a une limite. D'ailleurs, $A_n + B_n$ a la même limite, car la différence entre les quantités

$$\alpha_n + \beta_n \quad \text{et} \quad A_n + B_n$$

est moindre en valeur absolue que la somme des différences $a'_n - a_n$, $b'_n - b_n$, c'est-à-dire moindre que la quantité $\frac{2}{n}$ qui tend vers zéro quand n augmente indéfiniment suivant une loi quelconque.

C'est cette limite qu'on appelle $a + b$.

Soustraction. — On dit que a est plus grand que b si pour toute valeur de n on a $a_n > b'_n$. Cela posé, la différence $\alpha_n - \beta'_n$ croît avec n en restant moindre que l'une quelconque des valeurs de $\alpha'_n - \beta_n$; elle a donc une limite. D'ailleurs, $A_n - B_n$ a la même limite, car la différence entre les quantités

$$\alpha_n - \beta'_n \quad \text{et} \quad A_n - B_n$$

est moindre en valeur absolue que la somme des différences $a'_n - a_n$, $b'_n - b_n$, c'est-à-dire moindre que la quantité $\frac{2}{n}$, qui s'annule pour $n = \infty$.

C'est cette limite qu'on nomme $a - b$.

Comme on a, quel que soit n,

$$\alpha_n = \beta'_n + (\alpha_n - \beta'_n),$$

on aura à la limite

$$a = b + (a - b).$$

Donc *la différence* $a - b$, définie comme nous venons de le faire, *est* bien *le nombre qui, ajouté à* b, *reproduit* a.

Multiplication. — Le produit $\alpha_n\beta_n$ croît avec n en restant inférieur à l'une quelconque des valeurs de $\alpha'_n\beta'_n$; il a donc une limite. D'ailleurs, A_nB_n tend vers la même limite, car le quotient

$$\frac{A_nB_n}{\alpha_n\beta_n} = \frac{A_n}{\alpha_n}\,\frac{B_n}{\beta_n},$$

étant le produit de deux facteurs qui tendent vers 1, a pour limite l'unité.

C'est cette limite qu'on appelle ab.

Comme on a, quel que soit n,

$$\alpha_n\beta_n = \beta_n\alpha_n,$$

on a à la limite

$$ab = ba.$$

La valeur du produit ab, tel que nous venons de le définir, *est* donc *indépendante de l'ordre des facteurs.*

Le produit de plusieurs facteurs incommensurables, dans le cas où le nombre des facteurs est supérieur à deux, se définit comme dans le cas où les facteurs sont commensurables.

Division. — Le quotient $\frac{\alpha_n}{\beta'_n}$ croît avec n en restant inférieur à l'une quelconque des valeurs du quotient $\frac{\alpha'_n}{\beta_n}$; il a donc une limite. D'ailleurs, $\frac{A_n}{B_n}$ tend vers la même limite, car l'expression

$$\frac{A_n}{B_n}\cdot\frac{\alpha_n}{\beta'_n} = \frac{A_n}{\alpha_n}\,\frac{\beta'_n}{B_n},$$

étant le produit de deux facteurs qui tendent vers 1, a pour limite l'unité.

C'est cette limite que l'on représente par $\frac{a}{b}$.

Comme on a, quel que soit n,

$$\alpha_n = \beta'_n\,\frac{\alpha_n}{\beta'_n},$$

on a à la limite

$$a = b\frac{a}{b}.$$

Le dividende est donc bien *égal au produit du diviseur par le quotient* tel que nous venons de le définir.

Rapport de deux grandeurs.

6. On nomme *rapport* d'une grandeur A à une grandeur B de même espèce le nombre par lequel il faut multiplier la seconde pour avoir la première. On désigne ce rapport par $\frac{A}{B}$.

Le rapport de deux grandeurs A *et* B *de même espèce est égal au nombre qui mesure la première lorsqu'on prend la seconde pour unité.*

En effet, si le rapport donné est, par exemple, $\frac{3}{5}$, la première grandeur est le produit de la seconde par $\frac{3}{5}$ (15); mais multiplier une grandeur par $\frac{3}{5}$, c'est en prendre les $\frac{3}{5}$. La première grandeur est donc les $\frac{3}{5}$ de la seconde, et, par suite, $\frac{3}{5}$ est le nombre qui mesure la première grandeur lorsqu'on prend la seconde pour unité.

* Si le rapport de A à B, c'est-à-dire le nombre par lequel il faut multiplier B pour avoir A, est incommensurable, désignons-le par r, et appelons m le nombre qui mesure A, B étant pris pour unité. Soient d'ailleurs $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$ deux valeurs approchées à moins de $\frac{1}{n}$, l'une par défaut, l'autre par excès, du rapport r. On aura alors

$$B\frac{k}{n} < A < B\frac{k+1}{n}.$$

Le nombre m qui mesure A sera donc compris entre les nombres $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$ qui mesurent les deux grandeurs $B\frac{k}{n}$, $B\frac{k+1}{n}$, B étant l'unité. Donc les nombres m et r, étant compris l'un et l'autre entre deux nombres $\frac{k}{n}$ et $\frac{k}{n}+\frac{1}{n}$, qui diffèrent aussi peu qu'on veut pour n assez grand, ne sauraient avoir une différence assignable.

7. Il résulte de là que, *lorsque deux grandeurs* A *et* B *ont été me-*

surées avec une même unité C, *on obtient leur rapport en divisant le nombre* α *qui mesure la première par le nombre* 6 *qui mesure la seconde.*

En effet, on a, d'après le théorème précédent, les deux relations

$$A = C.\alpha, \quad B = C.6, \quad \text{d'où} \quad A = B\frac{\alpha}{6}.$$

Le quotient $\frac{\alpha}{6}$ exprime donc le rapport de A à B.

On est ainsi conduit à appeler rapport de deux nombres quelconques α et 6 le quotient de leur division, et l'on démontre en Arithmétique que les règles de calcul des fractions à termes entiers sont applicables à ces rapports ou fractions générales $\frac{\alpha}{6}$. Par exemple, on n'altère pas ces rapports en multipliant leurs deux termes par un même nombre : on obtient leur produit en les multipliant terme à terme, etc.

Conditions pour que deux grandeurs varient proportionnellement.

8. Lorsque deux grandeurs de nature différente ont une dépendance telle que le rapport de deux valeurs quelconques de la première soit égal au rapport des valeurs correspondantes de la seconde, on dit que ces deux grandeurs sont *proportionnelles.*

Deux grandeurs sont proportionnelles l'une à l'autre si, à deux valeurs quelconques, mais égales, de la première grandeur, répondent deux valeurs égales de la seconde, et si, de plus, à la somme de deux valeurs quelconques de la première répond une valeur qui soit la somme des deux valeurs correspondantes de la seconde.

En effet, soient a et a' deux valeurs quelconques de la première grandeur, et b et b' les deux valeurs correspondantes de la seconde. Supposons que le rapport $\frac{a}{a'}$ soit, par exemple, $\frac{3}{5}$, c'est-à-dire que a soit les $\frac{3}{5}$ de a'. En désignant par α le cinquième de a', on aura alors

$$a = 3\alpha \quad \text{et} \quad a' = 5\alpha.$$

Mais, si l'on appelle 6 la valeur de la seconde grandeur qui répond à la valeur α de la première, aux valeurs

$$\alpha + \alpha \text{ ou } 2\alpha, \quad 2\alpha + \alpha \text{ ou } 3\alpha, \quad 3\alpha + \alpha \text{ ou } 4\alpha, \quad 4\alpha + \alpha \text{ ou } 5\alpha$$

de la première grandeur répondent respectivement, en vertu de la loi de correspondance admise, les valeurs

$$6 + 6 \text{ ou } 26, \quad 26 + 6 \text{ ou } 36, \quad 36 + 6 \text{ ou } 46, \quad 46 + 6 \text{ ou } 56$$

de la seconde grandeur. Or, par hypothèse, les valeurs de la seconde

grandeur qui répondent aux valeurs 3α ou a et 5α ou a' de la première sont b et b'; on aura donc

$$b = 3\mathfrak{G}, \quad b' = 5\mathfrak{G},$$

d'où

$$\frac{b}{b'} = \frac{3}{5} = \frac{a}{a'}.$$

* Si le rapport $\frac{a}{a'}$ est incommensurable, soient $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$ deux valeurs approchées de ce rapport à $\frac{1}{n}$ près, l'une par défaut, l'autre par excès. On aura

$$\frac{k}{n}a' < a < \frac{k+1}{n}a',$$

d'où, en désignant par α la $n^{ième}$ partie de a',

$$k\alpha < a < (k+1)\alpha \quad \text{et} \quad a' = n\alpha.$$

Mais, si $\mathfrak{G}$ est la valeur de B qui correspond à la valeur α de A, aux valeurs $k\alpha$, $(k+1)\alpha$, $n\alpha$ de A correspondront respectivement les valeurs $k\mathfrak{G}$, $(k+1)\mathfrak{G}$, $n\mathfrak{G}$ de B. On aura donc, puisque, d'après l'énoncé, à une plus grande valeur de A correspond nécessairement une plus grande valeur de B,

$$k\mathfrak{G} < b < (k+1)\mathfrak{G} \quad \text{et} \quad b' = n\mathfrak{G},$$

c'est-à-dire

$$\frac{k}{n}b' < b < \frac{k+1}{n}b' \quad \text{ou} \quad \frac{k}{n} < \frac{b}{b'} < \frac{k+1}{n}.$$

Par suite, les deux rapports $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, étant compris entre deux nombres $\frac{k}{n}$ et $\frac{k}{n} + \frac{1}{n}$ qui, pour n assez grand, diffèrent aussi peu qu'on veut, ne sauraient avoir aucune différence assignable.

RÉCIPROQUEMENT, *si deux grandeurs sont proportionnelles :* 1° la relation

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

montre que pour $a = a'$ on a $b = b'$, c'est-à-dire qu'*à des valeurs égales de la première grandeur correspondent des valeurs égales de la seconde ;* 2° la même relation donne

$$\frac{a+a'}{a'} = \frac{b+b'}{b'},$$

c'est-à-dire qu'*à la somme de deux valeurs quelconques de la première grandeur correspond la somme des deux valeurs correspondantes de la seconde.*

Ainsi, *correspondance dans l'égalité et correspondance dans la somme,* telles sont les deux conditions nécessaires et suffisantes de la proportionnalité de deux grandeurs. Si l'une des deux conditions est seule remplie, *il n'y a pas proportionnalité;* c'est ce qui arrive pour un arc et sa corde : à des arcs égaux d'un même cercle correspondent des cordes égales; mais la corde BC de la somme de deux arcs est moindre que la somme AB + AC des cordes de ces arcs.

9. On dit qu'une grandeur M est à la fois proportionnelle à plusieurs autres grandeurs A, B, C, lorsque, ces dernières grandeurs, sauf une, restant constantes, la grandeur M est proportionnelle à celle qui varie.

Lorsqu'une grandeur M *est proportionnelle à plusieurs autres grandeurs* A, B, C, *le rapport de deux valeurs quelconques de la grandeur* M *est égal au produit des rapports des valeurs correspondantes des autres grandeurs.*

Ainsi, soient

$$m,\quad a,\quad b,\quad c,$$
$$m',\quad a',\quad b',\quad c',$$

deux séries de valeurs correspondantes des grandeurs M, A, B, C, obtenues en rapportant chaque grandeur à une unité de son espèce. On aura

$$\frac{m}{m'} = \frac{a}{a'}\,\frac{b}{b'}\,\frac{c}{c'}.$$

En effet, soient m_1 la valeur de M qui correspond aux valeurs a', b, c de A, B, C, et m_2 celle qui répond à a', b', c; on aura, d'après la définition ci-dessus,

$$\frac{m}{m_1} = \frac{a}{a'},\quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{b}{b'},\quad \frac{m_2}{m'} = \frac{c}{c'}.$$

En multipliant ces trois égalités membre à membre et simplifiant, on trouve

$$\frac{m}{m'} = \frac{a}{a'}\,\frac{b}{b'}\,\frac{c}{c'}.$$

NOTE II.

SUR L'IMPOSSIBILITÉ DE LA QUADRATURE DU CERCLE.

Il n'est guère de problème qui ait donné lieu à plus de tentatives que celui de la quadrature du cercle : on entend par là, comme on sait, la construction avec la règle et le compas, c'est-à-dire à l'aide d'un nombre limité de droites et de cercles, du carré équivalent à un cercle donné quelconque. L'insuccès de tant d'efforts avait fait regarder ce problème comme impossible, bien qu'il n'existât, à vrai dire, aucune démonstration rigoureuse de cette impossibilité; on avait seulement prouvé jusqu'ici que le rapport de la circonférence au diamètre est incommensurable (LAMBERT, 1761), et qu'il en est de même de son carré (LEGENDRE, Note IV de sa *Géométrie;* HERMITE, *Journal de Crelle,* 1873).

Dans tout problème susceptible d'être résolu avec la règle et le compas, chaque point de la figure s'obtient par l'intersection de deux droites ou d'une droite et d'un cercle, ou de deux cercles; si l'on imagine qu'on traduise algébriquement les constructions au fur et à mesure, à l'aide des formules de la Géométrie analytique, on aperçoit qu'on n'aura jamais à résoudre que des équations linéaires ou quadratiques, en sorte que l'équation finale pourra, par un nombre suffisant d'élévations au carré successives, être ramenée à une équation de degré pair à coefficients rationnels. On aura donc démontré l'impossibilité de la quadrature du cercle, si l'on prouve que *le nombre* π *ne saurait être racine d'une équation de degré quelconque à coefficients rationnels.*

M. Lindemann a annoncé (*Comptes rendus,* t. XCV, et *Mathematische Annalen,* t. XX; 1882) qu'il était parvenu à déduire cette proposition de certaines formules de M. Hermite (*Mémoire sur la fonction exponentielle,* 1874); sa méthode n'est qu'une généralisation, mais fort habile, de celle qu'avait employée l'illustre géomètre pour démontrer que le nombre e, base des logarithmes népériens, jouit de la propriété similaire.

Nous allons exposer, en simplifiant quelques détails, les formules de M. Hermite et les recherches de M. Lindemann; ce dernier travail, si remarquable, appelle d'autant plus l'attention qu'il ne semble pas devoir être le dernier mot sur ce sujet, au moins sous le rapport de la simplicité.

Formules de M. Hermite.

1. Remarquons d'abord que, si l'on désigne par m un nombre entier et positif quelconque, par $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les racines d'une équation en-

tière de la forme

$$(\alpha) \qquad f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

on peut toujours déterminer un polynôme entier et de degré n en z

$$(1) \qquad \Phi(z, z_i) = z^n + \theta_1(z_i) z^{n-1} + \ldots + \theta_n(z_i),$$

tel qu'on ait identiquement

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{z f(z)}{z - z_i} = \Phi(z, z_i) - \dfrac{d\Phi(z, z_i)}{dz} \\ \qquad - m\left[\dfrac{\Phi(z, z_i) - \Phi(z_0, z_i)}{z - z_0} + \ldots + \dfrac{\Phi(z, z_i) - \Phi(z_n, z_i)}{z - z_n}\right], \end{cases}$$

i désignant l'un quelconque des nombres 0, 1, 2, ..., n, à condition de remplacer z_0 par zéro.

Car, en égalant les coefficients des mêmes puissances de z dans les deux membres, on trouve, puisque le premier terme est z^n de part et d'autre, n relations qui permettent de déterminer les n coefficients

$$\theta_1(z_i), \ldots, \theta_n(z_i);$$

ces relations, qu'on déduit de

$$\begin{aligned} & z_i^k + a z_i^{k-1} + \ldots + a_k \\ & \quad = \theta_k(z_i) - (n + k - 1)\theta_{k-1}(z_i) \\ & \qquad - m[S_0 \theta_{k-1}(z_i) + S_1 \theta_{k-2}(z_i) + \ldots + S_{k-2}\theta_1(z_i) + S_{k-1}], \end{aligned}$$

en faisant successivement k égal à 1, 2, ..., n et où S_0, S_1, ... désignent les sommes des puissances semblables des racines de $f(z) = 0$, montrent que $\theta_k(z_i)$ est un polynôme de la forme

$$\theta_k(z_i) = z_i^k + b_1 z_i^{k-1} + \ldots + b_k,$$

$b_1, \ldots, b_k$ étant des fonctions entières symétriques et à coefficients entiers des racines de $f(z) = 0$.

L'expression (1) fait voir en outre que, si l'on pose

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ z_0 & \ldots & z_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_0^n & \ldots & z_n^n \end{vmatrix},$$

on a

$$\delta \times \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \theta_1(z_0) & \ldots & \theta_1(z_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_n(z_0) & \ldots & \theta_n(z_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Phi(z_0, z_0) & \ldots & \Phi(z_n, z_0) \\ \Phi(z_0, z_1) & \ldots & \Phi(z_n, z_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi(z_0, z_n) & \ldots & \Phi(z_n, z_n) \end{vmatrix};$$

et comme, en vertu de l'expression de $\theta_k(z_i)$, le second déterminant se réduit par des transformations bien connues à δ, on voit que le dernier déterminant est égal à δ^2.

Enfin, si l'on désigne par $\varphi(z, z_i)$ ce que devient $\Phi(z, z_i)$ lorsqu'on y remplace m par zéro, on a

$$\frac{z f(z)}{z - z_i} = \varphi(z, z_i) - \frac{d\varphi(z, z_i)}{dz}, \tag{2'}$$

et

$$\begin{vmatrix} \varphi(z_0, z_0) & \dots & \varphi(z_n, z_0) \\ \varphi(z_0, z_1) & \dots & \varphi(z_n, z_1) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \varphi(z_0, z_n) & \dots & \varphi(z_n, z_n) \end{vmatrix} = \delta^2. \tag{3}$$

2. Cela posé, considérons l'intégrale.

$$\frac{1}{1.2\dots(m-1)} \int_0^{z_k} \frac{e^{-z} z^m f^m(z)}{z - z_i} dz,$$

le chemin d'intégration pouvant être choisi à volonté, à condition toutefois de ne pas passer par l'infini; nous désignerons cette intégrale par le symbole m_k^i.

En multipliant les deux membres de la relation (2) par $e^{-z} z^m f^m(z)$, on a

$$\frac{e^{-z} z^{m+1} f^{m+1}(z)}{z - z_i} = \frac{d}{dz}\left[e^{-z} z^m f^m(z) \Phi(z, z_i)\right] + m e^{-z} z^m f^m(z)\left[\frac{\Phi(z_0, z_i)}{z - z_0} + \dots + \frac{\Phi(z_n, z_i)}{z - z_i}\right];$$

d'où, en multipliant par dz et intégrant entre les limites o et z_k,

$$(m+1)_k^i = \Phi(z_0, z_i) m_k^0 + \dots + \Phi(z_n, z_i) m_k^i.$$

La recherche des intégrales $(m+1)_k^i$ se trouve ainsi ramenée à celle des intégrales m_k^i. Par le même procédé, on ramènera à leur tour celles-ci aux intégrales $(m-1)_k^i$ et, en continuant de la sorte, on arrivera à la formule

$$m_k^i = U_0^i (1)_k^0 + \dots + U_n^i (1)_k^n,$$

avec la relation.

$$\begin{vmatrix} U_0^0 & \dots & U_n^0 \\ \dots & \dots & \dots \\ U_0^i & \dots & U_n^n \end{vmatrix} = \delta^{2(m-1)}. \tag{4}$$

Mais, en multipliant par e^{-z} les deux membres de la relation (2'), on a

$$\frac{e^{-z} z f(z)}{z - z_i} = \frac{d}{dz}\left[e^{-z} \varphi(z, z_i)\right],$$

d'où, en multipliant par dz et intégrant entre o et z_k,

$$(1)_k^i = \varphi(z_0, z_i) - e^{z_k}\varphi(z_k, z_i).$$

Il suffit dès lors de poser

$$u_h^i = \mathrm{U}_h^i\varphi(z_h, z_0) + \ldots + \mathrm{U}_h^n\varphi(z_h, z_n), \tag{5}$$

pour obtenir la formule

$$m_k^i = u_0^i - e^{-z_k}u_k^i, \tag{6}$$

due à M. Hermite et dont dépend toute la suite de cette étude.

Les quantités u_h^i sont des fonctions entières et à coefficients entiers des racines de $f(z) = 0$; leur expression (5) montre en outre que leur déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_0^0 & \ldots & u_n^0 \\ u_0^1 & \ldots & u_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_0^n & \ldots & u_n^n \end{vmatrix}$$

est égal au produit des déterminants (3) et (4); d'où résulte l'égalité

$$\Delta = \delta^{2m}.$$

3. Enfin, pour terminer ce travail préparatoire, nous allons montrer que l'*intégrale m_k^i tend vers zéro lorsque m croît indéfiniment.*

Si l'on désigne, en effet, par λ' la longueur du chemin d'intégration adopté pour le calcul de m_k^i, et par μ' et ν' les modules maximum de $zf(z)$ et de $e^{-z}(z - z_i)^{-1}$ le long de ce chemin, on a évidemment

$$\operatorname{mod} m_k^i < \frac{\mu'^m.\nu'.\lambda'}{1.2\ldots(m-1)}.$$

Par suite, si λ, μ, ν sont les plus grandes valeurs de λ', μ', ν' pour toutes les valeurs de k et de i, toutes les intégrales m_k^i auront un module inférieur à

$$\left[\frac{\mu^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}\right]\mu\nu\lambda;$$

or λ, μ, ν sont des nombres finis et indépendants de m, et l'on sait d'ailleurs que la fraction mise entre parenthèses peut, pour une valeur assez grande de l'entier m, devenir inférieure à toute quantité donnée.

Théorèmes de M. Lindemann.

4. Supposons : 1° que n soit de la forme pq, p et q étant deux entiers positifs quelconques; 2° que $z_1, \ldots, z_p$ soient les racines d'une équation

irréductible de la forme

$$(\beta) \qquad \psi(z) = z^p + b_1 z^{p-1} + \ldots + b_p = 0,$$

$b_1, b_2, \ldots, b_p$ étant des nombres entiers réels ou imaginaires; 3° que l'on ait pour toutes les valeurs 1, 2, ... p de l'indice ν

$$(7) \qquad z_{p+\nu} = 2z_\nu, \; z_{2p+\nu} = 3z_\nu, \; \ldots, \; z_{(q-1)p+\nu} = qz_\nu.$$

On aura, par la formule (6),

$$\begin{aligned} e^{z_\nu} m_\nu^i &= e^{z_\nu} u_0^i - u_\nu^i, \\ e^{z_{p+\nu}} m_{p+\nu}^i &= e^{z_{p+\nu}} u_0^i - u_{p+\nu}^i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{z_{(q-1)p+\nu}} m_{(q-1)p+\nu}^i &= e^{z_{(q-1)p+\nu}} u_0^i - u_{(q-1)p+\nu}^i, \end{aligned}$$

d'où, en multipliant respectivement par des nombres $N_1, N_2, \ldots, N_q$, supposés entiers réels ou imaginaires, mais différents de zéro, puis ajoutant et ayant égard aux relations (7),

$$\begin{aligned} &N_1 \Sigma e^{z_\nu} m_\nu^i + N_2 \Sigma e^{z_{p+\nu}} m_{p+\nu}^i + \ldots + N_q \Sigma e^{z_{(q-1)p+\nu}} m_{(q-1)p+\nu}^i \\ &\quad = u_0^i (N_1 \Sigma e^{z_\nu} + N_2 \Sigma e^{2z_\nu} + \ldots + N_q \Sigma e^{qz_\nu}) \\ &\qquad - N_1 \Sigma u_\nu^i - N_2 \Sigma u_{p+\nu}^i - \ldots - N_q \Sigma u_{(q-1)p+\nu}^i, \end{aligned}$$

toutes les sommes Σ étant prises de $\nu = 1$ à $\nu = p$.

L'existence d'une relation telle que

$$(I) \qquad N_0 + N_1 \Sigma e^{z_\nu} + N_2 \Sigma e^{2z_\nu} + \ldots + N_q \Sigma e^{qz_\nu} = 0$$

entraînerait donc les $n+1$ relations que l'on déduit de

$$(8) \quad \begin{cases} N_1 \Sigma e^{z_\nu} m_\nu^i + N_2 \Sigma e^{z_{p+\nu}} m_{p+\nu}^i + \ldots + N_q \Sigma e^{z_{(q-1)p+\nu}} m_{(q-1)p+\nu}^i \\ \quad = -[N_0 u_0^i + N_1 \Sigma u_\nu^i + N_2 \Sigma u_{p+\nu}^i + \ldots + N_q \Sigma u_{(q-1)p+\nu}^i], \end{cases}$$

en y faisant $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. L'impossibilité de la relation (I) sera donc démontrée, si l'on prouve l'impossibilité du système des $(n+1)$ équations (8).

A cet effet, nous ferons d'abord les remarques suivantes, qui résultent de la composition des u_k^i et de la forme entière des coefficients de l'équation qui a les z_k pour racines.

1° Le second membre de la première des équations (8) (relative à $i = 0$) est un nombre entier; car ce second membre, qui est une fonction entière et à coefficients entiers de z_k, est en outre une fonction symétrique de ces racines, vu que, si l'on échange les indices x et y qu'on suppose choisis parmi $1, 2, \ldots, p$, u_x^0 s'échange avec u_y^0, $z_{x+\lambda p}$ avec $z_{y+\lambda p}$, et $u_{x+\lambda p}^0$ avec $u_{y+\lambda p}^0$;

2° Les seconds membres des autres équations (8) ne font que s'échanger

entre eux par l'effet de l'échange mutuel des z_k; car, si l'on échange z_x et z_y, $u^x_{l+\lambda p}$ s'échange avec $u^y_{l+\lambda p}$ tant que l diffère de x et de y, et en outre $u^x_{y+\lambda p}$ s'échange avec $u^y_{x+\lambda p}$ et $u^x_{x+\lambda p}$ avec $u^y_{y+\lambda p}$. Ces seconds membres sont d'ailleurs des fonctions entières et à coefficients entiers des z_l; si donc on considère l'équation

$$\omega^{n+1} + A_1\omega^n + \ldots + A_n = 0,$$

qui aurait les seconds membres des équations (8) pour racines, les coefficients $A_1, \ldots, A_n$ étant des fonctions entières et symétriques de ces seconds membres seront des nombres entiers.

Mais les premiers membres des équations (8) tendent vers zéro quand m croît indéfiniment; donc il en est de même alors de $A_1, A_2, \ldots, A_n$, et comme ce sont des nombres entiers, il faut que, à partir de certaines valeurs de m et pour toutes les valeurs plus grandes de m, on ait rigoureusement $A_1 = 0, A_2 = 0, \ldots, A_n = 0$. Donc, pour ces mêmes valeurs de m, les seconds membres des équations (8) devraient s'évanouir, et, par suite, tous les déterminants d'ordre $(q+1)$ déduits du tableau des coefficients $N_0, N_1, \ldots, N_q$ dans les seconds membres des équations (8) devraient être nuls; il en serait donc de même du déterminant Δ, et par conséquent aussi de δ, puisque $\Delta = \delta^{2m}$.

Mais le déterminant δ est, comme on sait, égal au produit de toutes les différences $\pm(\alpha z_i - \beta z_h)$, lorsqu'on donne à i et h toutes les valeurs $1, 2, \ldots, p$, et à α et β toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, q$ (à condition cependant de ne pas faire à la fois α et β nuls); δ ne pourrait donc être nul que s'il y avait entre deux racines z_i et z_h une relation de la forme $\alpha z_i - \beta z_h = 0$; mais alors l'équation $\psi(z) = 0$ et l'équation

$$z^p + \frac{\beta}{\alpha} b_1 z^{n-1} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 b^2 z^{n-2} + \ldots + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^p b_p = 0$$

auraient une racine commune, tandis que $\psi(z)$ a été supposé **irréductible.**

On a donc le théorème suivant :

Si $z_1, z_2, \ldots, z_p$ sont les racines d'une équation irréductible de la forme (β) *à coefficients entiers $b_1, \ldots, b_n$ réels ou imaginaires, il ne peut exister, entre les fonctions symétriques*

$$(9)\qquad \begin{cases} \Sigma e^{z_\nu} = e^{z_1} + e^{z_2} + \ldots + e^{z_p}, \\ \Sigma e^{2z_\nu} = e^{2z_1} + e^{2z_2} + \ldots + e^{2z_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Sigma e^{qz_\nu} = e^{qz_1} + e^{qz_2} + \ldots + e^{qz_p}, \end{cases}$$

où q désigne un nombre entier et positif quelconque, aucune relation telle que (I), *c'est-à-dire aucune relation linéaire dont les coefficients $N_0, N_1, \ldots, N_q$ soient entiers réels ou imaginaires et différents de zéro.*

En particulier, on ne saurait avoir

$$N_0 + N_1 + (e^{rz_1} + e^{rz_2} + \ldots + e^{rz_n}) = 0,$$

r étant un entier positif quelconque; et par conséquent, *sous les conditions admises, aucune des fonctions symétriques*

$$e^{rz_1} + e^{rz_2} + \ldots + e^{rz_n}$$

ne saurait être égale à un nombre rationnel.

5. Les propositions précédentes peuvent s'étendre aux fonctions symétriques

$$(10) \quad \begin{cases} \Sigma e^{z_1}, & \Sigma e^{z_1+z_2}, & \Sigma e^{z_1+z_2+z_3}, & \ldots, & \Sigma e^{z_1+z_2+\cdots+z_p}, \\ \Sigma e^{rz_1}, & \Sigma e^{r(z_1+z_2)}, & \Sigma e^{r(z_1+z_2+z_3)}, & \ldots, & \Sigma e^{r(z_1+z_2+\cdots+z_p)}. \end{cases}$$

En effet, supposons d'abord que les nombres qui figurent comme exposants de e soient tous différents les uns des autres et différents de zéro. L'existence d'une relation linéaire à coefficients entiers $N_0, N_1, N_2, \ldots$ entre les quantités (10) conduirait alors à un système d'équations entièrement analogue au système (8) et dont on mettrait l'impossibilité en évidence par un raisonnement pareil à celui du n° 4.

Si l'hypothèse ci-dessus n'est pas remplie, admettons d'abord que dans l'une des fonctions (10) que nous désignons par Σe^Z, plusieurs des exposants Z soient égaux entre eux, et considérons une relation de la forme

$$(11) \qquad 0 = N_0 + N_1 \Sigma e^Z.$$

Toutes les quantités Z peuvent alors être réparties en plusieurs groupes

$$Z_1, Z_1', Z_1'', \ldots; Z_2, Z_2', Z_2'', \ldots; \ldots,$$

tels que les quantités qui forment un même groupe soient racines d'une équation irréductible à coefficients rationnels et ne fassent que s'échanger entre elles quand on échange les racines z_k. Or le succès du raisonnement appliqué dans le n° 4 à la relation (1) était dû précisément à ce qu'il n'intervenait dans chaque somme séparée que des exposants de e s'échangeant entre eux par suite de l'échange des z_k. Nous pouvons donc ici conclure immédiatement à l'impossibilité d'une équation de la forme

$$0 = N_0 + N_1 \Sigma e^{Z_1} + N_2 \Sigma e^{Z_2} + \ldots,$$

et par suite de la relation (11) qui en est un cas particulier. Si, de plus, une des quantités Z était nulle, cela équivaudrait à un changement dans la valeur de N_0; mais alors le raisonnement serait en défaut, à moins que tous les exposants du second membre de (11) ne s'évanouissent en même temps. Si l'équation qui a les z_k pour racines est irréductible, le cas

d'exception que nous signalons ne peut se présenter que pour l'exposant de la fonction

$$e^{z} = e^{r(z_1+z_2+\cdots+z_p)}, \tag{11}$$

lorsque le coefficient b_1 de z^{p-1} dans l'équation $\psi(z) = 0$ est nul. Considérons maintenant au lieu de (II) une équation linéaire dans laquelle figurent plusieurs des fonctions (10); on pourra encore grouper les exposants de telle sorte que chacun des nombres N multiplie une somme telle que les exposants de e qui appartiennent aux termes de cette somme soient les racines d'une équation irréductible, et l'on répétera ce qui a été dit ci-dessus à propos de l'équation (II).

Donc : *Aucune des fonctions symétriques* (10) *ne peut être égale à un nombre rationnel;* et, plus généralement, *entre les fonctions* (10) *il ne peut exister aucune relation linéaire à coefficients rationnels, à moins que l'équation* $\psi(z) = 0$ *ne soit privée de second terme, auquel cas une fonction symétrique des quantités* (11) *peut être égale à un nombre rationnel.*

6. La première série des quantités (10) n'est autre que la suite des coefficients $M_1, M_2, \ldots, M_p$ de l'équation

$$V^p - M_1 V^{p-1} + M_2 V^{p-2} - \ldots \pm M_p = 0, \tag{12}$$

qui a pour racines $e^{z_1}, e^{z_2}, \ldots, e^{z_p}$.

D'après ce qui vient d'être dit, ces coefficients ne peuvent être rationnels, sauf M_p pour $b_1 = 0$, et il ne saurait exister entre eux aucune relation linéaire à coefficients rationnels. Mais si l'une des racines de (12), c'est-à-dire l'une des quantités $e^{z_1}, e^{z_2}, \ldots, e^{z_p}$ était rationnelle, sa substitution à la place de V dans (12) établirait précisément une relation à coefficients rationnels entre $M_1, M_2, \ldots, M_p$. Donc : *Si z est racine d'une équation irréductible de la forme* (β), e^z *ne peut être un nombre rationnel.*

Or on a $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$; donc $\pi\sqrt{-1}$ ne saurait être racine d'une équation irréductible de la forme (β). D'ailleurs, on peut ramener toute équation à coefficients rationnels à la forme (β), en prenant pour inconnue pz, au lieu de z, p étant un nombre entier convenablement choisi. Donc, enfin :

Le nombre π *ne saurait être racine d'une équation algébrique à coefficients rationnels* (*réels ou imaginaires*).

NOTE III (¹).

SUR LA GÉOMÉTRIE RÉCENTE DU TRIANGLE.

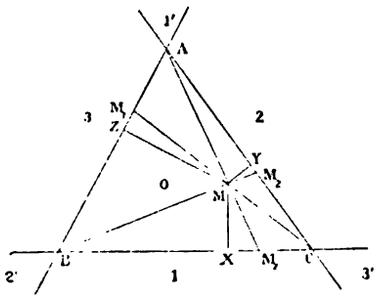
Définition des coordonnées.

1. Soit ABC (*fig.* 1) le triangle *fondamental, primitif* ou *de référence*.

On fixe la position d'un point M ou d'une droite *m* par rapport au triangle ABC au moyen de certaines quantités qu'on appelle les *coordonnées* de ce point ou de cette droite.

Menons les perpendiculaires MX, MY, MZ sur BC, CA, AB, et désignons par x, y, z, les nombres qui mesurent les longueurs MX, MY, MZ, précédées du signe + ou du signe —, suivant que le point M est, par rapport à la droite sur laquelle on a abaissé la perpendiculaire, du même côté que le sommet opposé du triangle ABC ou d'un côté différent.

Fig. 1.



Les quantités x, y, z sont les *coordonnées normales* de M. Les côtés de ABC indéfiniment prolongés partagent le plan en sept régions, que nous avons numérotées 0, 1, 2, 3, 1', 2', 3'; les signes des coordonnées d'un point appartenant à l'une de ces régions sont respectivement

$$(+++),\quad (-++),\quad (+-+),\quad (++-),$$
$$(+--),\quad (-+-),\quad (--+).$$

(¹) Dans cette Note, les *renvois* se rapportent au texte du *Traité* et à celui de la Note elle-même; pour éviter toute ambiguïté, nous ferons précéder ceux qui visent les numéros de cette dernière de la lettre N.

Appelons a, b, c, S les côtés et l'aire de ABC. Si le point M est situé dans l'intérieur du triangle, S est la somme des aires des triangles MBC, MCA, MAB ; d'où

$$ax + by + cz = 2S.$$

Cette équation subsiste dans toutes les positions de M.

Le point M est déjà déterminé, quand on donne, soit deux des coordonnées x, y, z; soit trois quantités, l, m, n proportionnelles à x, y, z; car, si l'on connaît les rapports $\frac{y}{z} = \frac{m}{n}$, $\frac{z}{x} = \frac{n}{l}$, on peut construire (217) les droites AM, BM. Les quantités l, m, n, prennent également le nom de *coordonnées normales* de M ; x, y, z sont alors les *coordonnées normales absolues*.

2. Soient α, β, γ trois nombres proportionnels aux aires des triangles MBC, MCA, MAB, ces aires étant considérées comme positives ou négatives, suivant que le triangle correspondant et le triangle fondamental sont situés du même côté de leur base commune ou de part et d'autre. Désignons par M_1, M_2, M_3 les points de rencontre des droites AM, BM, CM avec BC, CA, AB. Les triangles ABM, ACM ont même base AM, et les distances de B et C à cette droite sont proportionnelles aux segments BM_1 et CM_1. Par conséquent,

$$\frac{M_1B}{M_1C} = -\frac{\gamma}{\beta}, \quad \frac{M_2C}{M_2A} = -\frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{M_3A}{M_3B} = -\frac{\beta}{\alpha};$$

d'où un moyen de déterminer M, quand on connaît α, β, γ.

Les quantités α, β, γ ont reçu le nom de *coordonnées barycentriques* (1) de M. Le lecteur familiarisé avec les premières notions de Mécanique voit facilement que M est le centre de gravité de trois masses proportionnelles à α, β, γ et placées respectivement en A, B, C.

Les relations suivantes sont souvent utiles :

$$\frac{MM_1}{AM_1} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}, \quad \frac{MM_2}{BM_2} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \quad \frac{MM_3}{CM_3} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma};$$

$$\frac{\alpha}{ax} = \frac{\beta}{by} = \frac{\gamma}{cz}.$$

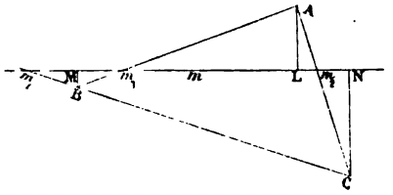
Les dernières formules permettent de passer des coordonnées barycentriques aux coordonnées normales et *vice versa*.

3. Des sommets du triangle de référence, abaissons les perpendicu-

(1) MM. J. Neuberg et G. de Longchamps ont fait un heureux usage de ces coordonnées dans la nouvelle Géométrie du triangle.

laires AL, BM, CN (*fig.* 2), sur une droite quelconque m du plan, et désignons par λ, μ, ν, des nombres proportionnels aux mesures de ces perpendiculaires et précédés du signe + ou du signe — d'après la convention suivante : les perpendiculaires abaissées de deux points sur une même droite sont de même signe ou de signes contraires, suivant que ces points sont du même côté de la droite ou de part et d'autre.

Fig. 2.



Si m_1, m_2, m_3 sont les points d'intersection de m avec BC, CA, AB, on a

$$\frac{m_1B}{m_1C} = \frac{\mu}{\nu}, \quad \frac{m_2C}{m_2A} = \frac{\nu}{\lambda}, \quad \frac{m_3A}{m_3B} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Les quantités λ, μ, ν déterminent donc complètement la droite m; ce sont les *coordonnées* de cette ligne. Les distances AL, BM, CN, sont les *coordonnées absolues* de m.

POINTS COMPLÉMENTAIRES (1).

4. Soient A', B', C' (*fig.* 3), les milieux des côtés du triangle fondamental ABC. Les triangles ABC, A'B'C', sont homothétiques (361); le rapport de similitude est égal à 2, et le centre d'homothétie est le point de concours G des médianes AA', BB', CC'. Si M, M', sont deux points homologues de ces triangles, les droites MA et M'A', MB et M'B', MC et M'C' sont parallèles et dans le rapport 2 : 1 ; G divise la droite MM' dans le même rapport.

M' est appelé le *point complémentaire* de M; M, le point *anticomplémentaire* de M'; A'B'C', le *triangle complémentaire* de ABC.

L'anticomplémentaire M'' de M se construit en prolongeant MG de GM'' = 2MG. Il est facile de voir que M' est le milieu du segment MM'' et que les points G, M'' divisent harmoniquement le segment MM'. Les

(1) L'idée de ces points est due à M. E. Hain (*Archives de Grunert*, 1885) : elle a été généralisée par M. de Longchamps (*Journal de Mathématiques élémentaires*, 1886).

parallèles menées par les sommets du triangle ABC aux côtés opposés forment un triangle $A''B''C''$, anticomplémentaire de ABC.

Appelons α, β, γ, les coordonnées barycentriques de M dans le triangle ABC; ce sont aussi celles de M' dans le triangle A'B'C'. Soient F, J, les points de rencontre de AM' avec BC, B'C', et soit F' celui de A'M' avec B'C'; on a (N., 2)

$$\frac{M'F'}{A'F'} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma},$$

d'où

$$\frac{M'F}{AF} = \frac{M'F}{2JF} = \frac{M'A'}{2F'A'} = \frac{\beta+\gamma}{2(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Donc, si α', β', γ', désignent les coordonnées de M' dans le triangle ABC,

$$\frac{\alpha'}{\beta+\gamma} = \frac{\beta'}{\gamma+\alpha} = \frac{\gamma'}{\alpha+\beta},$$

et inversement

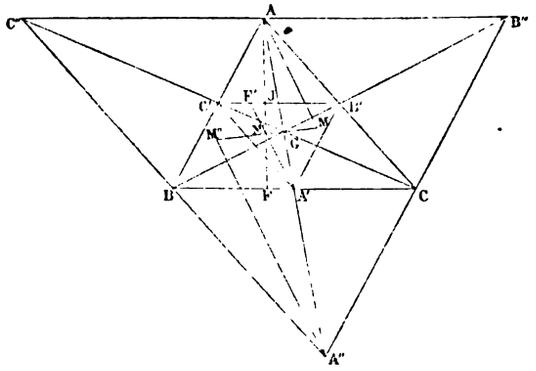
$$\frac{\alpha}{-\alpha'+\beta'+\gamma'} = \frac{\beta}{\alpha'-\beta'+\gamma'} = \frac{\gamma}{\alpha'+\beta'-\gamma'}.$$

Ainsi, les coordonnées barycentriques du complémentaire et de l'anticomplémentaire d'un point ayant pour coordonnées α, β, γ, sont

$$\beta+\gamma,\quad \gamma+\alpha,\quad \alpha+\beta;\quad -\alpha+\beta+\gamma,\quad \alpha-\beta+\gamma,\quad \alpha+\beta-\gamma.$$

5. Nous désignons par O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC; par AH_1, BH_2, CH_3, les hauteurs; par H le point de concours de

Fig. 3.



ces droites. H est l'*orthocentre* de ABC; le triangle $H_1H_2H_3$ est le *triangle orthique* de ABC.

O est le complémentaire de H; par conséquent, G divise la droite HO

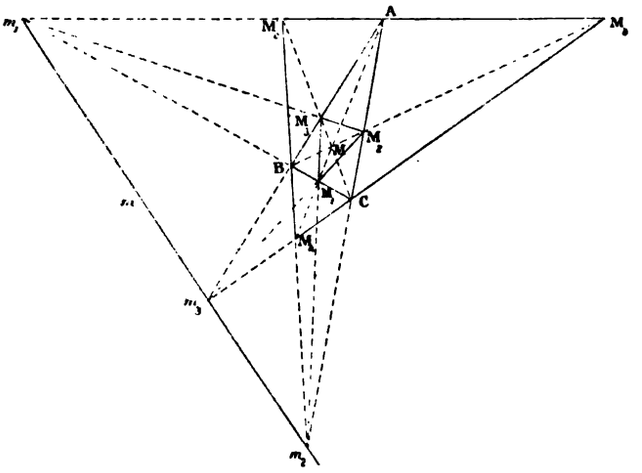
dans le rapport 2:1, et l'on a $AH = 2OA'$, $BH = 2OB'$, $CH = 2OC'$. Le complémentaire de O est le centre O_9 du cercle des neuf points de ABC (404). La droite HO est la *droite d'Euler* de ABC (*fig.* 5).

Les centres des cercles tangents aux trois côtés de ABC sont désignés par I, I_a, I_b, I_c. Le complémentaire et l'anticomplémentaire de I sont, respectivement, le centre du cercle inscrit au triangle A'B'C', et le centre du cercle inscrit à A"B"C".

DROITE ET POINTS HARMONIQUEMENT ASSOCIÉS A UN POINT DONNÉ (1).

6. Soit M un point quelconque du plan ABC (*fig.* 4). Les droites AM, BM, CM rencontrent BC, CA, AB aux points M_1, M_2, M_3; désignons par

Fig. 4.



m_1, m_2, m_3 les conjugués harmoniques de ces points par rapport aux extrémités des côtés correspondants du triangle ABC. On a les égalités (311 et 331)

$$\frac{M_1B}{M_1C}\,\frac{M_2C}{M_2A}\,\frac{M_3A}{M_3B} = -1,$$

$$\frac{M_1B}{M_1C} = -\frac{m_1B}{m_1C},\quad \frac{M_2C}{M_2A} = -\frac{m_2C}{m_2A},\quad \frac{M_3A}{M_3B} = -\frac{m_3A}{m_3B};$$

(1) Emile Lemoine, *Association française pour l'avancement des Sciences*, Congrès de Blois (1884).

d'où l'on déduit

$$\frac{m_1B}{m_1C}\,\frac{m_2C}{m_2A}\,\frac{m_3A}{m_3B} = 1,$$

$$\frac{m_1B}{m_1C}\,\frac{M_2C}{M_2A}\,\frac{M_3A}{M_3B} = 1,$$

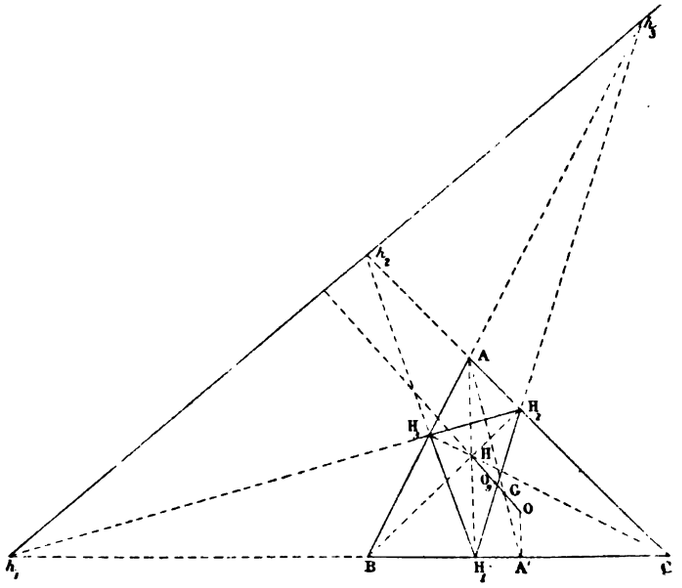
$$\frac{M_1B}{M_1C}\,\frac{m_2C}{m_2A}\,\frac{m_3A}{m_3B} = -1.$$

Par conséquent (310, 326) : 1° *Les points* m_1, m_2, m_3 *sont situés sur une même droite* m, *axe d'homologie du triangle fondamental* ABC *et du triangle* $M_1M_2M_3$ (*triangle pédal de* M);

2° *Les droites* Am_1, Bm_2, Cm_3 *forment un triangle* $M_aM_bM_c$, *dont les sommets sont situés sur les droites* AM, BM, CM. (Comparer avec le n° 315.)

La droite m est dite *harmoniquement associée* au point M; on l'appelle également *polaire trilinéaire de* M. M est le point *harmoniquement associé* à la droite m ou le *pôle trilinéaire* de m. Les points M_a, M_b, M_c,

Fig. 5.



sont *harmoniquement associés* à M; ce sont les conjugués harmoniques de M par rapport aux segments AM_1, BM_2, CM_3. Enfin, les polaires tri-

linéaires des points M_a, M_b, M_c, ou les droites $m_1M_2M_3$, $M_1m_2M_3$, $M_1M_2m_3$, sont *harmoniquement associées* à la droite $m_1m_2m_3$.

Si M_a est le point donné, les associés sont M, M_c, M_b.

Pour construire le pôle trilinéaire M d'une droite m, qui coupe les côtés du triangle fondamental en m_1, m_2, m_3, on trace les droites Am_1, Bm_2, Cm_3, qui forment un triangle $M_aM_bM_c$; les droites AM_a, BM_b, CM_c concourent au point cherché M.

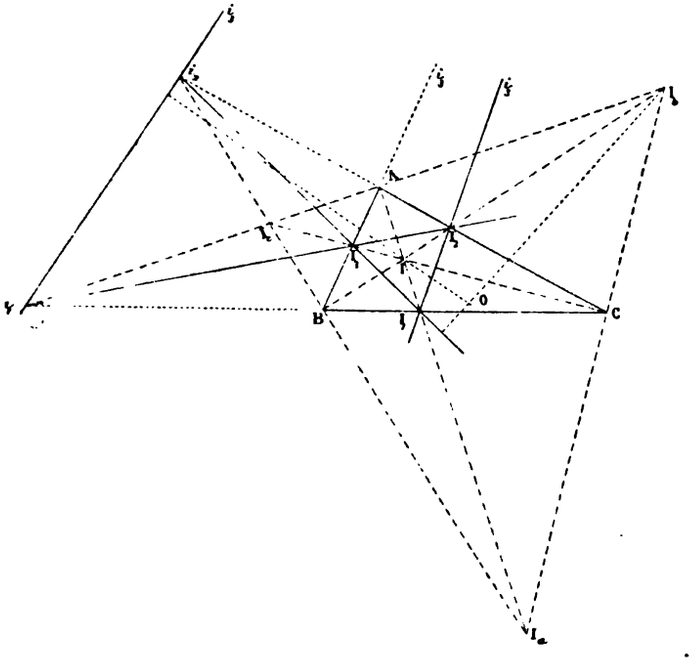
Les coordonnées d'une droite sont inversement proportionnelles aux coordonnées barycentriques de son pôle trilinéaire. Si α, β, γ sont les coordonnées barycentriques ou normales d'un point, celles des points associés sont

$$(-\alpha, \beta, \gamma), \quad (\alpha, -\beta, \gamma), \quad (\alpha, \beta, -\gamma).$$

Scolie.

7 1° Les associés du centre de gravité G sont les sommets du tri-

Fig. 6.



angle anticomplémentaire A″B″C″ (*fig.* 3); la polaire trilinéaire de G est la droite de l'infini.

2° La polaire trilinéaire $h_1h_2h_3$ de l'orthocentre H est l'axe d'homologie du triangle fondamental ABC et du triangle orthique $H_1H_2H_3$ (*fig.* 5); on l'appelle *axe orthique* de ABC.

L'axe orthique d'un triangle est l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle des neuf points; il est perpendiculaire à la droite d'Euler.

En effet, les quadrilatères inscriptibles $A'H_1H_2H_3$, BCH_2H_3 donnent

$$h_1H_1.h_1A' = h_1H_2.h_1H_3, \quad h_1B.h_1C = h_1H_2.h_1H_3,$$

d'où $h_1H_1.h_1A' = h_1B.h_1C$; par suite, h_1 appartient à l'axe radical des cercles O, O_9.

3° Les associés du centre I du cercle inscrit à ABC sont les centres I_a, I_b, I_c des cercles exinscrits; la polaire trilinéaire de I joint les pieds i_1, i_2, i_3 des bissectrices extérieures (*fig.* 6).

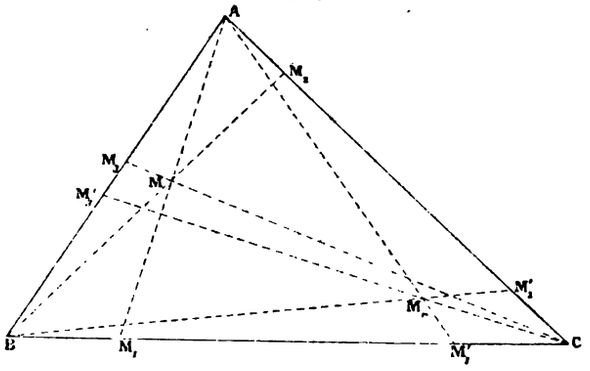
La droite $i_1i_2i_3$ est perpendiculaire à IO. En effet, ABC est le triangle orthique, et le cercle circonscrit O est le cercle des neuf points du triangle $I_aI_bI_c$; donc IO est la droite d'Euler du dernier triangle.

Soient I_1, I_2, I_3 les pieds des bissectrices intérieures de ABC. ABC étant le triangle orthique de chacun des triangles II_cI_b, I_cII_a, I_bI_aI. on démontre facilement que *les droites* I_2I_3, I_3I_1, I_1I_2 *sont respectivement perpendiculaires aux droites* OI_a, OI_b, OI_c.

POINTS ET TRANSVERSALES RÉCIPROQUES (1).

8. Lorsque deux segments AB, CD appartenant à la même droite ont même milieu, nous dirons que C et D sont des *points isotomiques* par

Fig. 7.



rapport à A et B; que D est l'isotomique de C. L'isotomique d'un point

(1) G. de Longchamps, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1866.

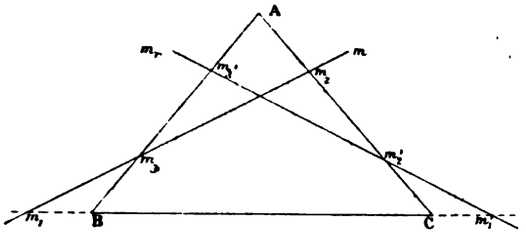
pris sur un côté du triangle de référence est le symétrique de ce point par rapport au milieu du côté.

THÉORÈME.

1° *Soient* M_1, M_2, M_3 (*fig.* 7) *les points de rencontre des côtés* BC, CA, AB *d'un triangle avec les droites joignant les sommets opposés à un même point* M *du plan, et soient* M'_1, M'_2, M'_3 *les isotomiques de* M_1, M_2, M_3 : *les droites* AM'_1, BM'_2, CM'_3 *concourent en un même point* M_r.

2° *Soient* m_1, m_2, m_3 (*fig.* 8) *les points de rencontre des côtés* BC, CA, AB *d'un triangle avec une transversale quelconque* m, *et soient* m'_1, m'_2, m'_3, *les isotomiques de* m_1, m_2, m_3; *les points* m'_1, m'_2, m'_3 *sont situés sur une seconde transversale* m_r.

Fig. 8.



Ces propositions résultent immédiatement des n°s 313 et 310.

Les points M, M_r ont reçu le nom de *points réciproques*. Les coordonnées barycentriques de l'un sont inverses de celles de l'autre point.

Les droites m, m_r sont des *transversales réciproques;* les coordonnées de m_r sont égales aux inverses de celles de m.

POINTS INVERSES (1).

9. Lorsque deux angles de même sommet ont même bissectrice, nous dirons que les deux côtés de l'un des angles sont des *droites isogonales* par rapport à l'autre angle. L'*isogonale* d'une droite menée par un sommet du triangle de référence est la symétrique de cette droite par rapport à la bissectrice de l'angle correspondant du triangle.

LEMME.

Soient P, Q *deux points quelconques pris sur deux droites isogonales par rapport à l'angle* BAC (*fig.* 9).

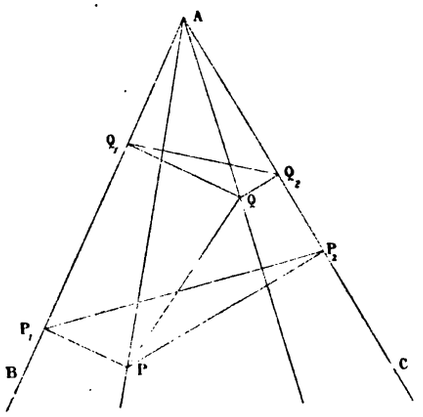
(1) E. Vigarié, *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1885.

1° *Les distances de* P *aux côtés de l'angle* BAC *sont inversement proportionnelles à celles de* Q *aux mêmes côtés;*

2° *Les projections des points* P, Q *sur les deux côtés de l'angle* BAC *sont quatre points d'une même circonférence;*

3° *La droite qui joint les projections de l'un des points* P, Q *sur les côtés de l'angle* BAC *est perpendiculaire à celle qui unit l'autre point au sommet de l'angle.*

Fig. 9.



1° Soient P_1, Q_1 les projections des points P, Q sur AB, et soient P_2, Q_2 leurs projections sur AC. Si l'on retourne le quadrilatère AQ_2QQ_1 autour de la bissectrice de l'angle BAC, il devient homothétique au quadrilatère AP_1PP_2. Il en résulte que

$$\frac{QQ_2}{QQ_1} = \frac{PP_1}{PP_2}, \quad \text{ou} \quad PP_1 . QQ_1 = PP_2 . QQ_2 .$$

2° Les droites P_1P_2, Q_1Q_2 sont antiparallèles par rapport à l'angle BAC ; car leurs directions sont symétriques par rapport à la bissectrice de cet angle. Le quadrilatère $P_1P_2Q_1Q_2$ est donc inscriptible; le centre de la circonférence circonscrite est au milieu de la droite PQ, à la rencontre des perpendiculaires élevées aux milieux des cordes P_1Q_1, P_2Q_2.

3° Le quadrilatère AP_1PP_2 étant inscriptible, on a angulairement

$$AP_2P_1 = APP_1 = 90° - PAP_2 = 90° - P_2AQ;$$

donc les droites AQ, P_1P_2 sont rectangulaires.

THÉORÈME.

10. *Soit* M *un point quelconque du plan du triangle* ABC (*fig.* 10) :

1° *Les isogonales des droites* AM, BM, CM *concourent en un même point* M_l;

2° *Les projections des points* M, M_l *sur les côtés du triangle* ABC *sont six points d'une même circonférence;*

3° *Les côtés du triangle podaire* (1) *de l'un des points* M, M_l *sont, respectivement, perpendiculaires aux droites joignant l'autre point à* A, B, C;

4° *Les coordonnées normales de* M_l *sont inversement proportionnelles à celles de* M.

1° et 2°. La première partie du théorème résulte du n° 313. On peut également l'établir, en même temps que la seconde partie, en s'appuyant sur le lemme qui précède.

En effet, soit M_l le point où se coupent les isogonales des droites AM, BM, et soient X, Y, Z, X_l, Y_l, Z_l les projections des points M, M_l sur les côtés du triangle ABC. La circonférence décrite du milieu de la droite MM_l comme centre et passant par Z et Z_l contient les points Y, Y_l, X, X_l (N., 9, 2°). Comme elle est complètement déterminée par les trois points X, Y, Z, le point M_l est aussi situé sur l'isogonale de CM.

3° et 4°. Ces propriétés résultent immédiatement de (N., 9, 1° et 3°).

Scolie.

11. Les points M, M_l sont dits *inverses* ou *conjugués isogonaux par rapport au triangle* ABC.

Les centres I, I_a, I_b, I_c des cercles tangents aux trois côtés de ABC sont, chacun leurs propres inverses.

L'orthocentre H et le centre O du cercle circonscrit (*fig.* 5) sont des points inverses; car, la tangente en A à ce cercle et le côté BC étant antiparallèles par rapport à l'angle BAC, la hauteur AH et le rayon AO sont des lignes isogonales. Il suit de là que les milieux des côtés et les pieds des hauteurs de ABC sont sur une même circonférence.

L'inverse d'un point M *de la circonférence circonscrite à un triangle est à l'infini sur la direction perpendiculaire à la droite de Simson* (169, 11°) *de ce point.* En effet, cette droite est perpendiculaire à l'isogonale de chacune des droites AM, BM, CM.

---

(1) Nous appelons *triangle podaire* d'un point M, par rapport à un triangle ABC, le triangle XYZ qui a pour sommets les projections de M sur les côtés de ABC; inversement, le triangle ABC est appelé le *triangle antipodaire* de M par rapport au triangle XYZ.

TRIANGLES ORTHOLOGIQUES.

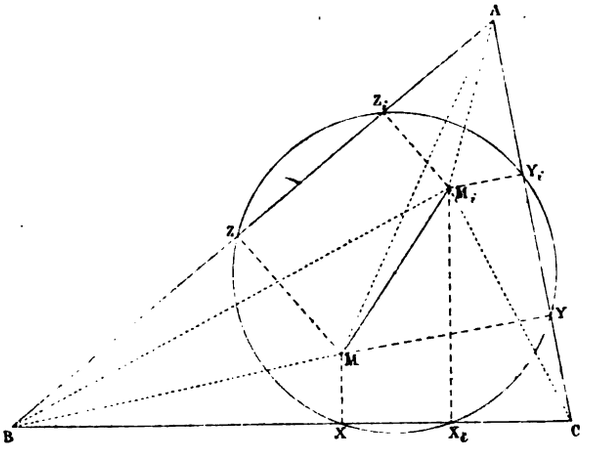
THÉORÈME.

12. *Si les perpendiculaires menées des sommets d'un triangle* **ABC** *sur les côtés correspondants d'un triangle* $A_1B_1C_1$ *se coupent en un même point* D, *les perpendiculaires menées des sommets du triangle* $A_1B_1C_1$ *sur les côtés correspondants de* ABC *concourent aussi en un même point* D_1.

Il suffit d'établir cette proposition pour un triangle homothétique à $A_1B_1C_1$. Voici trois figures où elle s'aperçoit immédiatement.

1° Soient, par rapport au triangle ABC, D_i l'inverse de D, et $X_iY_iZ_i$ le triangle podaire de D_i (*fig.* 10). Les droites AD, BD, CD sont perpendiculaires aux côtés du triangle XYZ, et les droites D_iX_i, D_iY_i, D_iZ_i sont perpendiculaires aux côtés du triangle ABC.

Fig. 10.



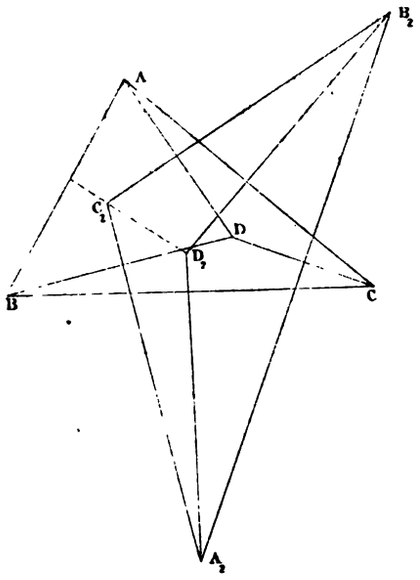
2° Soient A_2, B_2, C_2, D_2 les centres des cercles circonscrits aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC (*fig.* 11). Les côtés du triangle $A_2B_2C_2$ sont perpendiculaires aux milieux des droites DA, DB, DC, et les droites D_2A_2, D_2B_2, D_2C_2 sont perpendiculaires aux milieux des côtés du triangle ABC.

3° Construisons le triangle polaire de ABC par rapport à une circonférence décrite de D comme centre avec un rayon quelconque d (*fig.* 12). A cet effet, nous déterminons sur les droites DA, DB, DC les points X', Y', Z' satisfaisant aux égalités

$$(1) \qquad DA.DX' = DB.DY' = DC.DZ' = d^2,$$

et nous menons en X', Y', Z' des perpendiculaires sur DA, DB, DC: ces perpendiculaires sont les côtés du triangle cherché A'B'C'. Ou bien, nous abaissons de D des perpendiculaires DX, DY, DZ sur BC, CA, AB

Fig. 11.



et nous déterminons sur ces droites les points A', B', C' par les conditions

$$DX.DA' = DY.DB' = DZ.DC' = d^2. \qquad (2)$$

Scolie.

13. Les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont dits *orthologiques*.

Le théorème (N., 12) est susceptible de l'énoncé suivant qui en fait mieux ressortir le véritable caractère :

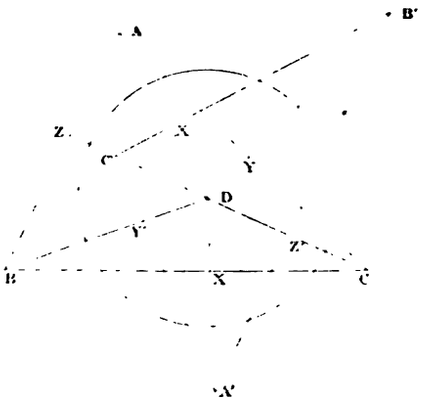
Si l'on considère une figure composée d'un triangle ABC *et de trois rayons vecteurs* AD, BD, CD, *on peut toujours construire une seconde figure composée d'un triangle* $A_1B_1C_1$ *dont les côtés sont perpendiculaires aux rayons vecteurs* AD, BD, CD, *et de trois rayons vecteurs* A_1D_1, B_1D_1, C_1D_1 *perpendiculaires aux côtés du triangle* ABC.

Faisons tourner la figure $A_1B_1C_1D_1$ d'un angle quelconque dans son plan ou retournons-la dans son plan; nous aurons le théorème suivant:

Étant données dans un même plan deux quadrangles complets (1) ABCD. $A_1B_1C_1D_1$. *si cinq côtés du premier font avec les côtés opposés du second le même angle* α, *ou si leurs directions sont symétriques par rapport à un même axe, des directions des côtés opposés du second, il existe la même relation entre les sixièmes côtés.*

Les quadrangles ABCD. $A_1B_1C_1D_1$ considérés ici, sont dits *métapolaires. Si on les place dans un même plan de manière que deux sommets de même nom, par exemple* A *et* A_1, *coïncident et que les côtés opposés soient perpendiculaires, les triangles formés par les sommets restants,* BCD *et* $B_1C_1D_1$, *deviennent polaires réciproques par rapport à un certain cercle décrit du sommet commun* A *comme centre.*

Fig. 1.



Les égalités (1) et (2) (N.. 12) donnent la propriété suivante : *Les distances d'un sommet* A *du premier quadrangle aux sommets et aux côtés du triangle* BCD *sont inversement proportionnelles aux distances du sommet* A_1 *de même nom du second quadrangle aux côtés et aux sommets du triangle* $B_1C_1D_1$.

MÉTAPÔLES DE DEUX TRIANGLES. — POINTS JUMEAUX.

14. Nous appelons *métapôle* d'un triangle ABC par rapport à un

(1) Un *quadrangle complet* est la figure déterminée par quatre points A, B, C, D. Ces points sont les *sommets*, et les droites qui les joignent deux à deux sont les *côtés* du quadrangle. Les côtés se partagent en trois couples de *côtés opposés*, à savoir AB et CD, AC et BD, AD et BC.

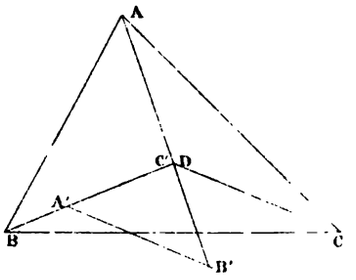
Les côtés opposés de deux quadrangles désignés par ABCD, A'B'C'D' sont AB et C'D', AC et B'D', etc.

autre triangle $A_1B_1C_1$, un point D du plan ABC duquel on voit les côtés du triangle ABC sous des angles égaux aux angles ou aux suppléments des angles du triangle $A_1B_1C_1$.

Pour voir comment le point D se déplace lorsque la forme du triangle $A_1B_1C_1$ varie, nous renversons la question. A cet effet, nous supposons le point D successivement dans les différentes régions dans lesquelles le plan ABC est partagé par les côtés du triangle ABC (N., 1), et nous construisons un triangle A'B'C' ayant ses côtés parallèles aux droites DA, DB, DC.

Lorsque le point D est intérieur au triangle ABC (*fig.* 13), on peut mener les côtés B'C', C'A', A'B' du triangle auxiliaire parallèles à DA, DB, DC et dirigés dans le même sens; les triangles ABC, A'B'C' ont donc même orientation. D est à l'intersection des arcs de trois segments capables des angles $180° - A'$, $180° - B'$, $180° - C'$, construits sur BC, CA, AB

Fig. 13



et tournés vers l'intérieur du triangle ABC. L'angle BDC étant plus grand que BAC, on a $180° - A' > A$, ou $A + A' < 180°$; de même, $B + B' < 180°$, $C + C' < 180°$.

Soit D un point de la région 1', et soit $D\alpha$ le prolongement de AD (*fig.* 14). Le triangle A'B'C' peut être construit de manière que ses côtés B'C', C'A', A'B' soient dirigés dans le même sens que les droites $D\alpha$, DB, DC; les sens de rotation ABC, αBC étant identiques, les triangles A'B'C', ABC ont encore même orientation. Les angles BDC, CDA, ADB étant égaux à $180° - A'$, B', C', on peut encore dire que les circonférences des segments capables des angles $180° - A'$, $180° - B'$, $180° - C'$, construits sur BC, CA, AB et tournés vers l'intérieur du triangle ABC, se coupent en D. L'angle BDC est plus petit que BAC, d'où $A + A' > 180°$. On trouve, de la même manière, que pour un point de la région 2' ou 3', on a respectivement $B + B' > 180°$, $C + C' > 180°$. D'ailleurs, une seule des sommes $A + A'$, $B + B'$, $C + C'$ peut surpasser 180°.

Enfin, considérons un point D situé dans la région 1 (*fig.* 15); appelons

Dα le prolongement de AD. Le triangle auxiliaire A'B'C' peut avoir ses côtés B'C', C'A', A'B' dirigés dans le même sens que les droites Dα, DB, DC. Les sens de rotation ABC, αBC étant différents, les triangles ABC, A'B'C' sont de sens contraires. Les circonférences DBC, DCA, DAB appartiennent aux segments capables des angles A', B', C' construits sur les côtés du triangle ABC vers l'intérieur. Suivant que le point D est intérieur ou extérieur au cercle ABC, on a $A - A' > o$, $B - B' < o$, $C - C' < o$, ou $A - A' < o$, $B - B' > o$, $C - C' > o$. Des inégalités analogues s'appliquent aux points des régions 2 et 3.

De cette analyse, on tire les conclusions suivantes :

1° Étant donnés deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$, les circonférences des segments capables des angles $180° - A_1$, $180° - B_1$, $180° - C_1$, construits sur BC, CA, AB vers l'intérieur de ABC, se coupent en un même point D tel, que le triangle ayant ses côtés parallèles à DA, DB, DC est semblable à $A_1B_1C_1$ et de même sens que ABC. Ce point est intérieur au triangle ABC, si les trois sommes $A + A_1$, $B + B_1$, $C + C_1$ sont inférieures à 180°; il tombe, respectivement, dans les régions 1', 2', 3', si l'une des sommes $A + A_1$, $B + B_1$, $C + C_1$ est supérieure à 180°.

Fig. 14.

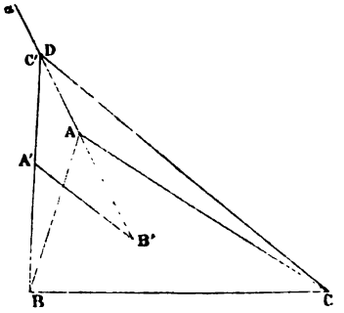
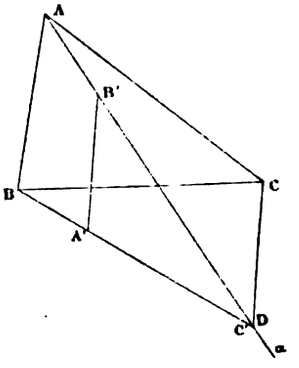


Fig. 15.



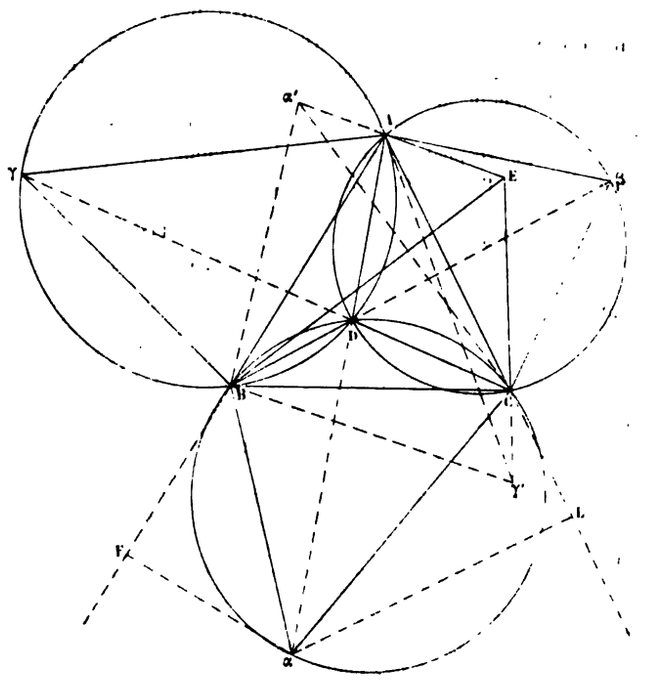
2° Les circonférences des segments capables des angles A_1, B_1, C_1 construits sur BC, CA, AB vers l'intérieur de ABC, se coupent en un même point E tel, que le triangle ayant ses côtés parallèles à DA, DB, DC est semblable à $A_1B_1C_1$ et de sens opposé à ABC. Ce point appartient à la région 1, si la différence $A - A_1$ a un signe contraire à celui des différences $B - B_1$, $C - C_1$; et alors il est intérieur ou extérieur au cercle ABC suivant que le signe de $A - A_1$ est + ou —, etc.

15. Un triangle ABC a donc, par rapport à un autre triangle $A_1B_1C_1$, deux métapôles D, E; pour les distinguer, nous dirons que D est le

premier métapôle, E le *second métapôle*. Toutefois, lorsque les triangles sont semblables, le premier métapôle est l'orthocentre de ABC, et le second est un point quelconque de la circonférence ABC ; il résulte de là qu'*un triangle* A'B'C' *dont les côtés sont parallèles aux droites joignant les sommets d'un triangle* ABC *à un point quelconque de la circonférence* ABC, *est inversement semblable au triangle* ABC.

Soient (*fig.* 16) α, β, γ les secondes rencontres des droites AD, BD, CD avec les circonférences BDC, CDA, ADB. D'après la dernière remarque,

Fig. 16.



les triangles αBC, AβC, ABγ sont inversement semblables au triangle dont les côtés sont parallèles à DA, DB, DC. D'où ce théorème :

Si, sur les côtés d'un triangle ABC, *on construit vers l'extérieur les triangles* αBC, AβC, ABγ *semblables à un triangle donné* $A_1B_1C_1$, *les droites* Aα, Bβ, Cγ *se coupent au premier métapôle* D *des triangles* ABC, $A_1B_1C_1$. *Si l'on construit les triangles* α'BC, Aβ'C, ABγ' *sem-*

blables à $A_1B_1C_1$ *et tournés vers l'intérieur de* ABC, *les droites* $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ *concourent au second métapôle* E.

16. Ce théorème nous conduit aux expressions des coordonnées des métapôles. Soient, en effet, x, y, z les coordonnées normales de D; menons αF, αL perpendiculaires à AB, AC. Nous aurons (*fig.* 16)

$$\frac{y}{z} = \frac{\alpha L}{\alpha F} = \frac{\alpha C \sin \alpha CL}{\alpha B \sin \alpha BF};$$

or

$$\alpha CL = 180^\circ - (C + C_1), \quad \alpha BF = 180^\circ - (B + B_1),$$

$$\frac{\alpha C}{\alpha B} = \frac{\sin \alpha BC}{\sin \alpha CB} = \frac{\sin B_1}{\sin C_1};$$

donc

$$\frac{y}{z} = \frac{\sin B_1 \sin (C + C_1)}{\sin C_1 \sin (B + B_1)}.$$

On conclut de là

$$x : y : z = \frac{\sin A_1}{\sin (A + A_1)} : \frac{\sin B_1}{\sin (B + B_1)} : \frac{\sin C_1}{\sin (C + C_1)}.$$

Les coordonnées barycentriques de D sont proportionnelles à ax, by, cz, ou à

$$\frac{\sin A \sin A_1}{\sin (A + A_1)}, \quad \frac{\sin B \sin B_1}{\sin (B + B_1)}, \quad \frac{\sin C \sin C_1}{\sin (C + C_1)},$$

ou encore à

$$\frac{1}{\cot A + \cot A_1}, \quad \frac{1}{\cot B + \cot B_1}, \quad \frac{1}{\cot C + \cot C_1}.$$

Pour celles du second métapôle E, on trouve

$$\frac{1}{\cot A - \cot A_1}, \quad \frac{1}{\cot B - \cot B_1}, \quad \frac{1}{\cot C - \cot C_1}.$$

Soient D_1, E_1 les métapôles du triangle $A_1B_1C_1$ par rapport au triangle ABC. Les expressions précédentes montrent que *les points* D, D_1 *ont les mêmes coordonnées barycentriques, l'un dans le triangle* ABC, *l'autre dans le triangle* $A_1B_1C_1$; *les points* E, E_1 *jouissent de la même propriété.*

Les métapôles D, D_1 appartiennent toujours à des régions correspondantes des triangles ABC, $A_1B_1C_1$; il en est de même des métapôles E, E_1, avec cette particularité que l'un est à l'intérieur et l'autre à l'extérieur du cercle circonscrit au triangle correspondant.

Les quadrangles ABCD et $A_1B_1C_1D_1$ sont métapolaires.

17. Entre les points D, E, il existe une relation remarquable : les deux faisceaux D (ABC), E (ABC) sont symétriquement égaux. Deux points ainsi associés par rapport à un triangle ont reçu le nom de *points jumeaux*.

CENTRES MÉTAHARMONIQUES DE DEUX TRIANGLES. POINTS TRIPOLAIREMENT ASSOCIÉS.

18. Étant donné un triangle ABC, si sur les rayons vecteurs DA, DB, DC issus d'un point D choisi arbitrairement dans le plan, on prend des segments DA_1, DB_1, DC_1 tels que

$$DA.DA_1 = DB.DB_1 = DC.DC_1,$$

les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont dits *métaharmoniques* par rapport à D.

Si l'on ne considère que la forme du triangle $A_1B_1C_1$, on prendra pour les points A_1, B_1, C_1 les secondes intersections des droites DA, DB, DC avec la circonférence ABC. L'axe d'homologie des deux triangles est alors la polaire de D par rapport à cette circonférence, et divise, avec le point D, les segments AA_1, BB_1, CC_1 harmoniquement. Si D est sur la circonférence, les points A_1, B_1, C_1 sont en ligne droite (388).

THÉORÈME.

19. 1° *Le triangle métaharmonique* $A_1B_1C_1$ *et le triangle podaire* XYZ *d'un triangle* ABC *par rapport à un même point* D *sont des figures directement semblables;* 2° *Les côtés de ces triangles sont proportionnels aux produits des côtés opposés du quadrangle* ABCD; 3° *Leurs angles sont donnés, en grandeur et en signe, par les formules*

$$(1)\qquad \begin{cases} YXZ = B_1A_1C_1 = BDC - BAC, \\ ZYX = C_1B_1A_1 = CDA - CBA, \\ XZY = A_1C_1B_1 = ADB - ACB. \end{cases}$$

Dans l'énoncé et la démonstration de ce théorème, nous observons les conventions établies aux nos 304 et 305 : YXZ, par exemple, désigne l'angle dont il faut faire tourner la demi-droite YX pour la faire coïncider avec la demi-droite YZ, cet angle étant considéré comme positif ou comme négatif, suivant que la rotation s'effectue dans un sens ou dans l'autre; de plus, deux angles qui diffèrent d'un multiple de 2π peuvent se substituer l'un à l'autre. Avec ces conventions, si A, B, C, D sont quatre points d'une même circonférence, on peut écrire *angle* ACB = *angle* ADB, même dans le cas où C et D sont situés de part et d'autre de la corde AB.

1° Les quadrilatères inscriptibles DXBZ, DXCY, ABA_1B_1, ACA_1C_1

donnent angulairement

$$(2)\qquad \begin{cases} \text{DXY} = \text{DCY} = \text{C}_1\text{CA} = \text{C}_1\text{A}_1\text{A}, \\ \text{DXZ} = \text{DBZ} = \text{B}_1\text{BA} = \text{B}_1\text{A}_1\text{A}. \end{cases}$$

En soustrayant la première égalité de la seconde et observant que

$$\text{DXZ} - \text{DXY} = \text{YXZ}, \quad \text{B}_1\text{A}_1\text{A} - \text{C}_1\text{A}_1\text{A} = \text{B}_1\text{A}_1\text{C}_1,$$

on trouve

$$\text{YXZ} = \text{B}_1\text{A}_1\text{C}_1;$$

par analogie,

$$\text{ZYX} = \text{C}_1\text{B}_1\text{A}_1 \quad \text{et} \quad \text{XZY} = \text{A}_1\text{C}_1\text{B}_1.$$

Les triangles $\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1$, XYZ sont donc directement semblables.

On peut encore conclure, des égalités (2), que le point D rapporté à l'un des triangles semblables XYZ, $\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1$, a pour homologue dans l'autre triangle son inverse pris par rapport à ce dernier.

2° Désignons par μ le produit $\text{DA}.\text{DA}_1$, par a, b, c les côtés de ABC, par α, β, γ les distances DA, DB, DC. Nous aurons (386)

$$\text{B}_1\text{C}_1 = \frac{\text{BC}}{\text{DB}.\text{DC}}\,\mu = \frac{\mu}{\alpha\beta\gamma}\,a\alpha, \quad \text{C}_1\text{A}_1 = \frac{\mu}{\alpha\beta\gamma}\,b\beta, \quad \text{A}_1\text{B}_1 = \frac{\mu}{\alpha\beta\gamma}\cdot c\gamma;$$

par conséquent

$$\frac{\text{B}_1\text{C}_1}{a\alpha} = \frac{\text{C}_1\text{A}_1}{b\beta} = \frac{\text{A}_1\text{B}_1}{c\gamma} = \frac{\mu}{\alpha\beta\gamma}.$$

Soient O le centre et R le rayon du cercle ABC. Le milieu O′ de AD étant le centre d'une circonférence passant par les points A, Y, Z, D, les triangles YO′Z, BOC sont semblables; d'où

$$\frac{\text{YZ}}{\text{BC}} = \frac{\text{YO}'}{\text{CO}},$$

de sorte que

$$\frac{\text{YZ}}{a\alpha} = \frac{\text{ZX}}{b\beta} = \frac{\text{XY}}{c\gamma} = \frac{1}{2\text{R}}.$$

3° Des égalités (2), on déduit

$$(3)\qquad \text{DXZ} - \text{DXY} = \text{DBZ} - \text{DCY}.$$

Or, si a, b, c, d désignent quatre semi-droites (408), on a l'identité

$$\text{angle } ab - \text{angle } cd = \text{angle } ac - \text{angle } bd,$$

qu'on vérifie aisément en rapportant les angles à une même droite-origine. En l'appliquant au second membre de la relation (3), on obtient

$$\text{YXZ} = \text{BDC} - \text{BAC}.$$

SCOLIE.

20. 1° Le théorème précédent renferme cette propriété importante du quadrangle complet, dont nous ne pouvons donner ici que l'énoncé :

A, B, C, D *étant quatre points d'un même plan, on a l'équipollence*

$$AB.CD + AD.BC + AC.DB = 0;$$

autrement dit, *les produits* AB.CD, AD.BC, AC.DB *sont équipollents aux trois côtés d'un triangle.*

2° Appelons *triangle associé à un quadrangle complet* le triangle dont les côtés ont pour valeurs numériques les produits des côtés opposés du quadrangle. On voit que ce triangle est semblable à chacun des triangles podaires ou métaharmoniques de l'un des sommets du quadrangle par rapport au triangle des trois autres sommets. Au n° 240, il a été donné une autre construction d'un triangle semblable au triangle associé.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer le théorème suivant :

La forme du triangle associé à un quadrangle complet ne change pas, si l'on soumet les sommets de ce quadrangle à une transformation par rayons vecteurs réciproques.

3° Soient S_a, S_b, S_c, S_d les aires des triangles BCD, CDA, DAB, ABC, et soient μ_a, μ_b, μ_c, μ_d les puissances des cercles circonscrits à ces triangles, respectivement par rapport aux points A, B, C, D; enfin, désignons par T l'aire du triangle associé au quadrangle ABCD, c'est-à-dire la quantité (428)

$$\frac{1}{4}\sqrt{(a\alpha+b\beta+c\gamma)(-a\alpha+b\beta+c\gamma)(a\alpha-b\beta+c\gamma)(a\alpha+b\beta-c\gamma)}.$$

Nous avons trouvé ci-dessus (N., 19) les relations

$$(4)\qquad \frac{B_1C_1}{a\alpha}=\frac{C_1A_1}{b\beta}=\frac{A_1B_1}{c\gamma}=\frac{\mu_d}{\alpha\beta\gamma}.$$

Il en résulte que

$$\frac{B_1C_1.C_1A_1.A_1B_1}{abc}=\frac{\mu^3{}_d}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}.$$

Les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ étant inscrits dans le même cercle, la proposition du n° 428 (1°) donne

$$(5)\qquad \frac{\text{aire } A_1B_1C_1}{S_d}=\frac{\mu^3{}_d}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}.$$

Les relations (4) donnent encore

$$(6)\qquad \frac{\text{aire } A_1B_1C_1}{T}=\left(\frac{B_1C_1}{a\alpha}\right)^2=\frac{\mu^3{}_d}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}.$$

En combinant les égalités (5) et (6), on voit que

$$T = \mu_a S_a = \mu_b S_b = \mu_c S_c = \mu_d S_d. \tag{7}$$

Les équations (7) sont dues à von Staudt (*J. de Crelle*, t. 57, p. 88.)

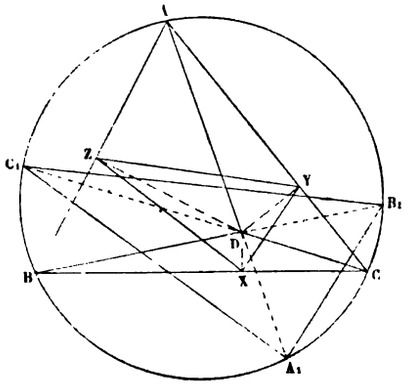
21. Nous appelons *centre métaharmonique* de deux triangles ABC, A'B'C', un point D du plan ABC, tel que le triangle métaharmonique ou podaire de ABC par rapport à ce point soit semblable à A'B'C'.

Soit D_i l'inverse (N., 9 et *suiv.*) du point D dans le triangle ABC; les côtés du triangle podaire de D étant perpendiculaires aux droites AD_i, BD_i, CD_i, D_i est le métapôle (N., 14 et *suiv.*) de ABC, A'B'C'.

Désignons par D_i, E_i les deux métapôles des triangles donnés; les inverses D, E de ces points dans le triangle ABC sont les centres métaharmoniques de ABC, A'B'C'.

Le *premier centre métaharmonique* D est à l'intérieur du cercle ABC; on peut le déterminer par l'intersection des circonférences des segments capables des angles $A + A'$, $B + B'$, $C + C'$ décrits sur BC, CA, AB vers l'intérieur du triangle ABC (N., 19, 3°). Si la somme $A + A'$ est supérieure à 180°, le point D se trouve dans la région 1 (N., 1) et le segment décrit sur BC est capable de l'angle $A + A' - 180°$.

Fig. 17.



Le *second centre métaharmonique* E est à l'extérieur du cercle ABC. Il appartient aux circonférences des segments capables des angles $A - A'$, $B - B'$, $C - C'$ décrits sur BC, CA, AB vers l'intérieur du triangle ABC. Si la différence $A - A'$ est négative, on décrit sur BC, vers l'extérieur du triangle ABC, un segment capable de l'angle $A' - A$.

Le triangle métaharmonique et le triangle podaire du premier centre D par rapport au triangle ABC sont de même sens que ce dernier; ceux du second centre E ont une orientation différente.

THÉORÈME.

22. *Soient* D, E *les deux centres métaharmoniques du triangle* ABC *par rapport au triangle* A'B'C' (*fig.* 17) : 1° *Les rayons vecteurs de* D *sont proportionnels à ceux de* E; 2° *Les points* D, E *divisent harmoniquement un même diamètre de la circonférence* ABC.

1° Soient XYZ, X'Y'Z' les triangles podaires des points D, E. On a (N., 19)

$$YZ = \frac{a.AD}{2R}, \quad Y'Z' = \frac{a.AE}{2R},$$

d'où

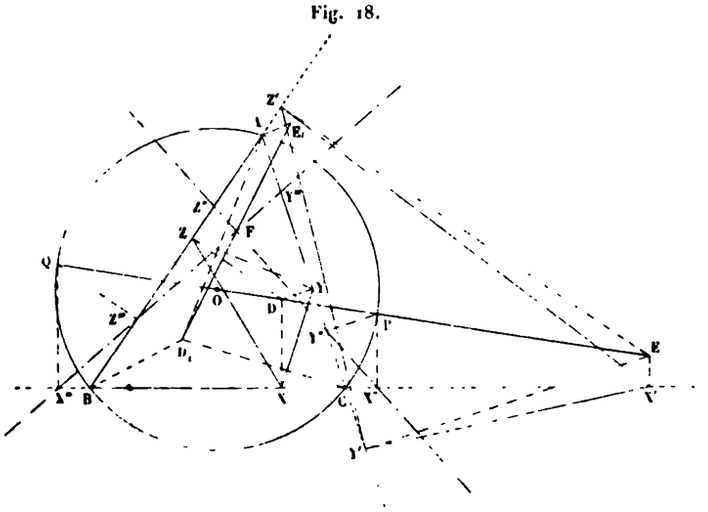
$$\frac{YZ}{Y'Z'} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE}.$$

2° Soient P, Q (*fig.* 18) les points qui divisent le segment DE harmoniquement dans le rapport $\frac{YZ}{Y'Z'}$. La circonférence décrite sur PQ comme diamètre passe par A, B, C (187).

Scolie.

23. 1° Les droites de Simson, X''Y''Z'' et X'''Y'''Z''' (*fig.* 18), des points P

Fig. 18.



et Q par rapport au triangle ABC divisent les segments XX', YY', ZZ', addi-

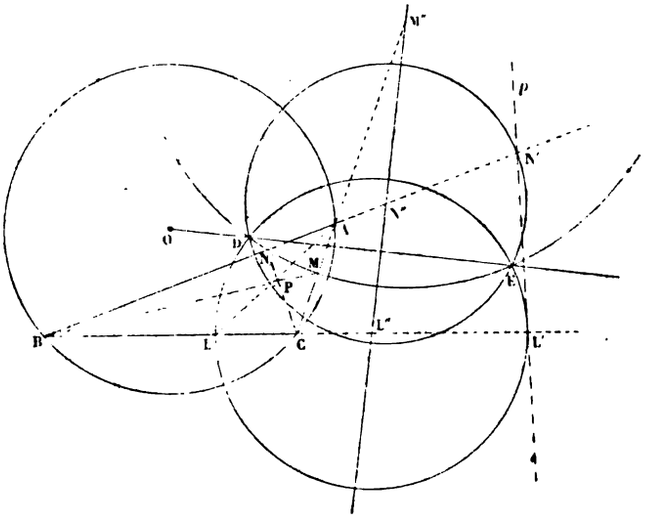
tivement et soustractivement, dans le rapport $\frac{DP}{EP} = \frac{ZY}{Y'Z'}$; donc ce sont les droites doubles des triangles inversement semblables XYZ, X'Y'Z'; leur intersection F est le point double de ces triangles. On peut démontrer que F est au milieu de la distance des points D_i, E_i, inverses de D, E par rapport au triangle ABC, et qu'il appartient à la circonférence des neuf points.

2° *Trouver, dans le plan du triangle* ABC, *un point dont les distances aux sommets soient proportionnelles aux nombres donnés l, m, n.*

Ce problème, d'après ce qui précède, admet pour solutions deux points qui divisent harmoniquement un diamètre du cercle ABC; on parvient au même résultat en appliquant le lieu géométrique du n° 187.

En effet, soient (*fig.* 19) L, L' les points qui divisent le côté BC harmoniquement dans le rapport $m : n$, et soient N, N' les points qui divisent AB harmoniquement dans le rapport $l : m$. Les circonférences décrites sur LL' et sur NN' comme diamètres se coupent en deux points D et E (réels ou imaginaires), qui résolvent le problème proposé.

Fig. 19.



Comme elles sont orthogonales à la circonférence ABC (383), leur corde commune passe par le centre de cette courbe et est divisée harmoniquement par cette ligne.

Soient M, M' les points qui partagent CA dans le rapport $n : l$. Les droites AL, BM, CN se coupent en un même point P qui a pour coordonnées barycentriques $\frac{1}{l}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}$; les points L', M', N' sont situés sur une même droite p, polaire trilinéaire de P. Les cercles qui ont pour diamètres respectivement LL', MM', NN' ont même axe radical DE; leurs centres L'', M'', N'', d'après une propriété des divisions harmoniques, divisent BC, CA, AB dans les rapports $m^2 : n^2$, $n^2 : l^2$, $l^2 : m^2$; la droite L''M''N'' est perpendiculaire au milieu du segment DE, et a pour coordonnées l^2, m^2, n^2.

24. Deux points D, E dont les distances aux sommets du triangle fondamental sont proportionnelles aux mêmes nombres, l, m, n, sont dits *tripolairement associés* par rapport à ce triangle.

SYMÉDIANES (1).

25. Soient A', B', C' les milieux des côtés du triangle fondamental ABC. Les isogonales des médianes AA', BB', CC' sont appelées *symédianes* du triangle ABC; elles concourent en un même point K, inverse du centre de gravité G (N., 10); K est le *centre des symédianes*, ou le *point de Lemoine* (2) de ABC.

La symédiane AK *est le lieu des milieux des transversales antiparallèles à* BC *par rapport à l'angle* BAC (*fig.* 20). Car, si l'on retourne le triangle BAC autour de la bissectrice AI, BC devient antiparallèle à sa direction primitive, et AA' coïncide avec AK.

Les conjuguées harmoniques des symédianes AK, BK, CK *par rapport aux angles* A, B, C *du triangle fondamental coïncident avec les tangentes menées par* A, B, C *au cercle circonscrit.* Cette propriété résulte de la précédente; car les tangentes sont parallèles aux transversales antiparallèles (338).

Désignons par $K_a K_b K_c$ le triangle formé par les tangentes, par K_1, K_2, K_3 les points de rencontre des symédianes AK, BK, CK avec BC, CA, AB. Les points K_a, K_b, K_c, pôles des cordes BC, CA, AB du cercle ABC, sont les associés de K (N., 6); les triangles ABC, $K_a K_b K_c$, $K_1 K_2 K_3$ ont, deux à deux, le même axe d'homologie $k_1 k_2 k_3$. Cet axe est la polaire trilinéaire de K; on l'appelle souvent *droite de Lemoine* de ABC.

---

(1) Maurice d'Ocagne, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1884.

(2) Emile Lemoine, *Association française pour l'Avancement des Sciences*, Congrès de Lyon, 1873, et *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1873.

Les nombreux travaux de M. E. Lemoine permettent de le regarder comme l'initiateur de la nouvelle Géométrie du triangle. Il n'est que juste de citer, à côté de lui, MM. H. Brocard et J. Neuberg.

La polaire trilinéaire de K *est aussi la polaire de ce point par rapport à la circonférence* O. Car le pôle de la droite AK, par exemple, étant à l'intersection des polaires des points A, K_a, les points k_1, k_2, k_3 sont les pôles des symédianes, et la droite $k_1k_2k_3$ est la polaire du centre des symédianes.

On conclut de cette propriété que *la polaire de* K *est perpendiculaire à la droite* OK *et que sa distance au centre* O *est égale à* $\frac{R^2}{OK}$.

26. Les coordonnées normales de G étant égales au tiers des hauteurs du triangle ABC, *les coordonnées normales absolues de* K *sont* $\frac{1}{2}\lambda a, \frac{1}{2}\lambda b, \frac{1}{2}\lambda c$ (N., 10), λ *ayant la valeur* $\frac{4S}{a^2+b^2+c^2}$.

Pour déterminer le facteur λ, nous avons remplacé, dans l'identité $ax+by+cz=2S$, les quantités x, y, z par $\frac{1}{2}\lambda a$, $\frac{1}{2}\lambda b$, $\frac{1}{2}\lambda c$.

On peut observer que

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{a^2}{4S}+\frac{b^2}{4S}+\frac{c^2}{4S}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}\right),$$

h_a, h_b, h_c désignant les hauteurs de ABC.

Les coordonnées normales de K étant proportionnelles aux côtés de ABC, K *est le centre d'homothétie de* ABC *et du triangle formé par les côtés extérieurs des carrés construits sur* BC, CA, AB *en dehors du triangle* ABC.

Des expressions de ces coordonnées, on conclut encore que *les coordonnées barycentriques de* K *sont proportionnelles à* a^2, b^2, c^2; donc *une symédiane d'un triangle partage le côté correspondant dans le rapport des carrés des côtés adjacents.*

K *est le centre de gravité de son triangle podaire* XYZ. En effet, les triangles KYZ, ABC, dont les angles YKZ, BAC sont supplémentaires, sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent ces angles (437); d'où

$$\textit{aire}\ KYZ=\frac{1}{4}\lambda^2 S \text{ et, par analogie, } KZX=KXY=\frac{1}{4}\lambda^2 S.$$

La démonstration de ce théorème résulte également de la remarque suivante, souvent utile : *Étant donné un triangle quelconque* ABC, *on peut toujours construire un second triangle dont les côtés et les médianes sont, respectivement, parallèles aux médianes et aux côtés du premier triangle;* si G' est le centre de gravité du triangle A'BC (*fig.* 3), le second triangle est CGG'. Il suffit maintenant d'observer que les côtés

du triangle XYZ sont perpendiculaires aux médianes de ABC, et que les droites KX, KY, KZ sont perpendiculaires aux côtés de ABC.

PROBLÈME.

27. *Trouver dans le plan d'un triangle* ABC *un point* P (*fig.* 19) *dont la somme des carrés des distances* x, y, z, *aux côtés du triangle soit minimum.*

Menons par le point cherché P une parallèle B'C' à BC; P doit être le point de cette parallèle qui rend minimum la somme $y^2 + z^2$. Or, on a l'identité

$$(\overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2)(y^2 + z^2) = (AB'.z + AC'.y)^2 + (AB'.y - AC'.z)^2,$$

et comme la quantité $AB'.z + AC'.y$ a une valeur constante, égale au double de l'aire AB'C', le minimum de $y^2 + z^2$ correspond à la relation $AB'.y - AC'.z = 0$; d'où

$$\frac{y}{z} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{b}{c}.$$

Donc AP est une symédiane du triangle ABC. On verrait de la même manière que le point cherché se trouve sur les deux autres symédianes; il se confond donc avec le centre K des symédianes.

28. *Le point* K *est à l'intersection des droites joignant les milieux des côtés du triangle* ABC *aux milieux des hauteurs correspondantes* (*fig.* 20).

En effet, en joignant le milieu A' de BC aux points A, K_1, K, K_a, on obtient un faisceau harmonique; les trois premiers rayons interceptent sur une parallèle AH_1 au quatrième rayon $A'K_a$ des segments égaux (338).

29. *Soient* X', Y', Z' *les symétriques, par rapport à* K, *des projections de* K *sur les côtés du triangle* ABC. *Ces points sont les centres des symédianes des triangles* AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, *en désignant par* $H_1H_2H_3$ *le triangle orthique de* ABC (*fig.* 20).

Puisque A'K passe au milieu de AH_1, X' est situé sur la médiane AA'. La symédiane AK_1 de ABC passe au milieu V de l'antiparallèle H_2H_3; de même, la médiane AA' de ABC est une symédiane du triangle AH_2H_3; soit U le point où AA' coupe H_2H_3. Les droites BC, H_2H_3, antiparallèles par rapport à l'angle BAC, sont aussi antiparallèles par rapport à l'angle K_1AA' qui a la même bissectrice; le quadrilatère K_1UVA' est donc inscriptible, et comme A'V est perpendiculaire à H_2H_3 (A' est le centre de la circonférence BH_2H_3C), K_1U est perpendiculaire à BC. Il en résulte que les points K, X' divisent dans le même rapport les symédianes AK_1, AU des triangles semblables ABC, AH_2H_3; donc X' est le centre des symédianes de AH_2H_3.

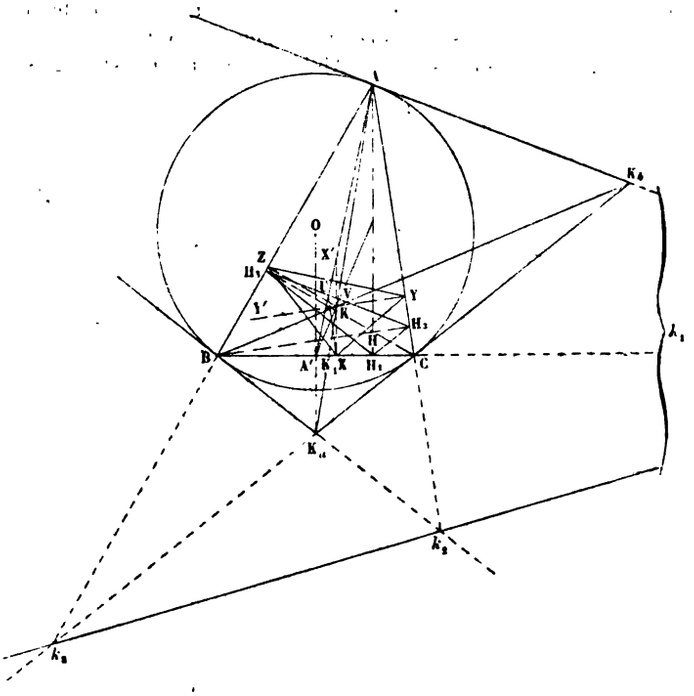
SCOLIE.

Le point K *a les mêmes coordonnées barycentriques dans les deux triangles* ABC, $H_1H_2H_3$ (*fig.* 20). En effet, dans le trapèze AH_1K_1U, K est le milieu de la parallèle XX′ aux deux bases, et, comme il est situé sur la diagonale AK_1, la seconde diagonale passe par K. Donc H_1K passe par le pied U de la symédiane AX′ du triangle AH_2H_3.

30. Appelons α, β, γ les secondes intersections des symédianes AK, BK_1, CK avec la circonférence ABC.

Le faisceau harmonique $A(BCKK_b)$ rencontre la circonférence ABC en quatre points B, C, α, A, dont le rapport anharmonique $= -1$ (321). A cause de cette propriété, le quadrilatère $AB\alpha C$ est dit *harmonique*. De même, $BC\beta A$ et $CA\gamma B$ sont des quadrilatères harmoniques.

Fig. 20.



Les perpendiculaires abaissées de α sur AC, AB sont proportionnelles à AC, AB; comme elles forment des triangles semblables avec αC, αB,

on trouve aisément

$$AB.\alpha C = AC.\alpha B = \tfrac{1}{2} A\alpha.BC.$$

$A\alpha$ est une symédiane des triangles ABC, αBC; BC est une symédiane des triangles $BA\alpha$, $CA\alpha$. Il suit de là que les distances de l'intersection des diagonales d'un quadrilatère harmonique aux quatre côtés sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés.

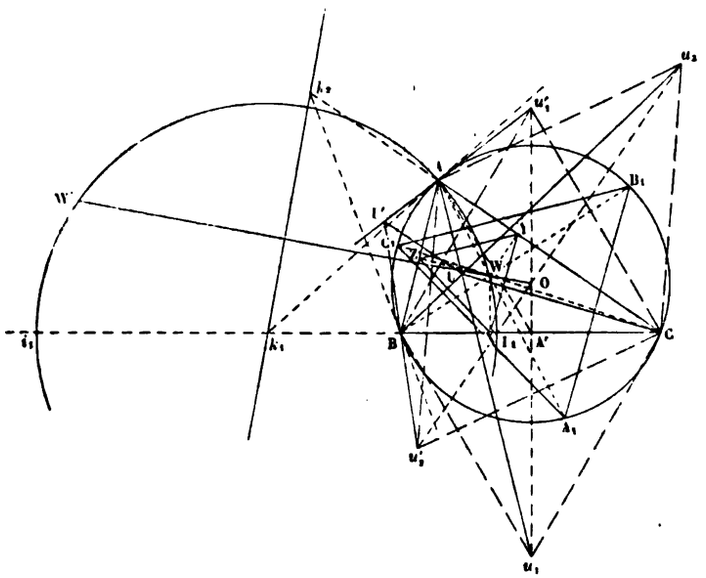
31. $\alpha\beta\gamma$ est le triangle métaharmonique de ABC par rapport à K; donc il est semblable au triangle podaire XYZ de K, et ses côtés sont proportionnels aux médianes de ABC. K étant le centre de gravité de XYZ est le centre des symédianes de $\alpha\beta\gamma$ (N., 26), ce que l'on peut aussi démontrer directement.

CENTRES ISOGONES ET CENTRES ISODYNAMIQUES.

32. Il existe, dans le plan d'un triangle quelconque ABC, deux points U, U', d'où l'on voit les trois côtés sous des angles de 120° ou 60°; ce sont les métapôles du triangle ABC par rapport à un triangle équilatéral (N., 14). Nous appelons ces points *centres isogones* de ABC.

Construisons (*fig.* 21) sur les côtés de ABC, vers l'extérieur, les triangles

Fig. 21.



équilatéraux BCu_1, CAu_2, ABu_3; et, vers l'intérieur, les triangles équi-

latéraux BCu'_1 CAu'_2, ABu'_3. Les droites Au_1, Bu_2, Cu_3 concourent en U; les droites Au'_1, Bu'_2, Cu'_3 en U'.

Les coordonnées barycentriques de U et U' sont

$$\frac{1}{\cot A \pm \sqrt{3}}, \quad \frac{1}{\cot B \pm \sqrt{3}}, \quad \frac{1}{\cot C \pm \sqrt{3}}.$$

33. Lorsqu'aucun des angles A, B, C ne surpasse 120°, le point U tombe à l'intérieur du triangle ABC (*fig.* 21). Dans ce cas, *il jouit de la propriété de rendre minimum la somme des distances d'un même point aux sommets du triangle de référence*. En effet, désignons par $N_1N_2N_3$ le triangle antipodaire de U par rapport à ABC; ce triangle est équilatéral et ses sommets appartiennent aux circonférences BCu_1, CAu_2, ABu_3. L'angle UCN_1 étant droit, UN_1 est un diamètre du cercle BCu_1; par suite, l'angle Uu_1N_1 est droit et la droite N_1u_1 est parallèle à N_2N_3. Ainsi, les *droites* Au_1, Bu_2, Cu_3 *sont égales à la hauteur du triangle* $N_1N_2N_3$. Soient VV_1, VV_2, VV_3 les perpendiculaires abaissées d'un point intérieur V sur les côtés de $N_1N_2N_3$. La somme $VV_1 + VV_2 + VV_3$ est toujours égale à la hauteur de $N_1N_2N_3$; par conséquent

$$UA + UB + UC = VV_1 + VV_2 + VV_3 < VA + VB + VC.$$

Si le point V est à l'extérieur, on a, par exemple,

$$UA + UB + UC = VV_1 - VV_2 - VV_3 < VA + VB + VC.$$

La propriété énoncée est donc démontrée.

La discussion complète du problème de trouver le minimum de $\pm VA \pm VB \pm VC$ ne saurait trouver place ici (1).

34. Lorsque l'angle BAC est plus grand que 120°, U tombe dans la région 1', et l'on a $UB + UC - UA = Au_1$. Lorsque les angles B et C du triangle ABC sont tous deux inférieurs à 60° ou tous deux supérieurs à 60°, le point U' tombe dans la région 1 et l'on a, respectivement, $UB + UC - UA = \pm Au'_1$.

Calculons les longueurs $Au_1 = s$, $Au'_1 = s'$. En appliquant au triangle $Au_1u'_1$ les théorèmes 230 et 234, nous aurons

$$s^2 + s'^2 = 2\overline{AA'}^2 + 2\overline{A'u_1}^2, \quad s^2 - s'^2 = 4A'u_1 . AH_1,$$

ou, à cause de $b^2 + c^2 = 2\overline{AA'}^2 + \frac{1}{2}a^2$, $A'u_1 = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$,

$$s^2 + s'^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad s^2 - s'^2 = 4S\sqrt{3};$$

(1) *Voir* J. Bertrand, *Journal de Liouville*, t. VIII.

par conséquent

$$2s^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3}, \quad 2s'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4S\sqrt{3}.$$

35. Soient (*fig.* 21) W, W' les inverses des centres isogones U, U' dans le triangle ABC. Ces points sont les centres métaharmoniques de ABC par rapport à un triangle équilatéral, c'est-à-dire que les triangles podaires et les triangles métaharmoniques de W et W' sont équilatéraux. Il résulte de là que

$$a.AW = b.BW = c.CW, \quad a.AW' = b.BW' = c.CW'.$$

A cause de ces relations, les quadrangles ABCW, ABCW' sont dits *isodynamiques*, et les points W, W' sont appelés *centres isodynamiques* du triangle ABC.

Comme on a

$$\frac{BW}{CW} = \frac{BA}{CA} = \frac{BW'}{CW'},$$

les points W, W' appartiennent à la circonférence qui a pour diamètre la distance $I_1 i_1$ des pieds des bissectrices, intérieure et extérieure, de l'angle opposé; cette circonférence coupant orthogonalement celle qui est circonscrite au triangle ABC, son centre est au point k_1 (383, 332). Donc *les trois circonférences qui ont pour diamètres les segments* $i_1 I_1$, $i_2 I_2$, $i_3 I_3$ *compris entre les pieds des bissectrices se coupent aux centres isodynamiques* W, W'; *leurs centres sont sur la polaire de* K. On en conclut que W, W' sont sur le diamètre OK, que le milieu du segment WW' appartient à la droite OK, et que $OW.OW' = R^2$.

Scolie.

Les cercles $AI_1 i_1$, $BI_2 i_2$, $CI_3 i_3$ ont reçu le nom de *cercles d'Apollonius* du triangle ABC. Leurs cordes communes avec le cercle ABC sont dirigées suivant les symédianes AK, BK, CK, polaires de leurs centres k_1, k_2, k_3 par rapport au cercle ABC.

POINTS, CERCLE ET TRIANGLES DE BROCARD (1).

36. Soient A', B', C' les milieux des côtés du triangle fondamental ABC; O, le centre du cercle circonscrit; K, le centre des symédianes.

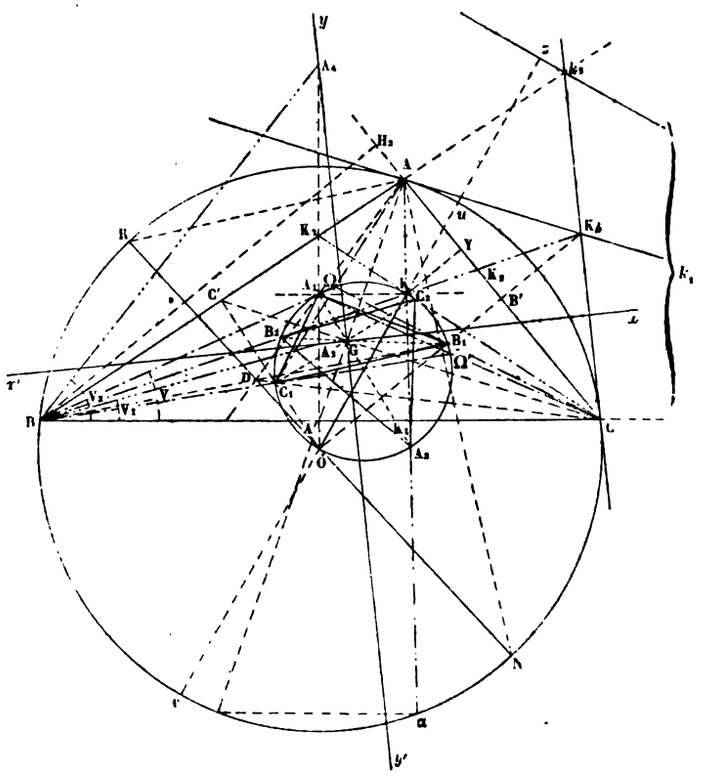
---

(1) H. Brocard, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1875; *Nouvelle correspondance mathématique*, 1877, 1879, 1880; *Association française pour l'Avancement des Sciences*, Congrès d'Alger, 1881.

J. Neuberg, *Mathesis*, 1881.

Le cercle décrit sur la droite OK comme diamètre a reçu le nom de *cercle de Brocard;* nous le désignons par *cercle* (OK). Soient A_1, B_1, C_1 les points où il rencontre les *médiatrices* OA', OB', OC', et soient A_2, B_2, C_2, ses points d'intersection avec les symédianes AK, BK, CK. Les triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sont dits, respectivement, le *premier* et le *second triangle de Brocard* de ABC (*fig.* 22).

Fig. 22.



Les droites KA_1, KB_1, KC_1 étant perpendiculaires à OA', OB', OC', les segments A_1A', B_1B', C_1C' sont égaux aux coordonnées normales absolues de K, et par suite proportionnels à BC, CA, AB. Donc *les triangles isocèles* A_1BC, B_1CA, C_1AB *sont semblables*. L'angle à la base de ces triangles, que nous désignons par V, est l'*angle de Brocard de* ABC.

Le triangle $A_1A'B$ donne $A_1A' = \frac{1}{2}a \operatorname{tang} V$; d'où (N., 26)

$$\cot V = \frac{1}{\lambda} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c}\right),$$

h_a, h_b, h_c représentant les hauteurs de ABC. Mais

$$a = BH_1 + H_1C = h_a(\cot B + \cot C), \quad \ldots;$$

conséquemment,

$$\cot V = \cot A + \cot B + \cot C.$$

37. *Le triangle* $A_1B_1C_1$ *est inversement semblable à* ABC; car les droites KA_1, KB_2, KC_2 sont menées par un même point de la circonférence (OK) parallèlement aux côtés du triangle ABC (N., 15).

Cherchons le rapport de similitude. En tenant compte des signes des aires (1), on peut écrire

$$A_1B_1C_1 = OA_1B_1 + OB_1C_1 + OC_1A_1.$$

Les angles A_1OB_1, ACB ayant leurs côtés perpendiculaires, on a

$$\frac{OA_1B_1}{S} = \frac{OA_1 \cdot OB_1}{ab} = \frac{(OA' - A_1A')(OB' - B_1B')}{ab};$$

comme $OA' = \frac{1}{2}a \cot BOA' = \frac{1}{2}a \cot A$, $A_1A' = \frac{1}{2}a \operatorname{tang} V, \ldots$, cette relation prend la forme

$$\frac{OA_1B_1}{S} = \frac{1}{4}(\cot A - \operatorname{tang} V)(\cot B - \operatorname{tang} V).$$

Additionnant l'égalité précédente avec les deux autres analogues, et observant que

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1, \quad \cot A + \cot B + \cot C = \cot V,$$

on trouve

$$\frac{A_1B_1C_1}{ABC} = \frac{3\operatorname{tang}^2 V - 1}{4}.$$

L'aire $A_1B_1C_1$ étant négative, le rapport de similitude des deux tri-

(1) Les aires de deux triangles, désignées par ABC, A'B'C', sont de même signe ou de signes contraires suivant que les sens de rotation ABC, A'B'C' sont les mêmes ou diffèrent. Si O est un point quelconque du plan ABC, on a

$$ABC = OAB + OBC + OCA.$$

angles $A_1B_1C_1$, ABC est égal à $\frac{1}{2}\sqrt{1-3\tang^2 V}$, et

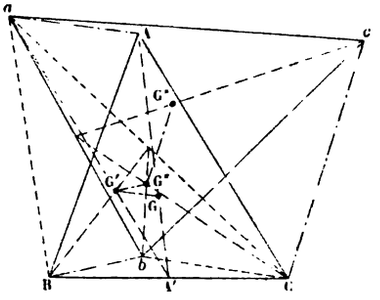
$$B_1C_1 = \frac{1}{2}a\sqrt{1-3\tang^2 V}, \quad \ldots, \quad OK = R\sqrt{1-3\tang^2 V}.$$

LEMME.

38. *Sur les côtés d'un triangle* ABC, *on construit trois triangles directement semblables* ABc, BCa, CAb : *les triangles abc,* ABC *ont même centre de gravité.*

Supposons d'abord les points a, b, c quelconques (*fig.* 23) et soient G, G', G'', G''' les centres de gravité des triangles ABC, aBC, abC, abc. Les médianes AA', aA' étant divisées en G, G' dans le même rapport 2 : 1, la droite GG' est parallèle à Aa et égale à $\frac{1}{3}$ Aa. On en conclut aisément qu'on passe du centre de gravité du triangle ABC à celui de abc, en construisant une ligne brisée GG'G''G''' dont les côtés sont parallèles aux droites Aa, Bb, Cc et égaux aux tiers de ces droites. G''

Fig. 23.



coïncidera avec G, si les droites Aa, Bb, Cc sont égales et parallèles aux côtés d'un même triangle (*fig.* 24).

Dans le lemme énoncé ci-dessus, les droites Ac, Ba, Cb sont proportionnelles aux côtés AB, BC, CA du triangle ABC et également inclinées sur ces côtés; donc elles représentent en grandeur et en direction les côtés d'un triangle semblable à ABC. Les triangles ABC, cab ont donc même centre de gravité.

39. D'après le lemme précédent, G *est le point double des triangles semblables* $A_1B_1C_1$, ABC (*fig.* 22).

Désignons par xx', yy' les bissectrices des angles A'GA_1, A_1GA, et par A_3, B_3, C_3, A_4, B_4, C_4 les points où elles rencontrent les médiatrices OA', OB', OC'. xx', yy' sont les droites doubles des triangles sem-

blables $A_1B_1C_1$, ABC ; on les appelle *les axes de Steiner* de ABC. Comme GA_1 et GA′ sont deux lignes homologues, on a

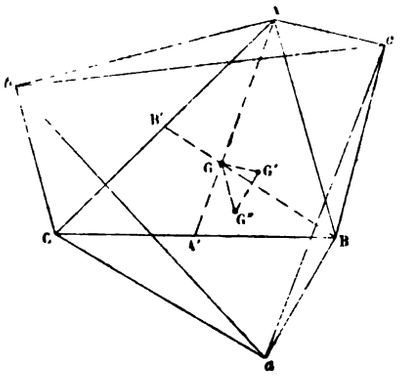
$$\sqrt{1-3\tang^2 V}=\frac{GA_1}{GA'}=\frac{A_1A_3}{A_3A'}=\frac{A_1A'-A_3A'}{A_3A'}=\frac{\frac{1}{2}a\tang V-A_3A'}{A_3A'},$$

d'où

$$A_3A'=\frac{a\tang V}{2\left(1+\sqrt{1-3\tang^2 V}\right)}.$$

On voit que *les triangles isocèles* A_3BC, B_3CA, C_3AB *sont semblables* leur angle à la base, que nous représentons par V_1 et qui a reçu le

Fig. 24.



nom de *premier angle de Steiner* de ABC, est donné par la formule

$$\cot V_1=\frac{A'B}{A_3A'}=\cot V+\sqrt{\cot^2 V-3}.$$

De même, les triangles A_4BC, B_4CA, C_4AB sont semblables, et leur angle à la base (*second angle de Steiner*) vérifie l'égalité

$$\cot V_2=\cot V-\sqrt{\cot^2 V-3}.$$

THÉORÈMES.

40. ***Les perpendiculaires abaissées des sommets de*** ABC ***sur les côtés opposés de*** $A_1B_1C_1$ ***concourent en un même point*** N ; ***les parallèles menées par les sommets de*** ABC ***aux côtés correspondants de*** $A_1B_1C_1$ ***concourent en un même point*** R. ***Les points*** N ***et*** R ***sont les extrémités d'un même diamètre du cercle*** ABC ; ***ce sont, par rapport au triangle***

ABC, *les homologues des points* O, K *considérés dans le plan* $A_1B_1C_1$.

En effet (*fig.* 22), deux droites homologues des plans $A_1B_1C_1$, ABC ayant des directions symétriques par rapport à xx', les perpendiculaires abaissées de A_1, B_1, C_1 sur les côtés de ABC ont pour lignes correspondantes les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur les côtés de $A_1B_1C_1$.

On démontre facilement, par la considération de triangles semblables, que les coordonnées normales d'un point M de la circonférence circonscrite au triangle de référence ABC sont inversement proportionnelles aux rayons vecteurs MA, MB, MC. Par conséquent, les coordonnées normales de O dans le triangle $A_1B_1C_1$ et celles de N dans le triangle ABC sont inversement proportionnelles à $OA_1 = \frac{1}{2}(\cot A - \operatorname{tang} V)$, OB_1, OC_1 ; d'où l'on déduit qu'elles sont entre elles comme

$$\text{séc}(A - V) : \text{séc}(B - V) : \text{séc}(C - V).$$

Celles de K dans le triangle $A_1B_1C_1$ sont inversement proportionnelles à $A'X = KA_1$, B'Y, C'Z, en désignant par XYZ le triangle podaire de K par rapport à ABC. Soient K_2, K_b les points de rencontre de AK avec CA, OB' ; BK_2KK_b étant une division harmonique, le segment B'Y est divisé harmoniquement par K_2H_2. Par conséquent (332),

$$\frac{1}{B'Y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B'K_2} + \frac{1}{B'H_2}\right);$$

si l'on calcule $B'K_2$, $B'H_2$ en fonction de a, b, c, on trouve que les coordonnées normales de K dans $A_1B_1C_1$, et celles de R dans ABC, sont

$$\frac{1}{a(b^2 - c^2)}, \quad \frac{1}{b(c^2 - a^2)}, \quad \frac{1}{c(a^2 - b^2)}.$$

41. *Les perpendiculaires menées des milieux des côtés du triangle* $A_1B_1C_1$ *sur les côtés correspondants du triangle* ABC *concourent au centre du cercle des neuf points de* ABC. Car ces droites, parallèles à OA_1, OB_1, OC_1 passent par le complémentaire O' de O par rapport à $A_1B_1C_1$, de sorte que $GO' = \frac{1}{2}OG$.

42. *Les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *concourent en un même point* D, *qui est le réciproque de* K *par rapport à* ABC.

Si l'on coupe le faisceau harmonique $A'(AK_1KK_a)$ par la droite KA_1 parallèle au rayon $A'K_1$, on voit que AA' passe au milieu de KA_1 ; donc AK et AA_1 rencontrent BC en des points isotomiques.

Nous mentionnons, sans démonstration, les propriétés suivantes : *Le point* D *est situé sur la droite* NR ; *l'axe d'homologie des triangles* ABC, $A_1B_1C_1$ *est perpendiculaire à la droite* OD.

43. *Les droites* AC_1, BA_1, CB_1 *concourent en un même point* Ω du *cercle* (OK); *les droites* BC_1, CA_1, AB_1 *concourent en un second point* Ω' *du même cercle.*

En effet, les droites AC_1, BA_1 faisant le même angle avec les droites C_1O, A_1O se rencontrent sur la circonférence A_1C_1O; de même, les droites BA_1, CB_1 se coupent sur la circonférence A_1B_1O. Donc les trois lignes AC_1, BA_1, CB_1 passent par un même point de la circonférence (OK).

Scolie.

44. 1° Les angles $A\Omega B$, $B\Omega C$, $C\Omega A$ sont égaux à $\pi - B$, $\pi - C$, $\pi - A$.

Par conséquent, pour déterminer le point Ω, on peut décrire une circonférence passant par les sommets A, B, et tangente à BC;

» B, C, » CA;

» C, A, » AB.

Ces circonférences sont appelées les *circonférences adjointes* (AB), (BC), (CA).

Le point Ω' est à l'intersection des circonférences adjointes (BA), (BC), (AC).

Ω, Ω' sont les *points de Brocard* du triangle ABC.

2° Ω est le premier métapôle des triangles ABC, CAB; Ω', celui des triangles ABC, BCA (N., 14, 15).

Soient (*fig.* 25) Ω_1, α les points de rencontre de la droite $A\Omega$ avec le côté BC et avec le cercle adjoint $B\Omega C$. Le triangle αBC étant inversement semblable à CAB, la droite αC est parallèle à AB, et la droite αB touche le cercle ABC. Il résulte de là

$$\frac{\alpha C}{BC} = \frac{BC}{AB}, \quad \frac{B\Omega_1}{\Omega_1 C} = \frac{BA}{\alpha C};$$

en éliminant αC, on trouve

$$\frac{B\Omega_1}{\Omega_1 C} = \frac{c^2}{a^2}$$

Par analogie,

$$\frac{C\Omega_2}{\Omega_2 A} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \frac{A\Omega_3}{\Omega_3 B} = \frac{b^2}{c^2}, \quad \frac{B\Omega'_1}{\Omega'_1 C} = \frac{a^2}{b_2}, \quad \ldots.$$

Ainsi, *les coordonnées barycentriques des points* Ω, Ω' *sont*

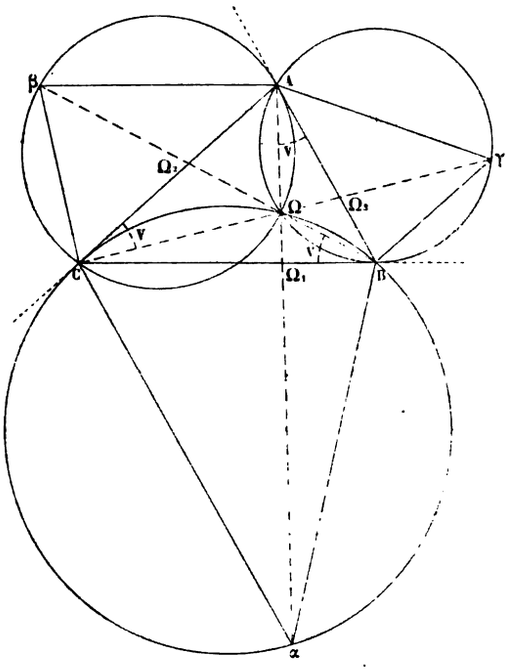
$$\left(\frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2}\right), \left(\frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}\right);$$

leurs coordonnées normales ont pour expressions

$$\left(\frac{c}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}\right), \left(\frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{a}{b}\right).$$

3° En comparant les coordonnées barycentriques des points K, Ω, Ω′, on a une construction très simple pour déduire les deux derniers points du premier : les droites $K_1\Omega_3$, $K_2\Omega_1$, $K_3\Omega_2$ sont parallèles à CA, AB, BC; les droites $K_1\Omega'_2$, $K_2\Omega'_3$, $K_3\Omega'_1$ sont parallèles à CA, AB, BC.

Fig. 25.



4° *La corde* ΩΩ′ *du cercle* (OK) *est perpendiculaire sur le diamètre* OK *et est vue du point* O *sous l'angle* 2V. En effet, les angles $\Omega A_1 K$, $K A_1 \Omega'$ sont égaux à V.

THÉORÈME.

45. *Soient* F_a, F_b, F_c *trois figures directement semblables, construites sur les côtés* BC, CA, AB *du triangle* ABC *comme segments homologues. Les points* A_2, B_2, C_2 *du cercle* (OK) *sont les centres de similitude de* F_b *et* F_c, F_c *et* F_a, F_a *et* F_b (*fig.* 22).

Soit α la seconde extrémité de la corde symédiane AK. OA_2 étant perpendiculaire à AK, A_2 est le milieu de Aα; BA_2 et BK_1 sont donc la médiane et la symédiane du triangle Bαα; d'où *angle* $ABA_2 = CB\alpha = CA\alpha$,

et, par analogie, *angle* $ACA_2 = BC\alpha = BA\alpha$. Les triangles CAA_2, ABA_2 sont donc directement semblables, et A_2 est le point double (368) de F_b, F_c.

COROLLAIRES.

1° *Le point* A_2 *appartient aux circonférences adjointes* (BA), (CA) *et à la circonférence* BOC. Car l'angle

$$AA_2G = \pi - A_2AC - ACA_2 = \pi - A_2AC - BAA_2 = \pi - A.$$

2° On a $\overline{A_2A}^2 = A_2B.\,A_2C$, $\dfrac{A_2B}{A_2C} = \dfrac{c^2}{b^2}$.

THÉORÈME.

46. *Les triangles* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ *ont pour centre d'homologie le centre de gravité* G *de* $A_1B_1C_1$; *pour axe d'homologie, la polaire de* G *par rapport au cercle* (OK) (*fig.* 22).

En effet, B_1 et C_1 étant des points homologues de F_b et F_c, les droites homologues A_2B_1, A_2C_1 font entre elles un angle égal à celui des lignes homologues CA, AB ou égal à $\pi - A$; de plus, elles sont proportionnelles à CA, AB ou à C_1A_1, A_1B_1. Par conséquent, les points A_1, A_2 sont situés de part et d'autre de B_1C_1, et $A_2B_1.\,A_1B_1 = A_1C_1.\,A_2C_1$; les triangles $A_1A_2B_1$, $A_1A_2B_2$ sont donc équivalents, et A_1A_2 passe au milieu de B_1C_1.

Comme les cordes A_1A_2, B_1B_2 se coupent en G, le point d'intersection des cordes A_1B_1, A_2B_2 appartient à la polaire de G (344), etc.

COROLLAIRE.

Le triangle $A_2B_2C_2$ *est semblable au triangle podaire de* G *par rapport à* ABC.

THÉORÈMES.

47. *La polaire de* K *par rapport au triangle* ABC *est l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle* (OK) (*fig.* 22).

Soient u, v, z les points de rencontre de la droite OK avec la circonférence ABC, et avec la polaire $k_1k_2k_3$ de K. La division harmonique uvzK donne (332)

$$\frac{1}{zK} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{zu} + \frac{1}{zv}\right) = \frac{zO}{zu.zv};$$

donc $zK.zO = zu.zv$, ce qui démontre le théorème.

48. *La circonférence* (OK) *et la polaire* $k_1k_2k_3$ *de* K *sont des figures inverses par rapport à la circonférence* ABC (*fig.* 22).

Ce théorème résulte immédiatement de la relation OK. $O\omega = R^2$ (388). On en conclut que les points tripolairement associés à A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, Ω, Ω' appartiennent à la droite $k_1 k_2 k_3$.

Les points Ω, Ω' étant des points inverses par rapport au triangle ABC, leurs triangles podaires (N., 9) sont directement semblables à BCA, CAB. Les droites $O\Omega$, $O\Omega'$ rencontrent la polaire de K en des points dont les triangles podaires sont inversement semblables à BCA, CAB. Le triangle podaire de z est inversement semblable au triangle dont les côtés sont parallèles aux médianes de ABC.

CERCLES TANGENTS AUX TROIS COTÉS D'UN TRIANGLE.

49. Soient (*fig.* 26) I, I_a, I_b, I_c les centres du cercle inscrit et des cercles exinscrits au triangle fondamental ABC. Les points de contact de ces cercles avec les côtés BC, CA, AB sont désignés par les lettres (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$.

On sait que ABC est le triangle orthique de chacun des quatre triangles $I_a I_b I_c$, $I I_c I_b$, $I_c I I_a$, $I_b I_a I$. Cette remarque conduit à quelques théorèmes qu'il suffit d'énoncer.

1° *Les droites* $I_a\alpha_1$, $I_b\beta_2$, $I_c\gamma_3$, *concourent au centre* V *du cercle* $I_a I_b I_c$; *les droites* $I\alpha$, $I_c\beta_3$, $I_b\gamma_2$ *se coupent au centre* V_a *du cercle* $I I_c I_b$, etc. *Les deux quadrangles* $V V_a V_b V_c$, $I I_a I_b I_c$ *sont symétriques par rapport au point* O; *les côtés du premier sont perpendiculaires aux milieux des côtés opposés du second.*

2° *Les droites qui joignent* I_a, I_b, I_c *aux milieux* A', B', C' *des côtés de* ABC *concourent au centre des symédianes du triangle* $I_a I_b I_c$; *les droites* A'I, B'I_c, C'I_b *sont les symédianes du triangle* $I I_c I_b$, etc.

50. *Les droites* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *concourent en un point* Γ *ayant pour coordonnées barycentriques*

$$\frac{1}{-a+b+c}, \quad \frac{1}{a-b+c}, \quad \frac{1}{a+b-c}.$$

Les droites $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ *concourent en un point* Γ_a *dont les coordonnées barycentriques sont*

$$\frac{1}{a+b+c}, \quad \frac{1}{-a-b+c}, \quad \frac{1}{-a+b-c}, \quad \ldots.$$

Ces propositions se déduisent immédiatement des valeurs des segments $B\alpha$, $C\alpha$, ...

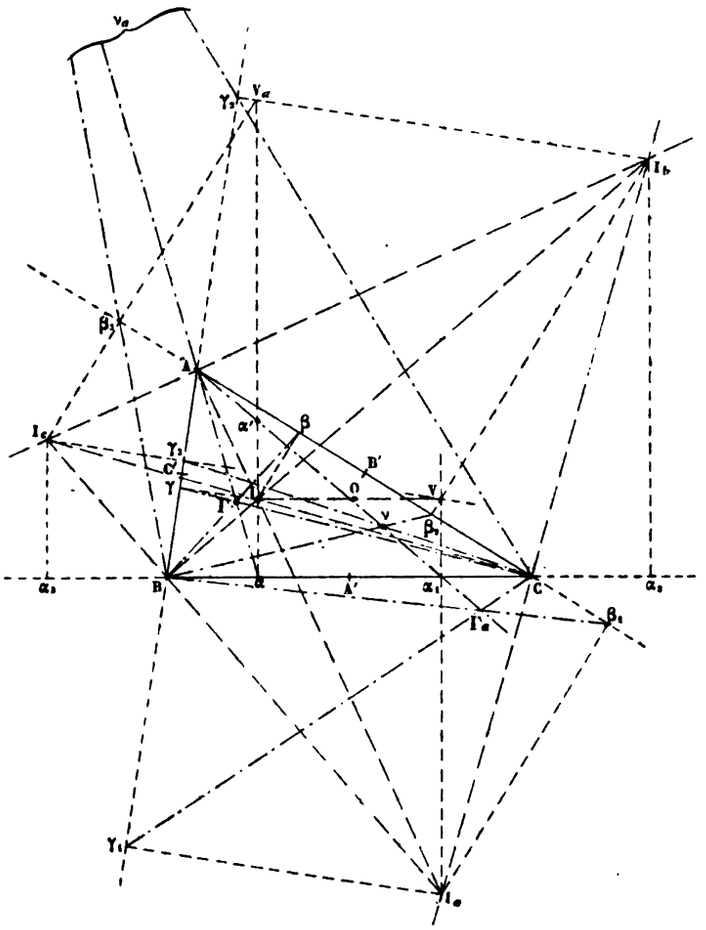
Le point Γ est appelé quelquefois *point de Gergonne* du triangle ABC; Γ_a, Γ_b, Γ_c sont les *adjoints de* Γ.

51. *Les droites* $A\alpha_1$, $B\beta_2$, $C\gamma_3$ *concourent en un même point* ν, *réciproque du point* Γ *et anticomplémentaire de* I.

Les droites $A\alpha$, $B\beta_3$, $C\gamma_2$ *concourent en un même point* ν_a, *réciproque de* Γ_a *et anticomplémentaire de* I_a, etc.

Les points α et α_1, β et β_2, γ et γ_3 étant isotomiques (N., 7), les droites $A\alpha_1$, $B\beta_2$, $C\gamma_3$ concourent en un point ν, réciproque de Γ. Les coordonnées barycentriques de ν sont égales à $-a+b+c$, $a-b+c$, $a+b-c$.

Fig. 26.



Ces expressions montrent que ν est l'anticomplémentaire du point I, dont les coordonnées sont a, b, c. Pour établir directement cette pro-

priété, désignons par α' la seconde extrémité du diamètre αI du cercle I. A étant un centre de similitude des cercles I, I_α, la droite $\alpha_1\alpha'$, qui joint les extrémités de deux rayons parallèles, passe par A; par conséquent, la droite A'I joignant les milieux de $\alpha\alpha_1$ et $\alpha\alpha'$ est parallèle à $A\alpha_1$, B'I et C'I sont parallèles à $B\beta_2$, $C\gamma_3$, et les points I, ν sont des points complémentaires (N., 9).

Les autres parties de la proposition peuvent être établies par un procédé analogue.

ν est appelé quelquefois le *point de Nagel* de ABC; ν_a, ν_b, ν_c sont les *adjoints de* ν.

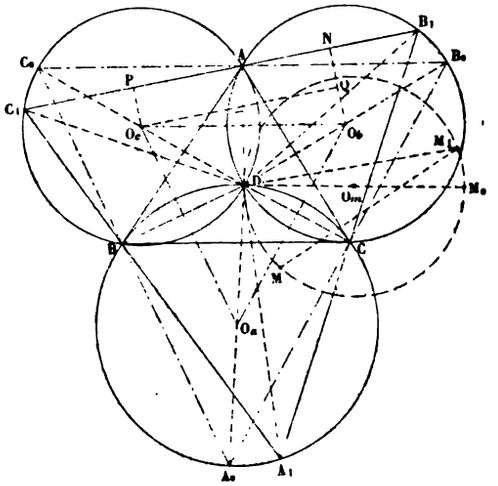
SUR LES FIGURES SEMBLABLEMENT VARIABLES (1).

32. Une figure est dite *semblablement variable* lorsqu'elle se modifie d'une manière continue en restant semblable à une figure fixe.

THÉORÈME.

Lorsque trois droites a_1, b_1, c_1 *d'une figure semblablement variable* φ_1 *passent par trois points fixes* A, B, C, *il existe un point* D *de cette figure qui reste fixe. Tous les points de la figure décrivent des circonférences passant par* D; *une droite quelconque passe par un point fixe* (*fig.* 27).

Fig. 27.



Chaque position de φ_1 est déterminée par les positions de trois de ses

(1) J. Neuberg, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1885.

droites, pourvu que celles-ci ne soient pas concourantes. Soit $A_1B_1C_1$ le triangle formé par a_1, b_1, c_1; comme il est toujours semblable à lui-même, ses côtés tournent autour de A, B, C, dans un même sens, de quantités égales, et ses sommets parcourent trois circonférences O_a, O_b, O_c, passant par deux des points A, B, C et se coupant en un même point D, métapôle du triangle ABC par rapport au triangle $A_1B_1C_1$. Les angles DB_1C_1, DC_1B_1 étant constants, D est son propre homologue dans toutes les positions de φ_1 : c'est un *centre permanent de similitude*.

Les perpendiculaires menées en A, B, C sur DA, DB, DC forment un triangle $A_0B_0C_0$, que nous pouvons considérer comme étant la *position initiale* de $A_1B_1C_1$. Soient O_bN, O_cP des perpendiculaires, et O_cQ une parallèle à B_1C_1 ; comme $B_1C_1 = 2NP = 2QO_c$, $B_0C_0 = 2O_bO_c$, $QO_c < O_bO_c$, les dimensions les plus grandes de la figure variable correspondent à la position initiale φ_0. Le rapport de similitude de φ_1 et φ_0 a pour expression O_cQ; $O_cO_b = \cos\alpha$, α désignant l'angle C_0AC_1.

Soient M_0, M_1 deux points homologues de φ_0, φ_1. Les triangles DM_0B_0, DM_1B_1 étant semblables, les triangles DM_0M_1, DB_0B_1 le sont également, et le lieu de M_1 est la circonférence O_m qui a pour diamètre DM_0.

Soit M_1M une droite quelconque de φ_1. Un point M_1 de cette ligne décrit une circonférence O_m et l'angle DM_1M est constant; par suite, la droite passe par un point fixe M de la circonférence O_m. Ce point est la projection du centre permanent D sur la position initiale M_0M de la droite.

Scolie.

33. 1° Les droites a_1, b_1, c_1, à un certain moment, coïncident avec AD, BD, CD; dans cette position, tous les points de la figure variable sont confondus en D, et toutes les droites passent par D.

La figure passe deux fois par les mêmes états de grandeur : elle a les mêmes dimensions lorsque a_1 prend deux positions symétriques par rapport à B_0C_0.

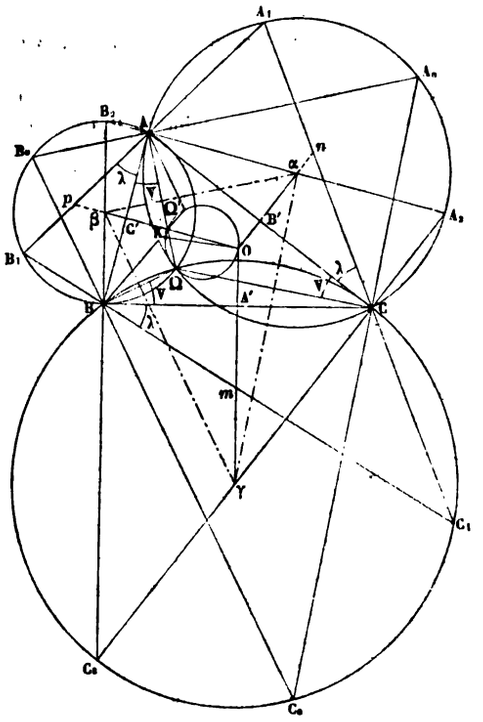
2° Le centre permanent D est, dans le triangle variable $A_1B_1C_1$, l'inverse du métapôle ou le centre métaharmonique de ce triangle par rapport au triangle ABC. Ce rôle de D s'aperçoit immédiatement dans le triangle $A_0B_0C_0$, dont ABC est le triangle podaire par rapport à D.

3° Considérons une seconde figure φ'_1 qui varie en restant symétriquement semblable à la figure φ_1, avec la condition que les homologues des droites a_1, b_1, c_1 passent aussi par les points A, B, C. Le centre permanent de similitude de φ'_1 est le jumeau D' de D (N., 17), dans le triangle ABC. Il existe entre les triangles antipodaires de ABC par rapport aux deux points D, D' cette relation assez curieuse que nous ne faisons qu'énoncer ici : *La différence des valeurs absolues de leurs aires est égale à quatre fois l'aire* ABC.

54. Les cas où les droites a_1, b_1, c_1, dans une position particulière, coïncident, soit avec AB, BC, CA, soit avec CA, AB, BC, présentent un grand intérêt.

1° Dans le premier cas (*fig.* 28), les droites a_1, b_1, c_1 font avec AB, BC, CA un même angle λ. Nous désignons maintenant par A_1, B_1, C_1 les points d'intersection des droites c_1 et a_1, a_1 et b_1, b_1 et c_1, de sorte que le triangle $A_1B_1C_1$ est semblable à ABC; ces points se meuvent sur les circonférences adjointes (CA), (AB), (BC), dont les centres sont représentés par α, β, γ. Le centre permanent de similitude est le point Ω de Brocard, tel que $\Omega AB = \Omega BC = \Omega CA = V$.

Fig. 28.



Soient O le centre du cercle ABC; $A_0B_0C_0$ le triangle antipodaire de Ω par rapport à ABC. Les angles $\alpha O\beta$, $\beta O\gamma$, $\gamma O\alpha$ étant les suppléments des angles de ABC, O *est le point direct de Brocard du triangle* $\alpha\beta\gamma$, et son homologue dans le triangle $A_0B_0C_0$ s'obtient en prenant sur ΩO une lon-

gueur $\Omega\Omega'_0 = 2\Omega O$. Il résulte de là que *les points directs de Brocard des triangles* $A_1B_1C_1$ *ont pour lieu géométrique la circonférence décrite de* O *comme centre avec le rayon* $O\Omega$.

Appelons $A_2B_2C_2$ le triangle formé par les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$; c'est une position particulière de $A_1B_1C_1$. Les distances de O aux côtés du triangle $A_2B_2C_2$ sont égales à C'A, A'B, B'C; elles sont donc proportionnelles à ces côtés, et O *est le centre des symédianes de* $A_2B_2C_2$. On déduit, de cette propriété, que *le centre des symédianes du triangle* $A_1B_1C_1$ *parcourt le cercle* (OK) *du triangle* ABC.

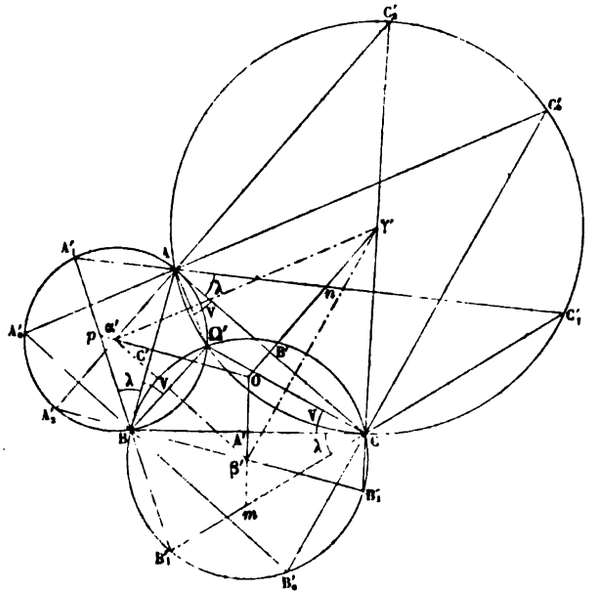
Le rapport de similitude des triangles $A_1B_1C_1$, ABC est égal à celui des lignes homologues ΩA_1, ΩA; il a donc pour expression

$$\sin(V + \lambda) : \sin V.$$

Il se réduit à coséc V ou cot V, lorsqu'on compare $A_0B_0C_0$ ou $A_2B_2C_2$ à ABC.

2° Lorsque les droites a_1, b_1, c_1 font avec AC, BA, CB un même angle λ, elles forment (*fig.* 29) un triangle $A'_1B'_1C'_1$ semblable à ABC

Fig. 29.



et dont les sommets décrivent les circonférences adjointes (BA), (CB),

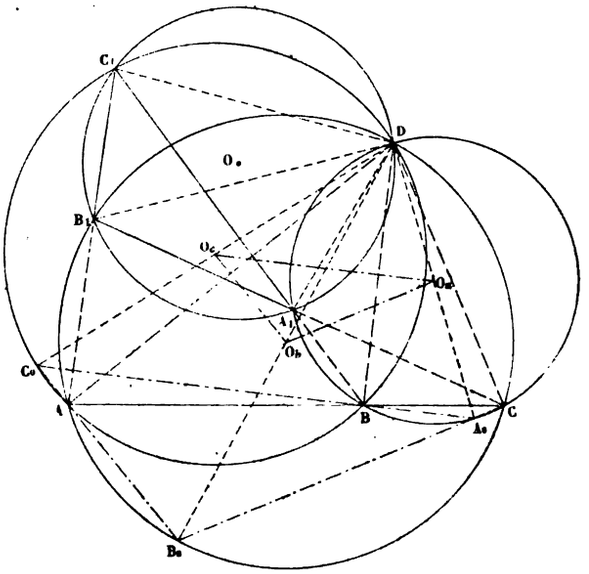
(AC). Soient α', β', γ' les centres de ces cercles; O *est le point rétrograde de Brocard du triangle* $\alpha'\beta'\gamma'$. *Le centre permanent de similitude des triangles* $A'_1B'_1C'_1$ *est le point direct de Brocard de chacun d'eux; leur point rétrograde de Brocard décrit la circonférence qui a pour centre* O *et pour rayon* $O\Omega$.

Deux triangles $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$ (*fig.* 28 *et* 29), *qui correspondent à la même valeur de* λ, *sont égaux, et ont pour point double le centre* O *du cercle* ABC.

En effet, les côtés homologues se coupent sur les médiatrices OA', OB', OC' de ABC et font un angle constant 2λ; par conséquent, une rotation autour de O amène l'un des triangles sur l'autre.

53. Le cas (*fig.* 30) où trois droites a_1, b_1, c_1 d'une figure semblablement variable tournent autour de trois points A, B, C situés en

Fig. 30.



ligne droite se traite de la même manière que le cas général. Les points A_1, B_1, C_1 se meuvent sur trois circonférences O_a, O_b, O_c passant par le point D, d'où l'on voit les longueurs AB, BC, CA sous des angles égaux à ceux du triangle $A_1B_1C_1$ ou à leurs suppléments; ce point est un métapôle du *triangle aplati* ABC et du triangle $A_1B_1C_1$. Les triangles DA_1B_1, DB_1C_1, DC_1A_1 sont équiangles à DBA, DCB, DAC;

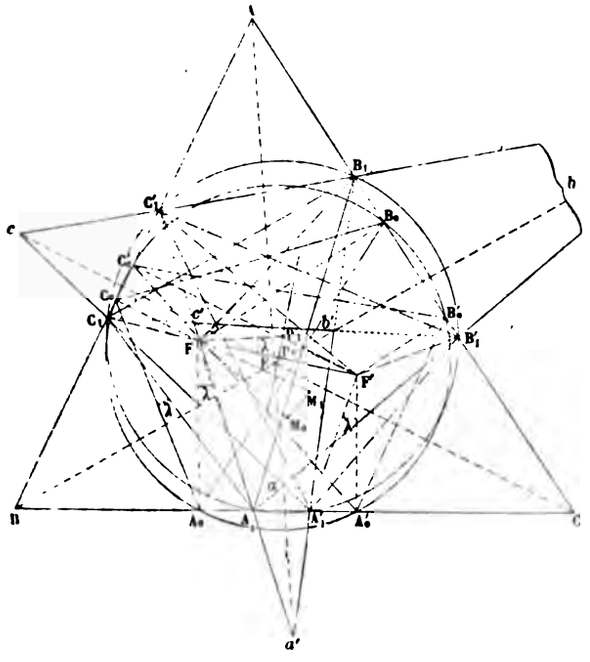
donc le point D est fixe dans le plan $A_1B_1C_1$, et *la circonférence* $A_1B_1C_1$ *passe constamment par* D. De plus, la droite ABC peut être placée de telle façon que les points A et A_1, B et B_1, C et C_1 se correspondent dans une transformation par rayons vecteurs réciproques, effectuée du pôle D ; par suite, D est un centre métaharmonique des triangles $A_1B_1C_1$, ABC.

Le triangle $A_1B_1C_1$ devient maximum quand ses côtés sont perpendiculaires à DA, DB, DC. Tout point de la figure variable décrit une circonférence passant par D. En particulier, le centre du cercle $A_1B_1C_1$ se meut sur la circonférence $O_aO_bO_c$; car, si la tangente menée en A au cercle O_c rencontre le cercle O_b en β, le triangle CβA est une position particulière de $A_1B_1C_1$ et le point O se trouve en O_b, etc.

THÉORÈME.

56. *Si trois points* A_1, B_1, C_1 *d'une figure semblablement variable* φ_1 *parcourent les côtés* BC, CA, AB *d'un triangle donné* ABC, *il existe un point* F *de cette figure qui reste fixe. Tout autre point décrit une droite* (*fig.* 31).

Fig. 31.



Les circonférences AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 se coupent en un même

point F, métapôle des triangles $A_1B_1C_1$, ABC. Ce point est donc fixe dans le plan $A_1B_1C_1$; il l'est également dans le plan ABC, car les angles FBC, FCB sont égaux à FC_1A_1, FB_1A_1. F est donc un *centre permanent de similitude* de φ_1.

Menons FA_0, FB_0, FC_0 perpendiculaires sur BC, CA, AB. Le faisceau $F(A_0B_0C_0)$ peut être considéré comme étant la *position initiale* du faisceau $F(A_1B_1C_1)$. Le minimum du triangle $A_1B_1C_1$ est le triangle podaire de F par rapport à ABC, et le rapport de similitude de φ_1 et φ_0 est exprimé par $\frac{FA_1}{FA_0} = \text{séc}\,\lambda$, λ désignant A_0FA_1.

Soient M_0, M_1 des points homologues de φ_0, φ_1 ; les triangles FM_0M_1, FA_0A_1 étant semblables, le lieu géométrique de M_1 est la perpendiculaire menée en M_0 sur la droite FM_0.

Scolie.

57. 1° Si l'on fait tourner le faisceau $F(A_0B_0C_0)$ du même angle λ dans un sens ou l'autre, ses rayons coupent les côtés de ABC aux sommets de deux triangles égaux. Donc la figure φ_1, dans ses variations, passe deux fois par les mêmes états de grandeur.

2° On peut imaginer une seconde figure φ'_1 qui varie en restant symétriquement semblable à φ_1, avec la condition que les points homologues de A_1, B_1, C_1 parcourent également les droites BC, CA, AB. Le centre permanent de similitude de φ'_1 est le point f, tripolairement associé à F dans le triangle ABC. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que *les inverses des aires des triangles podaires des points* F, f *ont une différence constante, égale à quatre fois l'inverse de l'aire* ABC.

58. Soit F' l'inverse de F dans le triangle ABC, et soit $A'_0B'_0C'_0$ le triangle podaire de F'. Les triangles $A_0B_0C_0$, $A'_0B'_0C'_0$ sont inscrits dans la même circonférence ayant pour centre le milieu P_0 du segment FF' (*fig.* 31).

Faisons tourner les deux faisceaux $F(A_0B_0C_0)$, $F'(A'_0B'_0C'_0)$ autour de leurs centres d'un même angle λ, mais dans des sens contraires. Leurs rayons rencontrent BC, CA, AB aux sommets de deux triangles $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$, qui sont respectivement semblables à $A_0B_0C_0$, $A'_0B'_0C'_0$. Soit P_1 le centre de la circonférence A_1B_1 ; C_1 les triangles FP_0P_1 et FA_0A_1 étant directement semblables, il en est de même des triangles $F'P_0P_1$ et $F'A'_0A'_1$. Il résulte de là que *les deux triangles* $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$ *sont inscrits dans une même circonférence.*

On peut donner deux autres modes de génération des groupes de six points, tels que $A_1B_1C_1A'_1B'_1C'_1$, situés sur le périmètre d'un triangle fixe ABC et appartenant à une même circonférence. Soit *abc* le triangle

formé par les droites $B_1C'_1$, $C_1A'_1$, $A_1B'_1$, et soit $a'b'c'$ le triangle qui a pour côtés les droites B'_1C_1, C'_1A_1, A'_1B_1. *Les côtés des triangles abc, a'b'c' ont des directions invariables, et leurs sommets parcourent trois droites fixes* AE, BE, CE. En effet : 1° Le quadrilatère $B_1C'_1A'_1B'_1$ étant inscrit, l'angle $AB_1C'_1 = C'_1A'_1B'_1$; donc les côtés du triangle abc font avec CA, AB, BC des angles égaux aux angles A'_1, B'_1, C'_1 du triangle $A'_1B'_1C'_1$, etc. 2° Les côtés du triangle $C_1B'_1a$ ont des directions fixes et deux sommets décrivent des droites ; par suite, le point a se meut sur une droite passant par A. 3° Les côtés opposés de l'hexagone inscrit $A_1B'_1B_1A'_1C_1C'_1$ se coupent en trois points a, A, a', situés en ligne droite. 4° Enfin, les côtés opposés de l'hexagone inscrit $A_1A'_1B_1B'_1C_1C'_1$ se coupant sur une même droite, les côtés de rang pair et ceux de rang impair forment deux triangles ABC, abc qui ont un centre d'homologie.

Cherchons les coordonnées normales x, y, z de E dans le triangle ABC. Le rapport $y : z$ est égal à celui des perpendiculaires menées du point a sur AC et AB ; d'où

$$\frac{y}{z} = \frac{aB'_1 \sin A_1B'_1B_1}{aC_1 \sin A'_1C_1C'_1} = \frac{aB'_1}{aC_1} \cdot \frac{\sin A_1C_1B_1}{\sin A'_1B'_1C'_1}.$$

Dans le triangle $aC_1B'_1$,

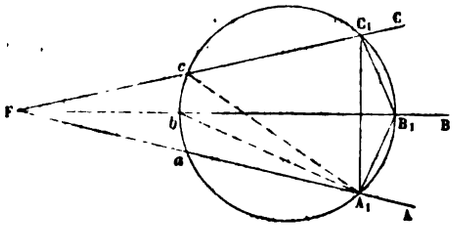
$$\frac{aB'_1}{aC_1} = \frac{\sin A'_1C_1B'_1}{\sin A_1B'_1C_1} = \frac{\sin A'_1C'_1B'_1}{\sin A_1B_1C_1}.$$

On déduit, de ces égalités,

$$\frac{x}{\operatorname{cosec} A_1 \operatorname{cosec} A'_1} = \frac{y}{\operatorname{cosec} B_1 \operatorname{cosec} B'_1} = \frac{z}{\operatorname{cosec} C_1 \operatorname{cosec} C'_1}.$$

59. Examinons encore le cas (*fig.* 32) où trois points A_1, B_1, C_1 d'une figure semblablement variable sont assujettis à se mouvoir sur trois

Fig. 32.



droites concourantes FA, FB, FC. Si l'on donne le point A_1 sur FA et que la circonférence $A_1B_1C_1$ rencontre les droites FA, FB, FC en a, b, c,

on peut déterminer les points b, c par la condition que les angles A_1bB, A_1cF soient égaux à $A_1C_1B_1$, $A_1B_1C_1$, et, par suite, décrire la circonférence A_1bc. Cette construction montre que les côtés du triangle $A_1B_1C_1$ se déplacent parallèlement à eux-mêmes, lorsque A_1 se meut sur FA. F est donc un *centre permanent d'homothétie*.

Il peut arriver que la circonférence $A_1B_1C_1$ passe par F. Alors toute circonférence passant par F rencontre FA, FB, FC en trois points qui sont les sommets d'un triangle de forme constante; et F n'est plus un centre permanent de similitude.

SUR QUELQUES CERCLES REMARQUABLES.

60. Les résultats des n°s 56, 57, 58 prennent une forme très simple, lorsque le triangle $A_1B_1C_1$ est directement semblable à BCA. Dans ce cas, F, F′ sont les points de Brocard Ω, Ω′; le triangle $A'_1B'_1C'_1$ est semblable à CBA; le centre de la circonférence $A_1B_1C_1$ est situé sur la droite OK; les côtés du triangle abc sont parallèles à ceux de ABC; les côtés du triangle $a'b'c'$ sont parallèles aux tangentes menées par A, B, C au cercle ABC; enfin, le centre d'homologie E des triangles ABC, abc, $a'b'c'$ coïncide avec K.

Nous allons établir ces propriétés par une seconde méthode, qui a l'avantage de s'adapter aux polygones dits *harmoniques*.

PROBLÈME.

61. *Étant donné un triangle* ABC, *on propose d'en construire un second abc qui soit homothétique à* ABC, *et tel que les six points de rencontre des côtés non homologues des deux triangles soient situés sur une même circonférence* (*fig.* 33).

Soient α, α', β, β', γ, γ' ces points. Les points γ, β', β, γ' appartenant à une même circonférence, $\gamma\beta'$ est une transversale antiparallèle de l'angle BAC. Mais la figure $A\gamma a\beta'$ est un parallélogramme; donc la droite Aa passe par le milieu de $\gamma\beta'$ et, par suite, est une symédiane de ABC. On conclut de là que le centre d'homothétie des triangles ABC, abc est le centre des symédianes de chacun d'eux.

Cette condition est suffisante. En effet, soient m, n, p les centres des parallélogrammes $A\gamma a\beta'$, $B\alpha b\gamma'$, $C\beta c\alpha'$, et soit ω le centre du cercle mnp. Puisque les symédianes AK, BK, CK passent aux milieux des transversales $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$, $\alpha'\beta$, celles-ci sont parallèles aux côtés du triangle $K_aK_bK_c$ formé par les tangentes au cercle ABC. Les angles $A\gamma\beta'$, $B\gamma'\alpha$ sont égaux comme étant égaux à ACB; d'où

$$\gamma\beta' = \gamma'\alpha.$$

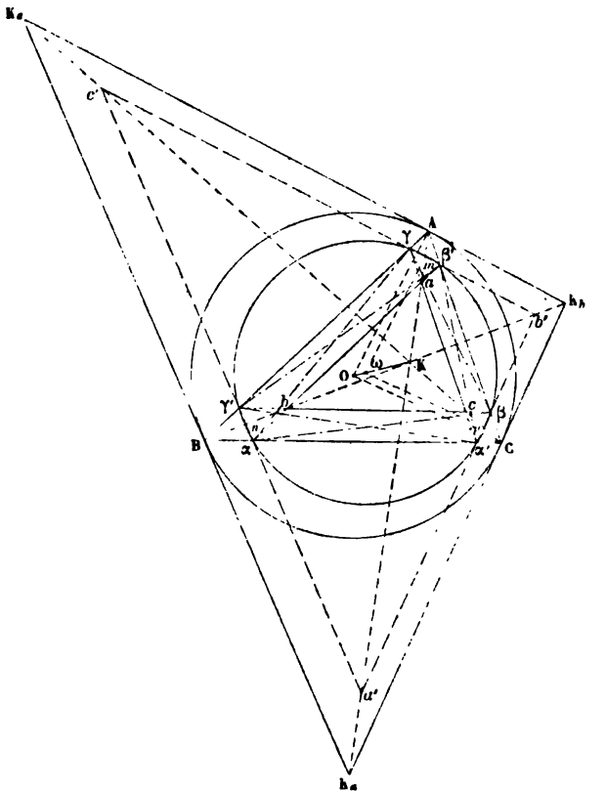
Par conséquent, les triangles rectangles $\omega m\gamma$, $\omega n\alpha$, $\omega p\beta$ sont égaux, et ω est le centre d'un cercle passant par les six points α, α', β, β', γ, γ'.

Les triangles ABC, *mnp* étant homothétiques par rapport à K, ω est situé sur la droite OK.

SCOLIE.

62. 1° Les droites $\gamma\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\beta\alpha'$ sont parallèles aux côtés du triangle $K_aK_bK_c$ et divisent les droites KA, KB, KC en parties proportionnelles; elles forment donc un triangle $a'b'c'$, homothétique à $K_aK_bK_c$ par rapport à K.

Fig. 33.



2° De l'égalité des arcs $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$, $\alpha'\beta$, on conclut aisément que les triangles $\gamma\alpha\beta$, $\beta'\gamma'\alpha'$ sont égaux entre eux et semblables à ABC.

3° Soient Ω, Ω' les points de Brocard du triangle ABC. Si l'on fait tourner le faisceau Ω(ABC) autour de Ω d'un angle quelconque, ses rayons

rencontrent AB, BC, CA aux sommets d'un triangle $\gamma\alpha\beta$ semblable à ABC : car les triangles $\Omega A\gamma$, $\Omega B\alpha$, $\Omega C\beta$ sont directement semblables, d'où l'on conclut la similitude des triangles ΩAB et $\Omega\gamma\alpha$, ΩBC et $\Omega\alpha\beta$, ΩCA et $\Omega\beta\gamma$. On voit que Ω et Ω' sont les centres permanents de similitude des triangles variables $\gamma\alpha\beta$, $\beta'\gamma'\alpha'$ de la *fig.* 33.

4° Le lecteur trouvera facilement la démonstration des théorèmes suivants :

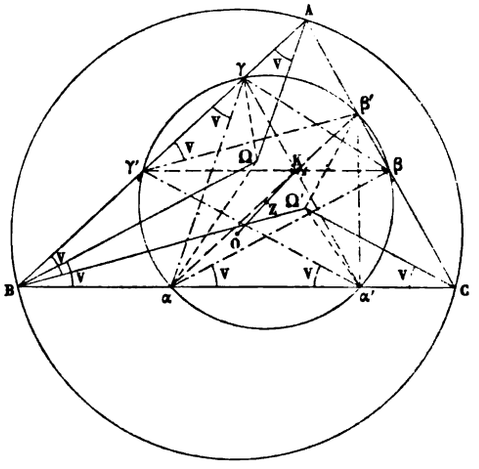
Soient $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$, $\alpha'\beta$ *trois arcs égaux, de même sens, d'une circonférence. Les cordes* $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$, $\alpha'\beta$ *forment un triangle* $a'b'c'$; *les cordes* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, *un second triangle* ABC; *les cordes* $\beta\gamma'$, $\gamma\alpha'$, $\alpha\beta'$, *un troisième triangle abc. Ces trois triangles ont pour centre d'homologie commun le centre des symédianes des triangles* ABC, *abc.*

On inscrit à une circonférence ω *un hexagone* $\alpha\alpha'\gamma\gamma'\beta\beta'$ *dont les côtés opposés sont parallèles. Le triangle formé par les côtés de rang impair et celui qui est déterminé par les côtés de rang pair, ont mêmes symédianes.*

63. Si le triangle *abc* de la *fig.* 33 se réduit au point K, on a le théorème suivant :

Les parallèles aux côtés d'un triangle ABC, *menées par le point* K. *coupent les côtés en six points* α, α', β, β', γ, γ' *d'une même circonférence ayant son centre au milieu de* OK (*fig.* 34).

Fig. 34.



Les angles $K\alpha\gamma$, $K\gamma\beta$, $K\beta\alpha$ ont pour mesures les moitiés des arcs égaux $\beta'\gamma$, $\alpha'\beta$, $\gamma'\alpha$. Donc K *est le point direct de Brocard du triangle* $\alpha\beta\gamma$; *il est le point rétrograde de Brocard du triangle* $\alpha'\beta'\gamma'$. *Les*

côtés de ces triangles sont parallèles aux rayons des faisceaux $\Omega(ABC)$, $\Omega'(ABC)$.

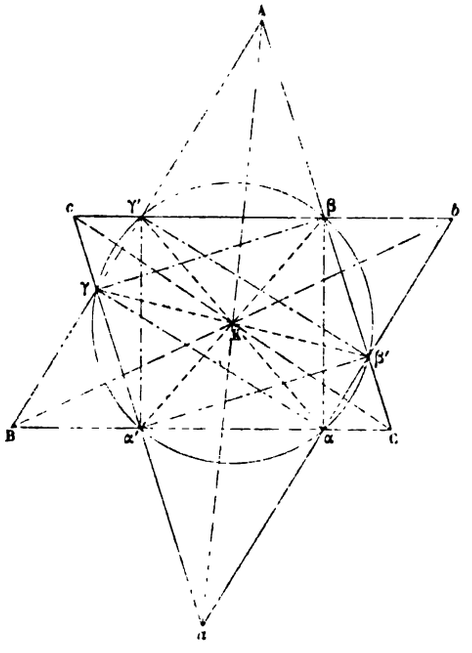
Les côtés homologues des triangles ABC, $\gamma\alpha\beta$ et les rayons homologues des faisceaux $\Omega(ABC)$, $\Omega(\gamma\alpha\beta)$ font entre eux l'angle V; par suite, *les triangles* $\gamma A\Omega$, $\alpha B\Omega$, $\beta C\Omega$ *sont isocèles, et les points* γ, α, β *sont à l'intersection de* AB, BC, CA *avec les perpendiculaires menées aux milieux des rayons* ΩA, ΩB, ΩC.

Le rapport de similitude des triangles $\gamma\alpha\beta$, ABC a pour expression

$$\frac{\Omega\gamma}{\Omega A} = \frac{\sin\Omega A\gamma}{\sin\Omega\gamma A} = \frac{\sin V}{\sin 2V} = \frac{1}{2\cos V}.$$

64. Le triangle $a'b'c'$ de la *fig.* 33 peut se réduire au point K; ce qui donne la proposition suivante : *Les parallèles aux côtés du triangle orthique de* ABC, *menées par le point* K, *rencontrent les côtés des angles* BAC, CBA, ACB *en six points* α, α', β, β', γ, γ' *d'une circonférence ayant pour centre le point* K (*fig.* 35).

Fig. 35.



Cette figure donne lieu à plusieurs remarques intéressantes.

A un triangle donné ABC, *on peut inscrire deux triangles* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *ayant leurs côtés perpendiculaires à ceux de* ABC. *Ces triangles sont inscrits dans une même circonférence ayant pour centre le point* K.

Si un hexagone inscrit $\alpha\beta'\beta\gamma'\gamma\alpha'$ *a ses côtés opposés égaux et parallèles, le centre de la circonférence circonscrite est le centre des symédianes de chacun des triangles* ABC, *abc formés avec des côtés alternants de l'hexagone.*

Ω étant le centre de similitude des triangles $\gamma\alpha\beta$, ABC, dont les côtés homologues sont perpendiculaires, les angles $A\Omega\gamma$, $B\Omega\alpha$, $C\Omega\beta$ sont droits: donc le rapport de similitude de ces triangles a pour expression

$$\frac{\Omega\gamma}{\Omega A} = \operatorname{tang} V.$$

THÉORÈME.

65. *Soient* H_1, H_2, H_3 *les pieds des hauteurs du triangle* ABC; a', b', c' *les milieux des droites* H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2; β' *et* γ *les projections de* H_1 *sur* AC *et* AB, γ' *et* α *celles de* H_2 *sur* BA *et* BC, α' *et* β *celles de* H_3 *sur* CB *et* CA.

Cela posé :

1° *Les six points* α, α', β, β', γ, γ' *sont situés sur une même circonférence* T.

2° *Les droites* $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$, $\alpha'\beta$ *passent par deux des points* a', b', c' *et ont pour longueur commune le demi-périmètre du triangle* $H_1H_2H_3$.

3° *Le centre du cercle* T *est le centre du cercle inscrit au triangle* $a'b'c'$; *il est situé au milieu de chacune des droites* H_1A_h, H_2B_h, H_3C_h *joignant les pieds des hauteurs de* ABC *aux orthocentres des triangles* AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 (*fig.* 36).

Nous rattachons cette proposition aux n°s 61 et 62.

On sait que les droites Aa', Bb', Cc' concourent au centre K des symédianes de ABC (N., 29). Par conséquent, le triangle $a'b'c'$ est homothétique à $K_aK_bK_c$ par rapport à K, et ses côtés rencontrent ceux de ABC en six points α, α', β, β', γ, γ' d'une même circonférence, dont le centre T est situé sur la droite OK.

Le triangle $c'\beta'H_2$ est isocèle, car

$$\text{angle } A\beta'\gamma = AH_2H_3 = ABC = CH_2H_1;$$

d'où

$$c'\beta' = c'H_2 = c'H_1,$$

et l'angle $H_2\beta'H_1$ est droit. Ainsi, les points α, α', β, β', γ, γ' sont les pieds des hauteurs des triangles AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2.

Nous venons de trouver

$$c'\beta' = c'H_2 = a'b';$$

par analogie,

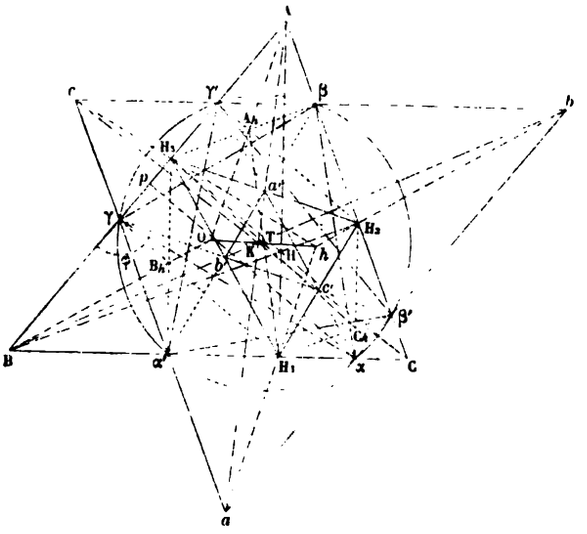
$$b'\gamma = b'H_3 = c'a'.$$

Donc la droite $\beta'\gamma$ est égale au périmètre du triangle $a'b'c'$.

Les cordes égales $\beta'\gamma$, $\gamma'\alpha$, $\alpha'\beta$ sont à égale distance du centre; donc T est le centre du cercle inscrit au triangle $a'b'c'$.

Nous avons trois parallélogrammes $A_hH_3HH_2$, $B_hH_3HH_1$, $C_hH_1HH_2$; donc les côtés opposés de l'hexagone $A_hH_2C_hH_1B_hH_3$ sont égaux et parallèles, et les diagonales A_hH_1, B_hH_2, C_hH_3 se coupent mutuellement en parties égales. La droite $a'T$, bissectrice de l'angle $c'a'b'$, est parallèle à H_3B_h et passe par le milieu de H_2H_3; donc elle passe également par le milieu de H_2B_h. On conclut de là que T est le milieu de chacune des droites A_hH_1, B_hH_2, C_hH_3.

Fig. 36.



Scolie.

66. 1° Les droites AA_h, BB_h, CC_h étant perpendiculaires à H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 concourent au centre O du cercle ABC. Les triangles $A_hB_hC_h$, $H_1H_2H_3$ sont symétriques par rapport à T; donc leurs côtés homologues sont égaux et parallèles, et O est aussi l'orthocentre de $A_hB_hC_h$. Soit h l'orthocentre de $H_1H_2H_3$; ce point est le symétrique de O par rapport à T, donc il est situé sur la droite OK.

2° Les droites $\beta\gamma'$, $\gamma\alpha'$, $\alpha\beta'$ forment un triangle *abc* homothétique à ABC par rapport à K (N., 62), propriété qu'on peut démontrer directement.

La droite $A\alpha'K$ passe donc au milieu m de $b'c'$. Mais $b'm$ est égal au demi-périmètre γm du triangle $a'b'c'$ diminué de $b'\gamma = a'c'$; donc m est le point de contact de $b'c'$ avec le cercle inscrit au triangle $a'b'c'$. Autrement dit, K *est le point de Gergonne du triangle* $a'b'c'$.

3° Les droites γH_1, $\beta' H_1$ étant perpendiculaires à $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma$, la droite aH_1 est perpendiculaire à $\beta'\gamma$ et H_2H_3. Donc les lignes aH_1, bH_2, cH_3 sont les hauteurs du triangle $H_1H_2H_3$; il est facile de voir que leur point de concours h est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle *abc*.

4° On sait que les triangles $\gamma\alpha\beta$, ABC sont semblables et ont même point de Brocard Ω.

Leurs côtés homologues font un angle constant φ, que l'on peut calculer par la formule

$$\operatorname{tang}\varphi = -(\operatorname{tang}A + \operatorname{tang}B + \operatorname{tang}C) = -\operatorname{tang}A\operatorname{tang}B\operatorname{tang}C.$$

Pour démontrer celle-ci, menons αp perpendiculaire à AB; nous aurons (*fig.* 36)

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\alpha\gamma B = -\frac{\alpha p}{\gamma p}, \quad \frac{\alpha p}{CH_3} = \frac{B\alpha}{BC}, \quad \frac{\gamma p}{BH_3} = \frac{H_1\alpha}{BC}.$$

D'où, en éliminant αp et γp,

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{CH_3 . B\alpha}{BH_3 . H_1\alpha} = -\frac{CH_3}{BH_3}\cdot\frac{B\alpha}{\alpha H_2}\cdot\frac{\alpha H_2}{H_1\alpha};$$

puis, en observant que

$$\frac{CH_3}{BH_3} = \operatorname{tang}B, \quad \frac{B\alpha}{\alpha H_2} = \operatorname{tang}BH_2\alpha = \operatorname{tang}C, \quad \frac{\alpha H_2}{H_1\alpha} = \operatorname{tang}\alpha H_1 H_2 = \operatorname{tang}A,$$

on trouve la formule indiquée.

Soient ρ le rayon du cercle T et R celui du cercle ABC. Le triangle $\alpha\gamma\gamma'$ donne

$$\alpha\gamma' = 2\rho\sin\varphi.$$

Mais les quadrilatères OH_2AH_3, OH_3BH_1, OH_1CH_2 ont pour mesures $\frac{1}{2}H_2H_3 . AO$, $\frac{1}{2}H_3H_1 . BO$, $\frac{1}{2}H_1H_2 . CO$; par suite, l'aire du triangle ABC est

$$S = \frac{1}{2}R(H_2H_3 + H_3H_1 + H_1H_2) = R.\alpha\gamma',$$

et comme on a

$$\rho = \frac{\alpha\gamma'}{2\sin\varphi} = \frac{S}{2R\sin\omega} = R\frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin\varphi},$$

le rapport de similitude des triangles $\alpha\beta\gamma$, ABC a pour valeur

$$\frac{\rho}{R} = \frac{\sin A\sin B\sin C}{\sin\varphi} = -\frac{\cos A\cos B\cos C}{\cos\varphi}.$$

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE.

1. Les coordonnées normales absolues d'une droite vérifient la relation (N., 1, 3)

$$\sqrt{a^2-(\mu-\nu)^2}\pm\sqrt{b^2-(\nu-\lambda)^2}\pm\sqrt{c^2-(\lambda-\mu)^2}=0,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$a^2\lambda^2+b^2\mu^2+c^2\nu^2-(b^2+c^2-a^2)\mu\nu$$
$$-(c^2+a^2-b^2)\nu\lambda-(a^2+b^2-c^2)\lambda\mu=4S^2.$$

2. La perpendiculaire menée du centre O du cercle circonscrit à un triangle ABC, sur l'axe orthique (N., 7), a pour expression $\frac{3R^2+\overline{OH}^2}{4OH}$.

3. Du centre O du cercle circonscrit au triangle ABC on abaisse des perpendiculaires sur les droites passant par les pieds des trois bissectrices extérieures ou par ceux de deux bissectrices intérieures. Ces perpendiculaires ont pour mesures

$$(R+r)\sqrt{\frac{R}{R+2r}},\quad (R-r_a)\sqrt{\frac{R}{R+2r_a}},\quad \ldots.$$

4. Le centre radical des trois cercles exinscrits à un triangle ABC coïncide avec le centre du cercle inscrit au triangle complémentaire de ABC. — Proposition analogue pour le centre radical du cercle inscrit à ABC, combiné avec deux cercles exinscrits.

5. Si deux triangles sont symétriques par rapport à un point, les transversales réciproques (N., 8) des côtés de l'un par rapport à l'autre triangle sont concourantes.

6. Une transversale m rencontre les côtés d'un triangle ABC aux points m_1, m_2, m_3. Les isogonales (N., 9) des droites Am_1, Bm_2, Cm_3 rencontrent les côtés aux points m'_1, m'_2, m'_3. Démontrer que les

points m'_1, m'_2, m'_3 sont situés sur une droite m_i. Les droites m, m_i sont appelées *transversales inverses*.

7. Soient M, N, P trois points quelconques pris sur les côtés BC, CA, AB du triangle ABC. Démontrer la formule

$$\frac{\text{MNP}}{\text{ABC}} = \frac{\text{BM.CN.AP} + \text{MC.NA.PB}}{\text{AB.BC.CA}}.$$

En conclure que 1° si M', N', P' sont les isotomiques des points M, N, P, les triangles MNP, M'N'P' sont équivalents; 2° si ABCDEF est un hexagone dont les côtés opposés soient parallèles, les triangles ACE, BDF sont équivalents.

8. Calculer en fonction des côtés d'un triangle ABC : 1° l'aire du triangle orthique; 2° celle du triangle qui a pour sommets les pieds des trois bissectrices intérieures; 3° celle du triangle qui a pour sommets les points de contact des côtés du triangle ABC avec le cercle inscrit.

9. Soit P un point quelconque du plan d'un triangle ABC, et soient H_1, H_2, H_3 les orthocentres (N., 5) des triangles BCP, CAP, ABP. Démontrer que les triangles ABC, $H_1H_2H_3$ sont équivalents.

10. Soient α, β, γ les points où les médianes m, m', m'' du triangle ABC rencontrent la circonférence circonscrite. Démontrer que

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\text{ABC}} = \frac{(m^2 + m'^2 + m''^2)^3}{27 m^2 m'^2 m''^2}.$$

11. Trois droites menées par les sommets d'un triangle ABC et par un même point P rencontrent les côtés aux points A', B', C'. On les prolonge, dans les deux sens, des quantités

$$A'\alpha = A\alpha' = AA', \quad B'\beta = B\beta' = BB', \quad C'\gamma = C\gamma' = CC'.$$

Démontrer que

$$\alpha\beta\gamma = 4\,A'B'C' + 3\,ABC, \quad \alpha'\beta'\gamma' = A'B'C' + 6\,ABC.$$

12. Sur les côtés du triangle ABC, on construit, vers l'extérieur, les carrés BCDE, CAFK, ABLM; soient x, y, z les centres de ces carrés, et soient X, Y, Z les quatrièmes sommets des parallélogrammes construits sur AF et AM, BL et BE, CD et CK. Démontrer les propriétés suivantes :

1° Les droites FM, LE, DK sont égales et perpendiculaires aux médianes de ABC.

2° Les droites AX, BY, CZ sont égales et perpendiculaires aux côtés de ABC.

3° Les droites Ax, By, Cz sont égales et perpendiculaires aux côtés du triangle xyz.

4° Les milieux des côtés du triangle ABC sont les centres des carrés construits intérieurement sur les côtés du triangle xyz.

5° Les points x, y, z sont les milieux des côtés du triangle XYZ.

6° Les triangles ABC, xyz, XYZ, EKM, DFL ont même centre de gravité.

7° Les quadrilatères BCFM, FKBL, MLCK sont équivalents au carré construit sur yz.

8° L'hexagone EDKFMLE a pour mesure chacune des sommes $\overline{BC}^2 + 2\overline{yz}^2$, $\overline{CA}^2 + 2\overline{zx}^2$, $\overline{AB}^2 + 2\overline{xy}^2$.

9° Les droites Ax, BF, CM, KL concourent en un même point.

10° Les quadrilatères EDFM, KFLE, MLDK sont égaux à quatre fois le triangle xyz.

13. Les notations étant celles de l'exercice précédent, on demande de construire le triangle ABC, connaissant :

1° Les points x, y, z;

2° Les points X, Y, Z;

3° Le triangle formé par les droites DE, KF, ML suffisamment prolongées;

4° Le triangle formé par les droites FM, LE, DK suffisamment prolongées.

14. Par un point P, pris dans le plan d'un triangle ABC, on mène une parallèle à BC, rencontrant CA en β, AB en γ'; une parallèle à CA, rencontrant AB en γ, BC en α'; enfin, une parallèle à AB, rencontrant BC en α, CA en β'. Démontrer :

1° Que

$$\frac{\alpha\alpha'}{a} + \frac{\beta\beta'}{b} + \frac{\gamma\gamma'}{c} = 2;$$

2° Que les triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ sont maximums, lorsque P est le centre de gravité de ABC;

3° Que la somme $\overline{\alpha\alpha'}^2 + \overline{\beta\beta'}^2 + \overline{\gamma\gamma'}^2$ est minimum, lorsque

$$a.\alpha\alpha' = b.\beta\beta' = c.\gamma\gamma';$$

les coordonnées barycentriques (N., 2) de P sont alors

$$-\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, \quad \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}.$$

15. Les notations étant celles de l'exercice précédent, démontrer :

1° Que

$$\frac{P\alpha}{c}+\frac{P\beta}{a}+\frac{P\gamma}{b}=\frac{P\alpha'}{b}+\frac{P\beta'}{c}+\frac{P\gamma'}{a}=1;$$

2° Que la somme $\overline{P\alpha}^2+\overline{P\beta}^2+\overline{P\gamma}^2$ est minimum, lorsque P est le point de Brocard Ω.

16. Étant donné un triangle ABC, déterminer un point J_1 tel que, si l'on mène les droites $J_1\alpha_1$, $J_1\beta_1$, $J_1\gamma_1$ parallèles à AB, BC, CA et rencontrant en α_1, β_1, γ_1 les côtés BC, CA, AB, on ait

$$J_1\alpha_1 = J_1\beta_1 = J_1\gamma_1.$$

De même, déterminer un point J_2 tel, que les droites $J_2\alpha_2$, $J_2\beta_2$, $J_2\gamma_2$ parallèles à CA, AB, BC et limitées à BC, CA, AB, soient égales entre elles.

Les coordonnées normales des points J_1, J_2 sont

$$\left(\frac{1}{b},\frac{1}{c},\frac{1}{a}\right),\quad \left(\frac{1}{c},\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right);$$

l'inverse de $J_1\alpha_1$ et $J_2\alpha_2$ est égal à la somme des inverses de a, b, c; l'orthocentre de l'un des triangles $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ est le centre du cercle circonscrit à l'autre; enfin, ces deux triangles ont même cercle des neuf points.

17. Étant donné un triangle ABC, déterminer un point J tel, que les parallèles menées par ce point aux côtés de ABC et terminées aux autres côtés soient égales.

Démontrer que l'inverse de l'une de ces parallèles égale la demi-somme des inverses des côtés de ABC, et que J est le complémentaire du réciproque du centre du cercle inscrit au triangle ABC.

Les associés harmoniques des points J, J_1, J_2 (voir l'énoncé précédent) jouissent de propriétés analogues.

18. Soient AM, AN deux droites symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle A du triangle ABC; soient M, N leurs points de rencontre avec BC, et M', N' leurs points de rencontre avec la circonférence ABC. On a

$$AM.AN' = AM'.AN = AB.AC,$$

$$\frac{\overline{AM}^2}{\overline{AN}^2}=\frac{BM.CM}{BN.CN}.$$

19. La symédiane AK et la tangente menée par A au cercle circonscrit au triangle ABC rencontrent le côté BC en K_1, k_1; si A′ est le milieu de BC, on a

$$AK_1 = \frac{2bc}{b^2 + c^2} AA', \quad Ak_1 = \frac{abc}{b^2 - c^2}.$$

20. Dans tout triangle, au plus grand côté est opposée la plus petite symédiane, et réciproquement. Un triangle est isocèle, si deux symédianes sont égales.

21. Sur les côtés d'un triangle ABC, on construit les triangles directement semblables A′BC, B′CA, C′AB. Démontrer que les droites AA′, BB′, CC′ sont égales et parallèles aux côtés d'un même triangle.

22. Soient M, N, P trois points pris sur les côtés du triangle ABC; soient M′, N′, P′ leurs isotomiques. Démontrer que les centres de gravité des triangles MNP, M′N′P′ sont symétriques par rapport au centre de gravité de ABC.

23. Soient A′, B′, C′ des points divisant les côtés BC, CA, AB du triangle ABC dans le même rapport $p : q$.

1° Les triangles A′B′C′, ABC ont même centre de gravité.

2° Les droites AA′, BB′, CC′ sont égales et parallèles aux côtés d'un même triangle A″B″C″.

3° Si a, b, c, a', b', c', S, S′ sont les côtés et les aires des triangles ABC, A″B″C″, on a

$$\frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{\sqrt{a'^4 + b'^4 + c'^4}}{\sqrt{a^4 + b^4 + c^4}} = \frac{S'}{S} = \frac{p^2 + pq + q^2}{(p + q)^2}.$$

4° Soient A‴, B‴, C‴ les intersections mutuelles des droites AA′, BB′, CC′; on a

$$\frac{AB'''}{AC'''} = \frac{p}{q}, \quad \frac{A'B'''}{A'C'''} = \frac{q^2}{p^2}, \quad \frac{B'''C'''}{a'} = \frac{q^2 - p^2}{p^2 + pq + q^2},$$

$$\frac{A'''B'''C'''}{ABC} = \frac{(q - p)^2}{p^2 + pq + q^2}.$$

5° Les triangles ABC, A′B′C, A″B″C″ ont même angle de Brocard.

24. Le centre des symédianes d'un triangle ABC et le centre du cercle circonscrit sont des points réciproques par rapport au triangle complémentaire de ABC.

Le réciproque de l'orthocentre de ABC est l'anticomplémentaire du centre des symédianes.

25. Soient G, H le centre de gravité et l'orthocentre du triangle ABC

et soient α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 les points de rencontre des hauteurs et des médianes de ABC avec la circonférence décrite sur GH comme diamètre. Démontrer que :

1° Le triangle $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ est inversement semblable à ABC, et que le triangle $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ est inversement semblable au triangle podaire du centre K des symédianes de ABC.

2° Les droites $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ sont les symédianes des triangles $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ et se coupent en K.

26. Les tangentes menées par les sommets d'un triangle ABC au cercle circonscrit formant le triangle $K_aK_bK_c$:

1° Les coordonnées normales absolues de K_a sont $-\frac{1}{2}a\tan A$, $\frac{1}{2}b\tan A$, $\frac{1}{2}\tan A$.

2° K_a et ses projections sur les côtés de ABC sont les sommets d'un parallélogramme.

3° Les droites joignant K_a, K_b, K_c aux pieds H_1, H_2, H_3 des hauteurs de ABC se coupent en un point de la droite OH, qui est l'inverse de l'anticomplémentaire de K.

4° Les droites joignant A, B, C aux milieux des segments OK_a, OK_b, OK_c concourent au point inverse du centre du cercle des neuf points de ABC.

5° Le centre du cercle circonscrit au triangle $K_aK_bK_c$ est sur la droite OH.

27. Parmi les triangles inscrits à ABC, celui dont la somme des carrés des côtés est minimum a pour sommets les projections de K sur BC, CA, AB.

28. Soient I le centre du cercle inscrit (r) au triangle ABC; α, β, γ les points de contact de ce cercle avec les côtés de ABC; O le centre du cercle ABC de rayon R; G' le centre de gravité du triangle $\alpha\beta\gamma$. Démontrer que G' est sur la droite OI, que $IG' = \frac{OI.r}{3R}$ et que la polaire de G' par rapport au cercle I passe par les pieds des bissectrices extérieures du triangle ABC.

29. Sur les côtés BA, CA d'un triangle ABC, on prend les longueurs BD = CE = BC. Démontrer que la droite joignant les centres O, I du cercle circonscrit et du cercle inscrit au triangle ABC est perpendiculaire à la droite DE et égale au diamètre du cercle circonscrit au triangle ADE.

Quel est le théorème analogue sur les cercles exinscrits?

30. Si la droite OK du triangle ABC est parallèle à BC, on a les propriétés suivantes :

1° $b^4 + c^4 = a^2(b^2 + c^2)$;

2° $V = \frac{1}{2}\pi - A$;

3° Ω est sur la hauteur BH_2, Ω′ sur la hauteur CH_2;

4° La médiane CC′ et la hauteur BH_2 se coupent sur la symédiane AK; il en est de même de BB′ et CH_2;

5° AA′ passe par le milieu de OK.

31. La droite ΩΩ′ est parallèle ou perpendiculaire à AA′ ou parallèle à OA, lorsque, respectivement,

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right), \quad a^4 = 2b^2c^2 + a^2(b^2 + c^2),$$

$$a^2(b^2 + c^2 - 2a^2) = (b^2 - c^2)^2.$$

32. Si l'on a $c^2 = ab$:

1° La droite ΩΩ′ coïncide avec la bissectrice CI;

2° Les points Ω, Ω′ se confondent avec les projections A_1, B_1 de K sur les médiatrices OA′, OB′;

3° Le cercle (OK) touche AΩ en Ω, BΩ′ en Ω′;

4° La médiane AA′ et la symédiane BK se coupent sur CI; il en est de même de BB′ et AK.

33. Si $a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2)$:

1° Le triangle podaire XYZ de K est semblable à ACB;

2° La circonférence AB′C′ passe par G; les circonférences AGB, AGC touchent le côté BC; la circonférence BGC passe par H;

3° OK est perpendiculaire à AK, GK est parallèle à BC;

4° $\overline{AK}^2 = BK.CK$, $2\overline{AH}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2$;

5° Le triangle podaire de G est isocèle;

6° Le cercle qui passe par A et les pieds des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle ABC passe par G;

7° Lorsque deux sommets du triangle ABC restent fixes, le troisième décrit une circonférence.

34. Soient X, Y, Z les projections du centre de gravité G du triangle ABC sur les côtés BC, CA, AB. La droite GX rencontre CA en X_1, AB en X_2; la droite GY coupe AB en Y_1, BC en Y_2; enfin, la droite GZ

coupe BC en Z_1, CA en Z_2. Démontrer les formules

$$XYZ = \frac{4}{9}\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2b^2c^2}S^3,$$

$$X_1Y_1Z_1 = X_2Y_2Z_2 = \frac{16}{9}\frac{a^2+b^2+c^2}{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}S^3.$$

35. Soient A_1, B_1, C_1 les projections du centre K des symédianes du triangle ABC sur les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés. Soit D le point de concours des droites AA_1, BB_1, CC_1. Démontrer que les droites joignant les milieux des côtés homologues des triangles ABC, $A_1B_1C_1$ concourent en un même point S, qui est, à la fois, le complémentaire de D, le milieu de la distance $\Omega\Omega'$ et l'inverse du pôle de la corde $\Omega\Omega'$ du cercle (OK).

36. H étant l'orthocentre du triangle ABC, on porte, sur les droites HA, HB, HC, des longueurs HA', HB', HC' égales aux hauteurs correspondantes de ABC. Les parallèles menées par A', B', C' aux côtés BC, CA, AB forment un nouveau triangle $A''B''C''$. Démontrer que H est le centre de gravité de $A''B''C''$, et que le centre d'homothétie des triangles ABC, $A''B''C''$ est le centre du cercle des neuf points de chacun d'eux.

37. A un triangle donné ABC, on circonscrit deux triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$, semblables à un triangle donné $\alpha\beta\gamma$, et ayant leurs côtés homologues perpendiculaires entre eux. Démontrer que la somme des aires des triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ est constante.

38. On mène, par les sommets d'un triangle ABC, des droites faisant un même angle λ, dans le même sens, avec les côtés opposés; soit A'B'C' le triangle formé par ces droites. On demande de démontrer que :

1° Le centre du cercle circonscrit à A'B'C' est l'orthocentre de ABC:

2° Les projections de BC, CA, AB sur B'C' C'A', A'B' sont égales à $\frac{1}{2}B'C'$, $\frac{1}{2}C'A'$, $\frac{1}{2}A'B'$;

3° Il existe une valeur de λ telle, que le triangle A'B'C' soit égal à ABC.

39. Étant donnés les sommets B, C d'un triangle ABC et la symédiane indéfinie BK, le sommet A décrit une circonférence.

40. Construire un triangle ABC, connaissant :

1° Les longueurs AB, AC, AK_1;

2° Les longueurs BC, AA', AK_1;

3° Les points B, C, K:

4° Les points B, C, Ω;

5° Les points A, G, K;
6° Les points A, O, K;
7° Les points A, O, Ω.

41. Sur une droite fixe OX, on porte trois longueurs OA', OB', OC' égales aux côtés d'un triangle ABC; puis on forme les angles XA'M, XB'N, XC'P, respectivement égaux aux moitiés des angles opposés de ABC. Démontrer que :

1° Les droites A'M, B'N, C'P se rencontrent en un même point T;

2° Les longueurs A'T, B'T, C'T sont égales aux distances AI, BI, CI, I désignant le centre du cercle inscrit à ABC;

3° La perpendiculaire TQ abaissée sur OX est égale au rayon de ce cercle;

4° OQ est égale au demi-périmètre de ABC.

42. On construit trois angles XOA', XOB', XOC' égaux aux angles A, B, C d'un triangle ABC, et l'on prend $OA' = BC$, $OB' = CA$, $OC' = AB$. Démontrer que :

1° Les points O, A', B', C' sont situés sur une circonférence égale à la circonférence ABC;

2° Les côtés du triangle A'B'C' sont doubles des distances comprises entre les milieux des côtés de ABC et les pieds des hauteurs correspondantes;

3° Les distances de O aux points de rencontre de OX avec B'C', C'A', A'B' sont égales à $\frac{bc}{a}$, $\frac{ca}{b}$, $\frac{ab}{c}$;

4° La droite joignant O au centre de gravité du triangle A'B'C' fait avec OX un angle égal à $\frac{\pi}{2} - V$, V étant l'angle de Brocard de ABC.

43. Sur une droite fixe OX, on porte trois longueurs OA', OB', OC' proportionnelles aux carrés des côtés d'un triangle ABC; puis on forme les angles XA'M, XB'N, XC'P égaux aux angles opposés A, B, C. Démontrer que :

1° Les droites A'M, B'N, C'P se rencontrent en un même point T;

2° Les longueurs A'T, B'T, C'T sont proportionnelles aux rectangles bc, ca, ab des côtés;

3° La perpendiculaire TQ abaissée sur OX est proportionnelle au double de l'aire ABC;

4° OQ est proportionnelle à $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$;

5° OT est proportionnelle à $\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$;

6° L'angle XOT est égal à l'angle V de Brocard du triangle ABC.

44. Soient A, B, C, D quatre points d'une circonférence. Démontrer que les centres des cercles inscrits aux triangles ABC, ACD, BCD, ABD sont les sommets d'un rectangle. Considérer également les centres des cercles exinscrits.

45. Une transversale m coupe les côtés d'un triangle ABC aux points m_1, m_2, m_3; les perpendiculaires élevées en ces points sur les côtés correspondants de ABC forment un nouveau triangle A'B'C'. Démontrer que :

1° Les droites AA', BB', CC' se coupent en un même point M, commun aux deux circonférences ABC, A'B'C';

2° Ces circonférences sont orthogonales (383);

3° Les droites de Simson (169, 11°) de M par rapport aux triangles ABC, A'B'C' sont parallèles à m;

4° Les points A', B', C' parcourent des circonférences, lorsque m se déplace de manière que l'aire du triangle A'B'C' soit constante.

46. Soient AH_1, BH_2, CH_3 les hauteurs du triangle ABC, et H leur point de concours; A', B', C' les milieux de BC, CA, AB; A'', B'', C'' les milieux des segments AH, BH, CH; A''', B''', C''' les milieux de H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2. Démontrer que :

1° Les droites de Simson des sommets de l'un des triangles $H_1H_2H_3$, A'B'C' par rapport à l'autre triangle, concourent au centre T du cercle inscrit au triangle A'''B'''C''';

2° Les droites de Simson des points A'', B'', C'' par rapport au triangle A'B'C', forment un triangle qui est homologique avec le triangle ABC par rapport au centre de gravité du triangle $H_1H_2H_3$ et qui a pour orthocentre le point T.

47. Soient O, I les centres du cercle circonscrit et du cercle inscrit à un triangle ABC; $K_aK_bK_c$ le triangle que forment les tangentes menées en A, B, C au cercle O; α, β, γ les centres des cercles inscrits dans les triangles K_aBC, K_bCA, K_cAB; enfin, $\alpha'\beta'\gamma'$ le triangle formé par les cordes communes aux cercles O et α, O et β, O et γ. Démontrer que :

1° Les diagonales de l'hexagone formé par les côtés des triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$ sont parallèles aux côtés de ABC, passent par I et touchent, chacune, deux des cercles α, β, γ;

2° Le centre radical des cercles α, β, γ coïncide avec le centre du cercle inscrit au triangle $\alpha'\beta'\gamma'$;

3° Les droites $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ se coupent en un même point dont les coordonnées normales sont a^2, b^2, c^2.

48. Soit A'B'C' le triangle formé par les symétriques d'une droite m

par rapport aux trois côtés d'un triangle donné ABC. Démontrer que :

1° Le triangle A'B'C' est de forme constante;

2° Le centre du cercle inscrit à A'B'C' (d'un cercle exinscrit, lorsque le triangle ABC est obtusangle) est sur la circonférence ABC;

3° Quand la droite m se déplace parallèlement à elle-même, les points A', B', C' décrivent des droites;

4° Quand la droite m roule sur une circonférence ayant pour centre l'orthocentre du triangle ABC, l'aire A'B'C' reste invariable.

49. Un triangle ABC étant inscrit dans un cercle S, on considère sur la circonférence deux points P et P'. Les projections de ces points sur les côtés du triangle sont situés sur deux droites qui se coupent en M. Cela posé :

1° Démontrer que ce point M décrit une circonférence S' quand le sommet C se meut sur le cercle S, les points A, B, P, P' restant fixes;

2° Trouver le lieu des centres des cercles S' lorsque les points P et P' se déplacent sur la circonférence S, de façon que l'arc PP' ait une longueur constante. (*Agrégation*, 1879.)

50. Un triangle ABC tourne autour d'un point fixe X de son plan. Soient A', B', C' les intersections des côtés homologues dans deux positions quelconques du triangle. Démontrer que le quadrilatère XA'B'C est toujours semblable à lui-même.

Comment faut-il choisir le point X pour qu'il soit le centre du cercle circonscrit ou inscrit au triangle A'B'C', ou l'orthocentre de A'B'C', ou son centre de gravité?

51. On considère les cercles exinscrits à un triangle ABC et l'on joint les points de contact de ces cercles avec les deux côtés qui ont été prolongés; on forme ainsi un nouveau triangle A'B'C'.

Soient O, I, I_a, I_b, I_c les centres, et R, r, r_a, r_b, r_c les rayons des cercles circonscrit, inscrit et exinscrits à ABC. Démontrer que :

1° Les côtés des triangles A'B'C', $I_aI_bI_c$ se coupent, deux à deux, aux pieds des hauteurs des triangles I_aBC, I_bCA, I_cAB;

2° Les droites AA', BB', CC' sont les hauteurs de ABC, et leur point de concours H est le centre du cercle circonscrit à A'B'C';

3° $AA' = r_a$, $BB' = r_b$, $CC' = r_c$, $HA' = 2R + r = \dfrac{r + r_a + r_b + r_c}{2}$;

4° Les droites $A'I_a$, $B'I_b$, $C'I_c$ sont les symédianes des deux triangles A'B'C', $I_aI_bI_c$ (1).

(1) Les propriétés de cette figure ont fait l'objet du concours d'agrégation en 1873.

52. Sur les côtés d'un triangle ABC, on construit extérieurement les triangles A'BC, AB'C, ABC' semblables à un triangle donné $\alpha\beta\gamma$; de même, on construit extérieurement les triangles A''B'C', A'B''C', A'B'C'' semblables à $\alpha\beta\gamma$. Démontrer que :

1° Les circonférences circonscrites aux six triangles A'BC, ... A''B'C', ... passent par un même point;

2° Les points A, A', A'', O sont en ligne droite et $AA' = AA''$;

3° Les droites BC' et B'C, CA' et C'A, AB' et A'B se coupent en trois nouveaux points A''', B''', C''' tels, que les droites AA''', BB''', CC''' concourent en un même point O';

4° Les droites A'A''', B'B''', C'C''', OO' sont parallèles entre elles.

53. Étant donné un triangle ABC, on peut construire sur BC, du même côté que ABC, cinq triangles BCA_1, CA_2B, CBA_3, A_4CB, BA_5C semblables à ABC. Démontrer que les six points A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sont sur une même circonférence, et que les triangles AA_1A_2, $A_4A_5A_3$ sont semblables à ABC.

54. Sur le côté BC d'un triangle ABC, on construit tous les triangles ayant même angle de Brocard V que le triangle ABC. Le lieu des sommets est une circonférence, dont le centre N_a est situé sur la perpendiculaire menée au milieu de BC; l'angle $BN_aC = 2V$, et les tangentes menées de B et C à cette circonférence sont égales à BC.

55. Trois points A_1, B_1, C_1 se meuvent sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC, de manière que le triangle $A_1B_1C_1$ soit toujours semblable à ABC. Soient A'_1, B'_1, C'_1 les seconds points de rencontre des côtés de ABC avec la circonférence $A_1B_1C_1$.

Démontrer les théorèmes suivants :

1° Les triangles $A_1B_1C_1$ ont pour centre permanent de similitude le centre O du cercle ABC; les triangles $A'_1B'_1C'_1$ sont semblables au triangle orthique de ABC et ont pour centre permanent de similitude l'orthocentre H du triangle ABC.

2° Les droites $B_1C'_1$, $C_1A'_1$, $A_1B'_1$ forment un triangle abc, et les droites B'_1C_1, C'_1A_1, A'_1B_1 forment un triangle $a'b'c'$; les côtés de ces triangles ont des directions invariables, et leurs sommets parcourent trois droites fixes AE, BE, CE passant par le réciproque de O par rapport au triangle ABC.

3° Les orthocentres des triangles AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 sont à l'intersection de la circonférence $A_1B_1C_1$ avec les perpendiculaires menées aux milieux des droites HA, HB, HC; ces points sont, en même temps, les centres des cercles circonscrits aux triangles $AB'_1C'_1$, $BC'_1A'_1$, $CA'_1B'_1$.

Les deux triangles $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$ peuvent être homologiques par

rapport au point E : les droites AA'_1, BB'_1, CC'_1 ont alors des directions connues; quel est le rapport de similitude de $A_1B_1C_1$, ABC?

56. Les bissectrices intérieures du triangle ABC rencontrent la circonférence circonscrite aux points A', B', C'; celles du triangle A'B'C' rencontrent la circonférence aux points A'', B'', C''; et ainsi de suite.

Démontrer que les triangles ainsi obtenus ont pour limites deux triangles équilatéraux symétriques par rapport au centre du cercle ABC.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

13712 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55

TRAITÉ

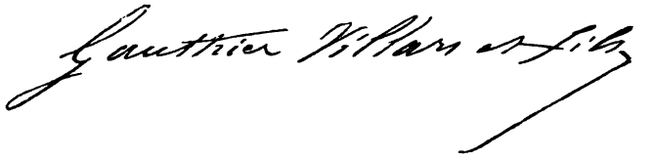
DE

GÉOMÉTRIE.

Les Auteurs et les Éditeurs de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toute contrefaçon, soit du texte, soit des gravures, ou toute traduction faite au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe des Libraires-Éditeurs, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.



TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE,

PAR

EUGÈNE ROUCHÉ,

PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS,
EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

CH. DE COMBEROUSSE,

PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS
ET A L'ÉCOLE CENTRALE.

CONFORME AUX PROGRAMMES OFFICIELS,
RENFERMANT UN TRÈS GRAND NOMBRE D'EXERCICES ET PLUSIEURS APPENDICES CONSACRÉS
A L'EXPOSITION DES PRINCIPALES MÉTHODES DE LA GÉOMÉTRIE MODERNE.

SIXIÈME ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE.

DEUXIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

(Tous droits réservés.)

AVERTISSEMENT

DE LA DEUXIÈME PARTIE.

(6ᵉ ÉDITION.)

Nous avons déjà indiqué dans notre Préface les améliorations apportées à la *première Partie* de ce Traité; il nous reste à mentionner rapidement celles qui regardent la *seconde Partie*.

La relation entre l'Homologie et la Perspective a été mieux mise en évidence. Nous avons présenté sous une nouvelle forme la démonstration du théorème d'Euler relatif aux polyèdres, en ajoutant quelques compléments utiles à la théorie des polyèdres étoilés. Nous avons étendu au problème de la sphère tangente à quatre sphères données la solution plus complète et plus précise que nous avons développée dans la première Partie pour la construction du cercle tangent à trois cercles donnés. Signalons encore une formule simple et pratique pour le jaugeage des tonneaux.

L'Appendice si important du huitième Livre a été revu avec le plus grand soin et a reçu plusieurs additions, parmi lesquelles nous citerons le théorème

de Joachimsthal sur les normales aux coniques, l'extension remarquable donnée par M. Aubert au théorème de Pascal, et divers tracés intéressants concernant la parabole et l'hyperbole équilatère.

Enfin, aux deux Notes essentielles qui terminaient l'Édition précédente, nous en avons ajouté une troisième consacrée à la Géométrie récente du tétraèdre. Cette Note est le complément naturel de celle qui, dans la première Partie, traite de la Géométrie récente du triangle. Nous la devons également à l'obligeance de M. J. Neuberg, qui a trouvé une grande partie des théorèmes qui y sont exposés, et que nous sommes heureux de remercier de nouveau.

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES.

Pages.

AVERTISSEMENT.. v

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE V.

LE PLAN.

§ I. — Premières notions sur le plan.

Positions relatives d'une droite et d'un plan..... 1
Intersection et positions relatives de deux plans..... 2
Conditions nécessaires et suffisantes pour déterminer un plan..... 3
Positions relatives de deux droites dans l'espace..... 4
Conditions de parallélisme de deux droites dans l'espace : conséquences.

§ II. — Droites et plans parallèles.

Positions relatives du système de deux droites parallèles et d'un plan; droites parallèles à une troisième..... 6
Positions relatives du système de deux plans parallèles et d'une droite ou d'un plan..... 7
Égalité des angles à côtés parallèles et de même sens. — Définition de l'angle de deux droites; droites perpendiculaires..... 8
Égalité des parallèles comprises entre droite et plan parallèles, entre plans parallèles..... 10
Système de deux droites coupées par trois plans parallèles..... 11

§ III. — Droite et plan perpendiculaires.

Conséquences immédiates de la définition adoptée..... 11
Conditions pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan..... 12
Existence de la perpendiculaire au plan..... 13

Pages.

Parallélisme de deux droites ou d'une droite et d'un plan perpendiculaires à un même plan ou à une même droite..... 15
Propriétés de la perpendiculaire et des obliques..... 17
Distance d'un point à un plan, d'une droite et d'un plan parallèles, de deux plans parallèles..... 18

§ IV. — Projection d'une droite sur un plan. — Angle d'une droite et d'un plan. — Plus courte distance de deux droites.

Projection d'une droite sur un plan. — Projection de deux droites parallèles..... 18
Projections de deux droites rectangulaires sur un plan parallèle à l'une d'elles; théorème des trois perpendiculaires. — Orthogonalité de la trace d'un plan et de la projection d'une perpendiculaire à ce plan.. 19
Angle d'une droite et d'un plan..... 21
Perpendiculaire commune à deux droites non situées dans le même plan; distance de ces deux droites..... 22

§ V. — Angles dièdres.

Angle dièdre droit. — Angle plan correspondant à un angle dièdre.... 24
Mesure d'un angle dièdre..... 26
Ligne de plus grande pente d'un plan..... 28

§ VI. — Plans perpendiculaires.

Propriétés relatives à un dièdre droit et à la perpendiculaire à l'une de ses faces..... 28
Plan mené par une droite donnée perpendiculairement à un plan donné. 30
Intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième..... 30

§ VII. — Angles polyèdres.

Convexité d'un angle polyèdre..... 31
Angles polyèdres symétriques..... 33
Propriétés générales des angles polyèdres convexes..... 35
Conditions pour qu'on puisse former un trièdre avec trois faces données. 37
Trièdres supplémentaires; origine du principe de dualité..... 39
Conditions pour qu'on puisse former un trièdre avec trois dièdres donnés. 42
Cas d'égalité des trièdres; quatre cas..... 43

APPENDICE DU CINQUIÈME LIVRE.

Quadrilatère gauche coupé par un plan quelconque et, en particulier, par un plan parallèle à deux côtés opposés..... 46
Rapport anharmonique de quatre plans..... 48

Pages.

Propriétés fondamentales de la projection centrale ou perspective. — Point de fuite d'une droite. — Condition pour que des droites aient leurs perspectives parallèles. — Ligne de fuite d'un plan; conception de la *droite de l'infini d'un plan*..... 49

LIVRE VI.

LES POLYÈDRES.

§ I. — Propriétés générales et aire latérale du prisme.

Propriétés relatives aux faces opposées et aux diagonales du parallélipipède. 55
Sections d'un prisme par des plans parallèles. — Section droite..... 57
Aire latérale..... 58

§ II. — Volume du prisme.

Théorèmes préliminaires relatifs à la transformation du prisme oblique en prisme droit équivalent, et à la décomposition du parallélipipède par un plan diagonal..... 60
Volume du parallélipipède rectangle..... 63
Volume du parallélipipède droit et du parallélipipède quelconque..... 65
Volume du prisme quelconque, conséquences..... 66

§ III. — Propriétés générales et aire latérale de la pyramide.

Section d'une pyramide par un plan parallèle à la base : conséquences. 70
Aire latérale d'une pyramide régulière et d'un tronc de pyramide régulier..... 73

§ IV. — Volume de la pyramide.

Équivalence de deux pyramides triangulaires de bases équivalentes et de même hauteur..... 74
Volume de la pyramide : conséquences. — Cas du tétraèdre régulier. — Méthode pour évaluer le volume d'un polyèdre quelconque..... 76
Volume du tronc de pyramide à bases parallèles. — Formules relatives soit au tronc de première espèce, soit au tronc de seconde espèce.... 79
Volume du tronc de prisme triangulaire. — Application au tronc de parallélipipède..... 85
Volume du polyèdre ayant pour bases deux polygones quelconques situés dans des plans parallèles et limité latéralement par des triangles ou des trapèzes. Application au tas de pierres, cuvettes, tombereaux, etc.. 88

Pages.

Parallélisme de deux droites ou d'une droite et d'un plan perpendiculaires à un même plan ou à une même droite..... 15
Propriétés de la perpendiculaire et des obliques..... 17
Distance d'un point à un plan, d'une droite et d'un plan parallèles, de deux plans parallèles..... 18

§ IV. — Projection d'une droite sur un plan. — Angle d'une droite et d'un plan. — Plus courte distance de deux droites.

Projection d'une droite sur un plan. — Projection de deux droites parallèles..... 18
Projections de deux droites rectangulaires sur un plan parallèle à l'une d'elles; théorème des trois perpendiculaires. — Orthogonalité de la trace d'un plan et de la projection d'une perpendiculaire à ce plan.. 19
Angle d'une droite et d'un plan..... 21
Perpendiculaire commune à deux droites non situées dans le même plan; distance de ces deux droites..... 22

§ V. — Angles dièdres.

Angle dièdre droit. — Angle plan correspondant à un angle dièdre.... 24
Mesure d'un angle dièdre..... 26
Ligne de plus grande pente d'un plan..... 28

§ VI. — Plans perpendiculaires.

Propriétés relatives à un dièdre droit et à la perpendiculaire à l'une de ses faces..... 28
Plan mené par une droite donnée perpendiculairement à un plan donné. 30
Intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième..... 30

§ VII. — Angles polyèdres.

Convexité d'un angle polyèdre..... 31
Angles polyèdres symétriques..... 33
Propriétés générales des angles polyèdres convexes..... 35
Conditions pour qu'on puisse former un trièdre avec trois faces données. 37
Trièdres supplémentaires; origine du principe de dualité..... 39
Conditions pour qu'on puisse former un trièdre avec trois dièdres donnés. 42
Cas d'égalité des trièdres; quatre cas..... 43

APPENDICE DU CINQUIÈME LIVRE.

Quadrilatère gauche coupé par un plan quelconque et, en particulier, par un plan parallèle à deux côtés opposés..... 46
Rapport anharmonique de quatre plans..... 48

Pages.

Propriétés fondamentales de la projection centrale ou perspective. — Point de fuite d'une droite. — Condition pour que des droites aient leurs perspectives parallèles. — Ligne de fuite d'un plan; conception de la *droite de l'infini d'un plan*..... 49

LIVRE VI.

LES POLYÈDRES.

§ I. — Propriétés générales et aire latérale du prisme.

Propriétés relatives aux faces opposées et aux diagonales du parallélipipède. 55
Sections d'un prisme par des plans parallèles. — Section droite..... 57
Aire latérale..... 58

§ II. — Volume du prisme.

Théorèmes préliminaires relatifs à la transformation du prisme oblique en prisme droit équivalent, et à la décomposition du parallélipipède par un plan diagonal..... 60
Volume du parallélipipède rectangle..... 63
Volume du parallélipipède droit et du parallélipipède quelconque..... 65
Volume du prisme quelconque, conséquences..... 66

§ III. — Propriétés générales et aire latérale de la pyramide.

Section d'une pyramide par un plan parallèle à la base : conséquences. 70
Aire latérale d'une pyramide régulière et d'un tronc de pyramide régulier..... 73

§ IV. — Volume de la pyramide.

Équivalence de deux pyramides triangulaires de bases équivalentes et de même hauteur..... 74
Volume de la pyramide : conséquences. — Cas du tétraèdre régulier. — Méthode pour évaluer le volume d'un polyèdre quelconque..... 76
Volume du tronc de pyramide à bases parallèles. — Formules relatives soit au tronc de première espèce, soit au tronc de seconde espèce.... 79
Volume du tronc de prisme triangulaire. — Application au tronc de parallélipipède..... 85
Volume du polyèdre ayant pour bases deux polygones quelconques situés dans des plans parallèles et limité latéralement par des triangles ou des trapèzes. Application au tas de pierres, cuvettes, tombereaux, etc.. 88

§ V. — Figures symétriques.

Pages.

Symétrie par rapport à un centre, à un axe, à un plan..... 90
Influence de la position du centre ou du plan de symétrie. — Manière de ramener l'une à l'autre la symétrie par rapport à un centre et la symétrie par rapport à un plan..... 92
Propriétés relatives à deux droites symétriques, à deux plans symétriques. 93
Propriétés des polyèdres symétriques..... 95
Équivalence de deux polyèdres symétriques..... 96

§ VI. — Polyèdres semblables.

Cas de similitude de deux pyramides triangulaires..... 98
Décomposition de deux polyèdres semblables en tétraèdres semblables. Droites homologues..... 99
Rapport des aires et des volumes de deux polyèdres semblables..... 103

APPENDICE DU SIXIÈME LIVRE.

Propriétés générales des polyèdres convexes. — Théorème d'Euler ($S + F = A + 2$) et ses conséquences..... 105
Conditions d'égalité et de similitude de deux polyèdres convexes; nombre des conditions nécessaires pour déterminer un polyèdre convexe..... 110
Projection d'une aire plane..... 114
Centre des distances proportionnelles..... 116
Centre de gravité; triangle, trapèze, polygone; tétraèdre, polyèdre..... 120
Aire latérale et volume d'un tronc de prisme quelconque..... 124
Méthode de démonstration des propriétés projectives..... 127
Règle pour reconnaître la projectivité de certaines relations métriques; expression trigonométrique du rapport anharmonique d'un faisceau.. 129
Figures homologiques; leur origine; leur construction; droites limites.. 130
Propriétés métriques des figures homologiques. — Coefficient d'homologie, nouvelle définition..... 133
Homologie des projections de deux figures planes en perspective, réciproque..... 135

LIVRE VII.

LES CORPS RONDS.

§ I. Cylindre de révolution.

Notions préliminaires. — Plan tangent. — Prisme inscrit ou circonscrit. — Cylindres semblables..... 137

Pages.
Aire latérale du cylindre de révolution. — Développement..... 141
Volume du cylindre de révolution..... 142

§ II. — Cône de révolution.

Notions préliminaires. — Plan tangent. — Pyramide inscrite ou circonscrite. — Cônes semblables..... 144
Aire latérale du cône de révolution. — Développement..... 148
Aire latérale du tronc de cône à bases parallèles..... 149
Volume du cône de révolution..... 151
Volume du tronc de cône à bases parallèles. — Formules soit pour le tronc de première espèce, soit pour le tronc de seconde espèce..... 152
Application au cubage des troncs d'arbres, au jaugeage des tonneaux (formule pratique)..... 153

§ III. — Premières notions sur la sphère.

Notions préliminaires. — Tangente à une courbe sphérique..... 156
Sections planes de la sphère. — Grands cercles; petits cercles..... 157
Propriétés des pôles d'un cercle de la sphère..... 160
Recherche du rayon d'une sphère solide..... 161
Plan tangent à la sphère. — Cône ou cylindre circonscrit..... 162
Intersection de deux sphères..... 164
Quatre points déterminent une sphère..... 165

§ IV. — Propriétés des triangles sphériques.

Angle de deux arcs de grand cercle..... 166
Premières propriétés des triangles et des polygones sphériques..... 168
Figures sphériques polaires ou supplémentaires; dualité..... 173
Cas d'égalité des triangles sphériques..... 177
Définition de la longueur d'un arc de courbe gauche. — Plus court chemin entre deux points sur la sphère..... 178
Arcs de grand cercle perpendiculaires et obliques à un cercle donné : conséquences relatives au triangle sphérique rectangle..... 180
Positions relatives de deux cercles d'une même sphère..... 183
Lieu du sommet d'un triangle sphérique dont on donne la base et l'excès de la somme des angles à la base sur l'angle au sommet..... 184
Divers tracés sur la sphère. — Construction des triangles sphériques. — Grand cercle tangent à un petit cercle, à deux petits cercles..... 185

§ V. — Aire de la sphère.

Aire engendrée par la rotation d'une droite autour d'un axe situé dans son plan : conséquences..... 195
Aire de la zone; aire de la sphère..... 197
Équivalence de deux triangles sphériques symétriques : conséquences... 199

Pages.

Aire d'un fuseau, d'un triangle sphérique, d'un polygone sphérique; théorème de Lexell..... 201

§ VI. — Volume de la sphère.

Volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe situé dans son plan et passant par l'un des sommets : conséquences..... 206
Volume du secteur sphérique, de la sphère..... 209
Volume engendré par un segment circulaire..... 211
Volume du segment sphérique; cas du segment à une base, double expression..... 212
Volume de la pyramide sphérique..... 215

§ VII. — Généralités sur les surfaces.

Surfaces coniques, cylindriques, de révolution..... 216
Sections d'une surface cylindrique ou conique par des plans parallèles.. 218
Aire latérale d'un cylindre quelconque. — Volume d'un cylindre ou d'un cône quelconque..... 219
Plan tangent au cône ou au cylindre; tangente à la projection d'une courbe; cas d'exception..... 220
Section antiparallèle du cône oblique; lieu des centres des sections antiparallèles à la base; cônes passant par deux cercles d'une sphère..... 221
Existence du plan tangent à une surface quelconque; normale. — Cas des surfaces réglées, développables ou gauches..... 224
Propriété fondamentale du plan tangent aux surfaces de révolution..... 226
Propriété fondamentale du plan tangent aux surfaces gauches; raccordement des surfaces gauches..... 227

APPENDICE DU SEPTIÈME LIVRE.

Théorème de Guldin sur l'aire ou le volume engendré par la rotation d'une ligne ou d'une aire plane autour d'un axe situé dans son plan. 228
Théorèmes sur le maximum des figures. — La sphère a le plus grand volume parmi les corps de même surface..... 233
Polyèdres réguliers convexes; il n'en existe que cinq; leur construction; sphères inscrite et circonscrite..... 236
Calcul du dièdre d'un polyèdre régulier. — Calcul des rayons des sphères inscrite et circonscrite..... 244
Polygones et polyèdres réguliers d'espèce supérieure. — Il n'existe que quatre polyèdres réguliers d'espèce supérieure..... 247
Trouver l'espèce d'un polyèdre régulier; généralisation de la formule d'Euler. — Application aux polyèdres réguliers d'espèce supérieure, leur construction..... 253
Figures homothétiques dans l'espace. — Centres et axes de quatre figures homothétiques deux à deux, et, en particulier, de quatre sphères..... 259

Pages.
Similitude dans l'espace..... 261
Figures homologiques dans l'espace. — Plan de l'infini. — Principe de la construction des bas-reliefs..... 262
Pôle et plan polaire par rapport à la sphère. — Droites réciproques.... 264
Plan radical de deux sphères; axe radical de trois sphères; centre radical de quatre sphères; propriétés des points anti-homologues..... 266
Complément de la théorie des figures inverses et de la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques; figure inverse d'un plan, d'une sphère ou d'une circonférence; conservation des angles..... 268
Projection stéréographique..... 270
Sphère tangente à quatre sphères données, théorème de Dupuis..... 271
Sphère tangente à quatre plans donnés, nombre des solutions, calcul des rayons..... 274
Figures tracées sur la sphère : rapport anharmonique; rapport harmonique; pôle et polaire par rapport à un cercle de la sphère; axe radical; centres de similitude; cercles isogonaux..... 279
Problèmes relatifs au contact des cercles sur la sphère. — Cercle coupant trois cercles donnés sous des angles donnés, et problème analogue de Géométrie plane. — Sphère coupant quatre sphères données sous des angles donnés..... 287

LIVRE VIII.

LES COURBES USUELLES.

§ I. — Propriétés fondamentales de l'ellipse.

Définition et tracé de la courbe; foyers, centre et axes..... 289
Point intérieur ou extérieur..... 293
Propriété fondamentale de la tangente, normale..... 294
Cercles directeurs, cercle principal..... 297
Tangente par un point donné. — Lieu des sommets des angles droits circonscrits à la courbe. — Propriétés des tangentes issues d'un point extérieur..... 299
Tangente parallèle à une direction donnée; produit des distances des foyers à une tangente..... 302
Points de rencontre d'une droite avec l'ellipse non tracée..... 304

§ II. — Propriétés fondamentales de l'hyperbole.

Définition et tracé de la courbe; foyers, centre et axes..... 305
Point intérieur ou extérieur..... 308
Propriété fondamentale de la tangente. — Réciproque pour l'ellipse et l'hyperbole. — Normale..... 309

Pages.
Cercles directeurs, cercle principal..... 312
Asymptotes. — Hyperbole équilatère. — Hyperboles conjuguées..... 313
Tangente par un point donné. — Lieu des sommets des angles droits circonscrits à la courbe. — Propriétés des tangentes issues d'un point extérieur. — Application au quadrilatère circonscriptible..... 316
Tangente parallèle à une direction donnée; conséquences..... 318
Points de rencontre d'une droite avec l'hyperbole non tracée; discussion. 319

§ III. — Propriétés fondamentales de la parabole.

Définition et tracé de la courbe : foyer, directrice, paramètre, axe..... 321
Point intérieur ou extérieur..... 323
Propriété fondamentale de la tangente. — Réciproque..... 324
Propriété de la tangente relative à la directrice..... 326
Normale. — Tangente au sommet. — Le foyer est le centre du cercle circonscrit au triangle formé avec l'axe par la tangente et la normale... 327
La directrice est le lieu des points symétriques du foyer par rapport aux tangentes, et la tangente au sommet est le lieu des projections du foyer sur ces mêmes tangentes..... 328
Expressions de la sous-tangente, de la sous-normale et de l'ordonnée... 331
Tangente par un point donné. — Lieu des sommets des angles droits circonscrits à la courbe. — Propriétés des tangentes issues d'un point extérieur..... 332
Tangente parallèle à une direction donnée..... 334
Points de rencontre d'une droite avec la parabole non tracée..... 334

§ IV. — Ellipse considérée comme projection orthogonale du cercle.

La projection orthogonale d'une circonférence de cercle sur un plan est une ellipse : conséquence relative à l'ordonnée..... 335
Affinité de l'ellipse et du cercle principal. — Application au tracé des tangentes et à l'intersection d'une ellipse et d'une droite..... 337
Diamètres de l'ellipse, diamètres conjugués, tangente à l'extrémité d'un diamètre..... 340
Aire de l'ellipse..... 341
Ellipse décrite par un point quelconque d'une droite de longueur constante dont les extrémités glissent sur deux droites rectangulaires. — Construction de la normale en un point de cette ellipse : conséquence. 342
Étant donnés deux diamètres conjugués de l'ellipse en grandeur et en direction, construire les axes de la courbe..... 343
Théorème de Schooten et de la Hire..... 344

§ V. — Parabole considérée comme limite de l'ellipse.

La limite d'une ellipse dont un sommet et le foyer voisin restent fixes, tandis que l'autre foyer s'en éloigne indéfiniment dans la direction du

Pages.
grand axe, est une parabole : conséquences..... .. 345
Parabole rapportée à un diamètre et à la tangente correspondante; conservation de la propriété de la sous-tangente..... 347
Aire d'un segment parabolique..... 348

§ VI. — Origine commune des trois courbes. Sections planes du cône de révolution.

Directrices dans l'ellipse et dans l'hyperbole : propriétés fondamentales 349
Lieu des points dont les distances à un point fixe et à une droite fixe sont dans un rapport constant; conséquences..... 351
Sections planes d'un cône circulaire droit, examen des différents cas.... 353
Définition commune aux trois sections coniques..... 357
Placer une ellipse, une hyperbole ou une parabole donnée sur un cône de révolution donné..... 357
Projection de la section plane d'une surface gauche de révolution sur un plan perpendiculaire à l'axe de la surface; cas du cône..... 359
Construction d'une conique d'après certaines données..... 360

§ VII. — Propriétés fondamentales de l'hélice.

Ordonnée et abscisse curviligne d'un point d'une surface cylindrique... 362
Définition de l'hélice. — Spires. — Pas..... 363
Transformée de l'hélice dans le développement du cylindre..... 363
Tangente et sous-tangente. — Conséquences..... 364

APPENDICE DU HUITIÈME LIVRE.

HOMOGRAPHIE ET INVOLUTION.

Divisions homographiques. — Formes principales de la relation homographique..... 367
Cas particuliers : divisions semblables, divisions homologiques. — Condition pour que deux divisions homographiques soient homologiques. 370
Divisions homographiques de même base; points doubles..... 371
Détermination simultanée de deux points sur une même droite : points imaginaires..... 372
Faisceaux homographiques. — Rayons doubles. — Faisceaux résultant de la rotation d'un angle de grandeur constante autour de son sommet..... 374
Intersection d'une droite et d'un cercle. — Points cycliques d'un plan. 376
Divisions et faisceaux homographiques en involution. — Formes de la relation involutive. — Projectivité de l'involution. — Points doubles. 378
Relations métriques entre trois segments en involution..... 380
Faisceaux en involution; rayons doubles; couple de rayons homologues rectangulaires..... 382

Pages.

Propriétés involutives du quadrilatère. — Théorème de Desargues sur le quadrilatère inscrit ou circonscrit à un cercle..... 384
Constructions relatives à l'homographie et à l'involution..... 386

COURBES DU SECOND ORDRE.

Génération et classification des coniques..... 389
Ordre d'une courbe algébrique. — Identité des coniques et des courbes du second ordre..... 393
Extension aux coniques du théorème de Pascal. — Théorème de Desargues, généralisé par Sturm..... 394
Pôle et polaire dans les coniques..... 395
Point intérieur ou extérieur à une conique..... 397
Quadrilatères inscrits et circonscrits. — Théorème de Frégier. — Inscrire un polygone dont les côtés passent par des points donnés, et problème corrélatif..... 397
Points et droites conjugués. — Intersection d'une conique et d'une droite; tangentes à une conique par un point de son plan..... 399
Diamètres, centre, asymptotes. — Diamètres conjugués et cordes supplémentaires..... 400
Équation de l'ellipse rapportée à deux diamètres conjugués. — Angle auxiliaire; théorèmes d'Apollonius; maximum de l'angle de deux diamètres conjugués; diamètres conjugués égaux..... 404
Équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes ou à deux diamètres conjugués. — Propriétés relatives aux diamètres conjugués et aux asymptotes; propriétés des sécantes et de la tangente; théorèmes d'Apollonius; hyperbole équilatère..... 407
Propriétés des diamètres conjugués et des tangentes dans l'ellipse et dans l'hyperbole..... 410
Problèmes usuels relatifs à l'ellipse et à l'hyperbole..... 411
Diamètres et tangentes dans la parabole. — Équation de cette courbe rapportée à un diamètre et à la tangente à son extrémité. — Propriété de la sous-tangente..... 413
Recherche des foyers et des directrices dans les coniques; conséquences pour la tangente et la normale; retour aux définitions élémentaires des trois courbes..... 416
Coniques confocales..... 423
Généralisation de l'idée de foyer. — Cercles de rayon nul bitangents à la conique. — Points communs aux tangentes menées à la courbe par les points cycliques du plan..... 423
Tableau de formules relatives aux coniques..... 425
Complément de la méthode des polaires réciproques. — Théorème de Pappus sur le quadrilatère inscrit..... 427
Classe d'une courbe algébrique. — Identité des coniques et des courbes de seconde classe. — Nombre des foyers d'une courbe d'après sa classe..... 431

Pages.

Propriétés des points et des droites imaginaires..... 432
Cordes et tangentes communes à deux coniques..... 434
Triangle autopolaire commun à deux coniques; discussion..... 436
Faisceau de coniques circonscrites ou inscrites à un quadrilatère. — Théorèmes de Lamé et de Newton. — Cercle osculateur et rayon de courbure d'une ellipse..... 438
Coniques tangentes, bitangentes, osculatrices..... 440
Coniques homologiques. — Méthode générale pour les tracés graphiques relatifs aux coniques à l'aide d'un cercle auxiliaire..... 441
Coniques homothétiques..... 445
Méthode de recherche fondée sur la projection conique. — Théorèmes de Carnot et de Newton. — Principes relatifs à la projection d'une conique ou de deux coniques d'après certaines conditions..... 446
Solution générale de la transformation des relations angulaires..... 450
Construction d'une conique connaissant cinq éléments (points ou tangentes). — Généralisation du théorème de Pascal..... 451
Détermination d'une conique d'après d'autres conditions. — Caractéristiques d'un groupe de coniques..... 456
Construction des points communs et des tangentes communes à deux coniques..... 458
Normales à une conique par un point de son plan. — Théorème de Joachimsthal..... 459
Problèmes usuels relatifs à la parabole et à l'hyperbole équilatère..... 461

THÉORIE DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

Définition. — Pôle et plan polaire..... 467
Points et droites conjugués; trièdre polaire..... 468
Plans diamétraux; diamètres; centre. — Sections par des plans parallèles. 469
Plans principaux et sections circulaires..... 470
Cônes du second ordre. — Axes et plans cycliques..... 473
Cônes supplémentaires; dualité..... 475
Focales et plans directeurs. — Propriétés des focales et des plans cycliques; leur corrélation..... 476
Coniques sphériques..... 478
Quelques cas particuliers remarquables de l'intersection de deux surfaces du second ordre..... 479
Propriétés générales des surfaces réglées du second ordre. — Distinction entre l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique..... 480
Hyperboloïde à une nappe. — Cône asymptote. — Sections planes; plans cycliques. — Équation de la surface. — Projection de la surface sur un plan diamétral parallèlement au diamètre conjugué de ce plan..... 483
Paraboloïde hyperbolique. — Plans directeurs. — Sections planes. — Équation de la surface. — Divers modes de génération..... 488
Classification des surfaces non réglées du second ordre..... 489
Ellipsoïde. — Sections planes. — Sections circulaires; ombilics. — Équa-

Pages.

tion de la surface. — Diamètres conjugués; extension des théorèmes d'Apollonius 490
Paraboloïde elliptique. — Diamètres; axe. — Sections planes. — Équation de la surface 492
Hyperboloïde à deux nappes. — Sections planes. — Équation de la surface 493

ÉTUDE DE QUELQUES SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Surfaces polaires réciproques. — Classe d'une surface 494
Surfaces apsidales. — Plan tangent. — Apsidale de la polaire réciproque. 496
Surface des ondes ou surface apsidale d'un ellipsoïde par rapport à son centre. — Diverses manières de la faire dériver de l'ellipsoïde. — Sections principales. — Plan tangent; théorème de Niven. — Singularités : points coniques, plans touchant suivant un cercle 499
Tore ou surface apsidale d'une sphère. — Section par un plan bitangent, par une sphère bitangente. — Droites bitangentes menées par un point donné 504

QUESTIONS PROPOSÉES SUR LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

EXERCICES CONCERNANT LES DIVERS PARAGRAPHES :

Du cinquième Livre (531 à 592) 509
Du sixième Livre (593 à 710) 516
Du septième Livre (711 à 843) 529
Du huitième Livre (844 à 1021) 542
QUESTIONS DIVERSES DE GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE (1022 à 1098) 559

NOTES.

NOTE I.

Sur l'application des déterminants à la Géométrie.

Aire du triangle. — Volume du tétraèdre et rayon de la sphère circonscrite 569
Relations entre les distances mutuelles de quatre points d'un cercle, de cinq points d'une sphère, de cinq points quelconques de l'espace 571
Rayons des sphères coupant quatre sphères données sous des angles donnés, ou des sphères touchant quatre sphères données; formules pour les problèmes correspondants de Géométrie plane 574

NOTE II.

Sur la Géométrie non euclidienne.

Pages.

Conception fondamentale de Lobattscheffsky relativement aux parallèles. 577
Somme des angles d'un triangle rectiligne..... 580
Définition et propriétés des fonctions circulaires et des fonctions hyperboliques. — Expression de l'angle de parallélisme.... 583
Trigonométrie plane euclidienne. — Trigonométrie plane non euclidienne..... 588
Cas des triangles infinitésimaux..... 590
Trigonométrie sphérique..... 591
Conclusion..... 592

NOTE III.

Sur la Géométrie récente du tétraèdre.

Définition des coordonnées..... 595
Points et plans harmoniquement associés..... 596
Sections antiparallèles d'un tétraèdre. — Rayon de la sphère circonscrite..... 598
Points inverses..... 600
Tétraèdres et pentagones orthologiques..... 601
Point inverse du centre de gravité d'un tétraèdre..... 602
Quadruples hyperboloïdiques..... 603
Sphères tangentes aux quatre faces d'un tétraèdre..... 605
Sur les hauteurs d'un tétraèdre. — Tétraèdre orthocentrique, ses propriétés. — Quadrarête et quadrangle orthiques, cône équilatère..... 611
Les hauteurs d'un tétraèdre quelconque sont des génératrices d'un hyperboloïde équilatère..... 616

ERRATA.

Page 103, Remplacer la dernière phrase de l'avant-dernier alinéa par celle-ci :

« On déterminera de la même manière une droite passant par A_1, et la symétrique de cette droite par rapport à α_1 passera par A qui se trouvera ainsi à l'intersection de deux droites connues. »

Page 263, ligne 8, *en remontant, au lieu de* rapport anharmonique ($abcc'$). *lisez* rapport anharmonique ($\alpha bcc'$).

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE V.

LE PLAN.

§ I. — PREMIÈRES NOTIONS SUR LE PLAN.

DÉFINITIONS.

487. Un plan est une surface telle qu'une ligne droite y est contenue tout entière dès qu'elle y a deux points (5). Cette surface est illimitée; toutefois, pour la représenter, on est obligé de lui assigner des limites; on représente un plan par une figure tracée dans ce plan, le plus souvent par un parallélogramme.

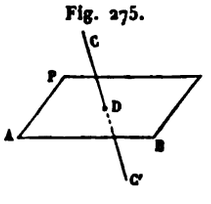
488. Il résulte de la définition du plan qu'une droite et un plan ne peuvent offrir que trois positions relatives :

1° La droite a deux points communs avec le plan, et alors elle y est contenue tout entière.

2° La droite n'a qu'un point commun avec le plan; on dit alors que la droite et le plan *se coupent*.

3° La droite n'a aucun point commun avec le plan; on dit alors que la droite et le plan *sont parallèles*.

Fig. 275.



Quand une droite CC′ et un plan P se coupent (*fig.* 275),

leur point commun D divise la droite CC′ en deux parties DC et DC′, situées de part et d'autre du plan; cela résulte de ce que la droite et le plan sont indéfinis.

THÉORÈME.

489. 1° *Deux plans* P *et* Q, *qui ont un point commun* A, *ont une droite commune passant par ce point.*

2° *Deux plans* P *et* Q, *qui ont en commun une droite* AB *et un point* C *extérieur à cette droite, coïncident dans toute leur étendue.*

En effet:

1° Par le point A commun aux deux plans P et Q (*fig.* 276), menons dans le plan Q deux droites quelconques LAL′, NAN′. Si l'une de ces droites a, avec le plan P, un point commun autre que A, elle appartient tout entière à ce plan; elle est donc commune aux deux plans P et Q, et le théorème est démontré.

Fig. 276.

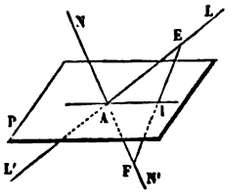
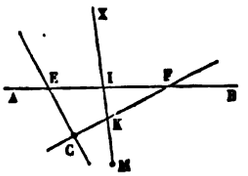


Fig. 277.



Supposons donc que les droites LAL′, NAN′ coupent l'une et l'autre le plan P, et prenons un point quelconque E sur la partie de la droite LAL′ qui est au-dessus du plan P, et un point quelconque F sur la partie de la droite NAN′, qui est au-dessous du plan P. La droite EF, passant d'un côté à l'autre du plan P, coupe ce plan en un point I; par suite, la droite AI est commune aux deux plans P et Q, puisqu'elle a deux points A et I dans chacun d'eux.

2° Par le point C et par deux points E et F, pris à volonté sur AB (*fig.* 277), menons les droites indéfinies CE et CF; ces deux droites appartiendront, comme la droite AB, aux deux plans P et Q, puisque chacune d'elles a deux points dans

chacun de ces plans. Cela posé, soit M un point quelconque du plan P; menons par M, dans ce plan, une droite quelconque MX; cette droite rencontrera au moins deux des droites AB, CE, CF; les deux points de rencontre I et K appartiendront au plan Q; par suite, il en sera de même de la droite MX tout entière et, en particulier, du point M. Ainsi tout point M de l'un des plans appartient à l'autre, ce qui prouve que ces deux plans coïncident.

COROLLAIRES.

490. *L'intersection de deux plans est une ligne droite.*

Car, dès que deux plans ont un point commun, ils ont une droite commune passant par ce point (489, 1°); et ils ne peuvent avoir aucun point commun extérieur à cette droite, sans coïncider (489, 2°).

491. Il résulte des propositions précédentes que deux plans *distincts* ne peuvent offrir que deux positions relatives :

1° Ils ont en commun une droite unique; on dit alors qu'ils *se coupent.*

2° Ils n'ont aucun point commun; on dit alors qu'ils *sont parallèles.*

THÉORÈME.

492. *Un plan est déterminé :*

1° *Par une droite* AB *et un point* C *extérieur à cette ligne;*

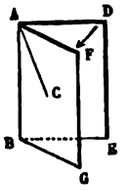
2° *Par trois points* A, B, C, *non en ligne droite;*

3° *Par deux droites* AB *et* AC *qui se coupent;*

4° *Par deux droites parallèles.*

En effet (*fig.* 278) :

Fig. 278.



1° Que l'on mène un plan ADEB par AB, et qu'on le fasse

tourner autour de cette droite, comme une porte sur ses gonds, jusqu'à ce qu'il contienne le point C; on aura alors un plan AFGB passant par la droite AB et par le point C. Il ne saurait d'ailleurs en exister d'autres, puisque deux plans remplissant ces conditions coïncident (489, 2°).

2° On ramène le deuxième cas au premier en remarquant que tout plan passant par la droite AB et le point C contient les trois points A, B, C, et réciproquement.

3° On ramène le troisième cas au premier en remarquant que tout plan passant par AB et par un point quelconque de AC contient les deux droites AB, AC, et réciproquement.

4° Deux parallèles sont toujours, par définition (56), situées dans un même plan; et ce plan est le seul qui les contienne, puisqu'on ne peut mener qu'un plan par la première parallèle et par un point de la seconde.

COROLLAIRES.

493. *Par un point* A, *on ne peut mener dans l'espace qu'une parallèle à une droite donnée* DE. Car (*fig.* 278), si AB est une parallèle à DE menée par A, AB sera située dans le plan ADE (492, 4°), et l'on sait que, dans un plan, on ne peut mener par un point qu'une parallèle à une droite (59).

494. Nous avons indiqué les positions relatives d'une droite et d'un plan, ainsi que celles de deux plans. Il nous reste, pour terminer ces préliminaires, à étudier les positions relatives de deux droites.

Deux droites AB et CD étant données d'une manière quelconque dans l'espace, le plan P, mené par AB et par un point quelconque D de CD, peut couper cette droite CD ou la contenir tout entière.

Dans le premier cas (*fig.* 275), il n'existe aucun plan qui contienne à la fois les deux droites AB et CD; car un tel plan ayant la droite AB et le point D communs avec le plan P coïnciderait avec lui, et, par suite, le plan P contiendrait la droite CD contrairement à l'hypothèse. Les deux droites AB et CD, *n'étant pas situées dans un même plan,* ne peuvent ni se couper ni être parallèles (492, 3° et 4°).

Deux droites distinctes peuvent donc offrir, dans l'espace, trois positions relatives :

1° Elles ne sont pas situées dans un même plan.

2° Elles sont parallèles.

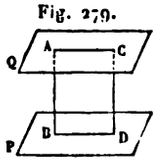
3° Elles se coupent.

Comme, dans les deux premiers cas, elles n'ont aucun point commun, on voit que, *pour prouver le parallélisme de deux droites de l'espace, il ne suffira plus, comme en Géométrie plane, d'établir qu'elles ne se rencontrent pas, si loin qu'on les prolonge; il faudra, en outre, montrer qu'elles sont situées dans un même plan.*

495. Voici, à l'appui de ce principe, deux exemples qui conduisent à deux conclusions importantes :

1° Deux droites, l'une située dans un plan, l'autre parallèle à ce plan, n'ont évidemment aucun point commun. Cependant, pour qu'elles soient parallèles, il faut encore, et *il suffit* qu'elles soient situées dans un même plan. On énonce ordinairement cette proposition en disant : *Si, par une droite* AC *parallèle à un plan* P, *on mène un plan* ACBD *qui coupe le plan* P, *l'intersection* BD *des deux plans est parallèle à* AC (*fig.* 279).

Fig. 279.



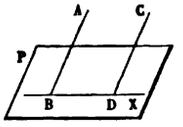
2° Deux droites situées respectivement dans deux plans parallèles P et Q n'ont évidemment aucun point commun. Cependant, pour qu'elles soient parallèles, il faut encore, et *il suffit*, qu'elles soient dans un même plan. On énonce ordinairement cette proposition en disant : *Quand deux plans parallèles* P *et* Q *sont coupés par un troisième* ACBD, *les intersections* AC *et* BD *sont parallèles* (*fig.* 279).

§ II. — DROITES ET PLANS PARALLÈLES.

THÉORÈME.

496. *Si deux droites* AB *et* CD *sont parallèles, tout plan* P *qui coupe l'une* AB *coupe l'autre* CD (*fig.* 280).

Fig. 280.



En effet, puisque la droite AB coupe le plan P, le plan ABCD des deux parallèles et le plan P se rencontrent suivant une droite BX qui, coupant AB, coupe sa parallèle CD (60). Par suite, CD a un point commun avec le plan P, et elle ne saurait en avoir d'autre, sans quoi elle coïnciderait avec BX et ne serait pas parallèle à AB.

COROLLAIRES.

497. *Si deux droites sont parallèles, tout plan qui contient la première, ou qui lui est parallèle, contient la seconde ou lui est parallèle ;* car, s'il n'en était pas ainsi, il couperait cette seconde droite (488), et, par suite, il couperait la première.

498. *Si deux droites* A *et* B *sont parallèles, toute droite* C *parallèle à la première* A *est parallèle à la seconde* B *ou coïncide avec elle.*

D'abord, si C ne coïncide pas avec B, ces deux droites n'ont aucun point commun, sans quoi, par ce point, on pourrait mener deux parallèles à A. Pour prouver que les droites C et B sont alors parallèles, il suffit de montrer qu'elles appartiennent à un même plan, c'est-à-dire que le plan déterminé par la droite C et un point de B contient cette droite B. Or, si ce plan coupait B, il couperait sa parallèle A, et, coupant A, il couperait sa parallèle C, tandis qu'il la contient.

On énonce ordinairement cette proposition d'une manière plus rapide, mais incomplète, en disant : *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

Scolies.

499. *L'intersection de deux plans parallèles à une même droite est parallèle à cette droite ;* car, si par un point commun aux deux plans on mène la parallèle à la droite considérée, cette parallèle doit appartenir à chacun des deux plans (497).

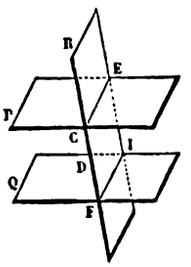
500. Deux plans conduits par deux droites parallèles peuvent être considérés comme parallèles à une droite quelconque parallèle aux deux premières (497); on a donc cette proposition comme cas particulier de celle qu'on vient d'énoncer : *L'intersection de deux plans conduits par deux droites parallèles est parallèle à ces droites.*

THÉORÈME.

501. *Si deux plans* P *et* Q *sont parallèles :* 1° *toute droite* D *qui coupe le premier* P *coupe le second* Q ; 2° *tout plan* R *qui coupe le premier* P *coupe le second* Q.

En effet (*fig.* 281) :

Fig. 281.



1° Par un point quelconque I du plan Q et par la droite D qui coupe le plan P en C, concevons un plan R ; ce plan ayant un point commun avec chacun des deux premiers coupera ceux-ci suivant deux parallèles CE et FI (495). Or CD coupe CE ; elle coupe donc sa parallèle FI et, par suite, le plan Q.

2° Menons dans le plan R, qui coupe le plan P suivant CE, une droite CD non parallèle à CE. Cette droite CD coupant le plan P coupera le plan Q (1°) ; donc le plan R coupe le plan Q.

COROLLAIRES.

502. *Si deux plans sont parallèles, toute droite parallèle au premier ou contenue dans le premier est parallèle au second ou contenue dans le second;* car, si elle coupait le second plan, elle couperait aussi le premier.

503. *Si deux plans sont parallèles, tout plan qui est parallèle au premier est parallèle au second ou coïncide avec le second;* car, s'il n'en était pas ainsi, il couperait ce second plan (491), et, par suite, il couperait aussi le premier.

504. *Par un point* A *extérieur à un plan* B'A'C', *on peut toujours mener un plan parallèle à ce plan, et l'on n'en peut mener qu'un* (*fig.* 282).

En effet, menons par A deux droites AB et AC parallèles au plan B'A'C'. Le plan BAC sera parallèle au plan B'A'C'; car, s'il le rencontrait, leur intersection devrait être parallèle à la fois à AB et à AC (495); ce qui est impossible. De plus, tout plan autre que BAC mené par A coupe le plan B'A'C', puisqu'il coupe le plan BAC qui est parallèle à B'A'C' (501).

SCOLIE.

505. *Si, par un point* A *extérieur à un plan* Q, *on mène des droites parallèles à ce plan, le lieu de ces parallèles est le plan* P *mené par* A, *parallèlement au plan* Q.

Car toute parallèle au plan Q, menée par A, doit être située dans le plan P ou être parallèle à ce plan (502); or c'est le premier cas qui a lieu, puisque la droite considérée a déjà un point A commun avec le plan P.

THÉORÈME.

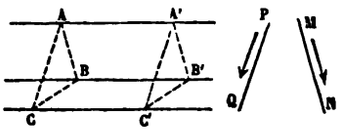
506. *Deux angles qui ont leurs côtés respectivement parallèles sont égaux ou supplémentaires, et leurs plans sont parallèles* (*fig.* 282).

1° Les plans des deux angles sont parallèles en vertu du n° 504.

2° Deux angles BAC, B'A'C', dont les côtés AB et A'B', AC et A'C', sont deux à deux parallèles et de même sens, sont

égaux. En effet, par deux points B et C pris à volonté et respectivement sur les côtés de l'angle A, menons des paral-

Fig. 282.



lèles à AA' jusqu'à leur rencontre B' et C' avec les côtés de l'angle A'; les droites BC, B'C' sont parallèles comme intersections des deux plans parallèles BAC, B'A'C' avec le plan BB'C'C. Donc les deux triangles BAC, B'A'C' ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun, comme parallèles comprises entre parallèles, et les angles BAC, B'A'C' sont égaux.

On prouvera d'ailleurs, comme en Géométrie plane, que deux angles dont les côtés sont deux à deux parallèles et de sens contraires sont égaux, et que deux angles dont deux côtés sont parallèles et de même sens, tandis que les deux autres sont parallèles et de sens contraires, sont supplémentaires.

Scolies.

507. Sur une droite quelconque MN (*fig.* 282), il y a deux sens à distinguer: le sens de MN et celui de NM.

On appelle *angle de deux droites*, dont la position dans l'espace et le sens sont donnés, l'angle que l'on forme en menant par un point quelconque de l'espace, à chacune des deux droites données, une droite parallèle et de même sens. Ainsi MN et PQ étant les deux droites données, par un point quelconque A de l'espace, menons AB parallèle à MN et de même sens, AC parallèle à PQ et de même sens; l'angle BAC sera, par définition, l'angle des deux droites MN et PQ.

Pour que cette définition n'offre rien de contradictoire, il faut que la grandeur de l'angle ainsi obtenu soit indépendante de la position qu'occupe dans l'espace le point par lequel on mène des parallèles aux droites données. Or soient BAC, B'A'C' les valeurs obtenues pour l'angle de MN et de PQ,

lorsqu'on mène à ces droites des parallèles par deux points différents A et A'; les droites AC et A'C', étant chacune parallèles à MN et de même sens que cette droite, sont parallèles entre elles et de même sens (498); il en est de même pour AB et A'B'; par suite, les deux angles BAC, B'A'C' sont égaux.

508. On dit que deux droites non situées dans le même plan sont perpendiculaires l'une à l'autre lorsque leur angle est droit.

On voit, par la définition même de l'angle de deux droites, que, *lorsque deux droites sont perpendiculaires entre elles, toute parallèle à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

THÉORÈME.

509. 1° *Les parallèles* AB *et* CD, *comprises entre une droite* AC *et un plan* P *parallèles, sont égales* (*fig.* 283).

2° *Les parallèles* AB *et* CD, *comprises entre deux plans parallèles* P *et* Q, *sont égales* (*fig.* 283).

Cette double proposition résulte de ce que le plan des deux parallèles AB et CD coupe, dans le premier cas, le plan P suivant une parallèle BD à AC, et coupe, dans le second cas, les plans P et Q suivant des droites parallèles BD et AC (495); les droites AB et CD sont donc, dans les deux cas, égales comme parallèles comprises entre parallèles.

Fig. 283.

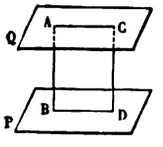
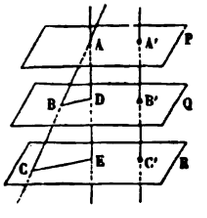


Fig. 284.



THÉORÈME.

510. *Deux droites quelconques* AC, A'C' (*fig.* 284) *sont coupées par trois plans parallèles* P, Q, R, *en parties proportionnelles;* en d'autres termes, si la droite AC coupe les plans

P, Q, R en A, B, C, et si la droite A'C' coupe les mêmes plans en A', B', C', on a

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}. \tag{1}$$

En effet, menons par A la parallèle à A'C', et désignons par D et E les points où elle coupe les plans Q et R. Les droites BD et CE étant parallèles (495), on a

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE};$$

mais les segments AD, DE, AE sont respectivement égaux à A'B', B'C', A'C', comme parallèles comprises entre plans parallèles. La relation (1) est donc démontrée.

COROLLAIRE.

511. Deux droites concourantes AC et AE étant divisées en parties proportionnelles par le point A et les plans parallèles Q et R, il en est de même pour une série de sécantes partant de A. En supposant, en effet, qu'il y ait trois sécantes, le rapport des segments de la première étant égal à la fois au rapport des segments de la seconde et au rapport des segments de la troisième, ces deux derniers rapports sont égaux entre eux.

§ III. — DROITE ET PLAN PERPENDICULAIRES.

DÉFINITIONS.

512. On dit qu'une droite et un plan sont *perpendiculaires l'un à l'autre* lorsque la droite est perpendiculaire (508) à toutes les droites parallèles au plan ou situées dans le plan.

513. Il suit immédiatement de cette définition que :

1° *Si deux droites* A *et* B *sont parallèles, tout plan* P *perpendiculaire à la première est perpendiculaire à la seconde;* car toute droite parallèle au plan P ou située dans ce plan, étant perpendiculaire à A, est aussi (508) perpendiculaire à B.

2° *Si deux plans* P *et* Q *sont parallèles, toute droite* D *perpendiculaire au premier est perpendiculaire au second;* car

toute droite parallèle au plan P ou située dans ce plan est parallèle au plan Q ou située dans ce plan (502).

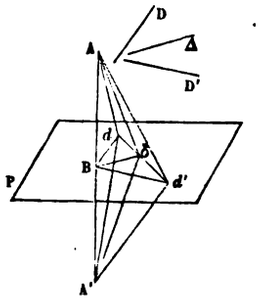
On énonce souvent ces deux propositions en disant :

Deux droites parallèles ont leurs plans perpendiculaires communs, et deux plans parallèles ont leurs perpendiculaires communes.

THÉORÈME.

514. *Pour qu'une droite* AB *soit perpendiculaire à un plan* P, *il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux droites* D *et* D', *non parallèles entre elles, situées dans le plan* P *ou parallèles au plan* P (*fig.* 285).

Fig. 285.



Remarquons d'abord que la droite AB rencontre le plan P; car, sans cela, en menant par un point du plan P des parallèles aux droites AB, D et D', on aurait dans ce plan (497) trois droites concourantes dont la première serait perpendiculaire aux deux autres.

Cela posé, par le point B où la droite AB rencontre le plan P, menons des parallèles Bd, Bd', Bδ, aux droites D et D' et à une troisième droite quelconque Δ parallèle au plan P ou située dans ce plan. Les trois droites Bd, Bd', Bδ, seront contenues dans le plan P (497); AB sera perpendiculaire aux deux premières Bd, Bd' (508); et, pour établir le théorème énoncé, il suffira de prouver que AB est aussi perpendiculaire à la troisième droite Bδ.

A cet effet, par un point quelconque δ pris sur Bδ, traçons dans le plan P une droite qui ne soit parallèle ni à Bd ni à Bd'.

et qui les rencontre aux points d et d'; prolongeons AB, de l'autre côté du plan P, d'une longueur $BA' = AB$, et joignons chacun des points A et A′ aux trois points d, δ, d'.

De l'égalité des triangles ABd et A′Bd et de celle des triangles ABd' et A′Bd', on déduit respectivement $Ad = A'd$ et $Ad' = A'd'$. Les deux triangles Add' et A′dd' sont donc égaux. Cette égalité entraîne l'égalité des angles A$d\delta$, A′$d\delta$; par suite, celle des triangles A$d\delta$, A′$d\delta$; et, enfin, celle des longueurs Aδ et A′δ.

La droite Bδ ayant deux de ses points, B et δ, également distants des extrémités A et A′, est perpendiculaire sur le milieu B de AA′, et AB, à son tour, est perpendiculaire sur Bδ.

Scolie.

515. Le point B où la perpendiculaire AB rencontre le plan P est le *pied* de la perpendiculaire.

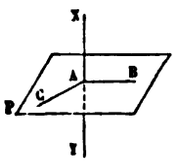
Une droite est dite *oblique* à un plan, lorsqu'elle rencontre ce plan sans lui être perpendiculaire.

THÉORÈME.

516. *Par un point donné* A, *on peut toujours mener un plan perpendiculaire sur une droite donnée* XY, *et l'on ne peut en mener qu'un.*

1° Supposons le point A situé sur la droite XY (*fig.* 286). Dans deux plans différents passant par XY, menons à cette

Fig. 286.



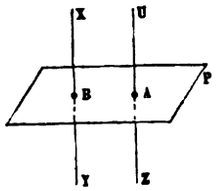
droite les perpendiculaires AB et AC; elles détermineront un plan P, perpendiculaire à XY au point A (514).

Il n'existe pas d'autre plan perpendiculaire à XY au point A. En effet, tout plan mené perpendiculairement à XY par le point A doit couper le plan XAB suivant la perpendiculaire AB

à XY (512), et le plan XAC suivant la perpendiculaire AC à cette même droite; il ne diffère donc pas du plan P.

2° Supposons le point A extérieur à la droite XY (*fig.* 287). Soit UZ la parallèle à XY menée par A. Les droites paral-

Fig. 287.



lèles XY et UZ ayant leurs plans perpendiculaires communs (513), dire que par le point A on peut abaisser un plan perpendiculaire sur XY et qu'on ne peut en abaisser qu'un, c'est dire que, par le point A, on peut élever un plan perpendiculaire sur UZ et qu'on ne peut en élever qu'un; or c'est ce que nous venons d'établir (1°).

COROLLAIRE.

517. *Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles ou coïncident;* car s'ils se coupaient, d'un point de leur intersection, on pourrait mener deux plans perpendiculaires sur la même droite, ce dont nous venons de démontrer l'impossibilité.

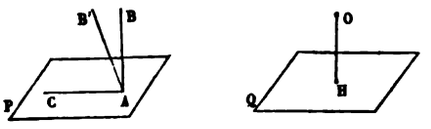
THÉORÈME.

518. *Par un point donné* A, *on peut toujours mener une droite perpendiculaire à un plan donné* P, *et l'on ne peut en mener qu'une.*

1° Supposons le point A situé dans le plan P (*fig.* 288). Considérons à part une droite OH et le plan Q élevé perpendiculairement à cette droite par l'un de ses points H; puis, transportons cette figure tout d'une pièce, de manière que le plan Q s'appliquant sur le plan P, le point H coïncide avec le point A. La droite OH, dans sa nouvelle posi-

tion, sera une perpendiculaire AB menée au plan P par le point A.

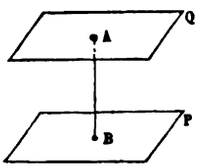
Fig. 288.



On ne peut en mener qu'une; car, si l'on pouvait en mener deux, AB et AB', le plan BAB' couperait le plan P suivant une droite AC perpendiculaire à la fois à AB et à AB'.

2° Supposons le point A extérieur au plan P (*fig.* 289).

Fig. 289.



Soit Q le plan mené par A parallèlement au plan P. Les plans parallèles P et Q ayant leurs perpendiculaires communes (513), dire que, par le point A, on peut abaisser une perpendiculaire sur le plan P et qu'on ne peut en abaisser qu'une, c'est dire que par le point A on peut élever une perpendiculaire sur le plan Q, et qu'on ne peut en élever qu'une; or c'est ce que nous venons d'établir (1°).

COROLLAIRE.

519. *Deux droites* A *et* B, *perpendiculaires à un même plan* P, *sont parallèles ou coïncident.*

En effet, si les droites A et B ont un point commun, elles coïncident, puisque, de ce point, on ne peut mener qu'une perpendiculaire au plan P. Si les droites A et B n'ont pas de point commun, imaginons, par un point M de B, la parallèle A' à A. Cette droite A' sera perpendiculaire au plan P (513); elle coïncidera donc avec B, puisque, du point M, on ne peut mener qu'une perpendiculaire au plan P.

Les propositions des nos 517 et 519 sont les réciproques de celles du n° 513.

THÉORÈME.

520. *Si une droite* AB *est perpendiculaire au plan* P, *toute perpendiculaire* CD *à la droite* AB *est parallèle au plan* P, *ou située dans ce plan* (*fig.* 290).

En effet, menons par le point A la parallèle AE à CD : l'angle BAE sera droit. Par suite, la droite AE sera contenue dans le plan P; car sans cela le plan BAE couperait le plan P suivant une autre perpendiculaire à AB (512), et l'on aurait au point A, dans le plan BAE, deux perpendiculaires sur BA, ce qui est impossible. La droite CD, étant alors parallèle à une droite AE du plan P, est parallèle à ce plan ou située dans ce plan (497).

Cette proposition est la réciproque de la définition adoptée au n° 512.

COROLLAIRES.

521. *Le lieu géométrique des perpendiculaires que l'on peut mener à une droite* AB *par un point* C *est le plan* P *mené par ce point perpendiculairement à la droite* AB (*fig.* 291); car l'une quelconque CD de ces perpendiculaires doit être parallèle au plan P ou y être contenue tout entière : c'est ce dernier cas qui a lieu ici, puisque la droite CD a déjà un point commun avec le plan P.

Fig. 290.

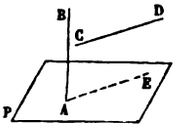
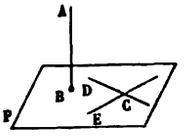


Fig. 291.



522. *Le lieu des points de l'espace équidistants des extrémités d'une droite* XY *est le plan élevé perpendiculairement sur le milieu de cette droite* (*fig.* 286). En effet, dans un plan quelconque XYB passant par XY, le lieu des points équidistants des extrémités de cette droite est la perpendiculaire AB élevée dans ce plan sur le milieu A de XY; or on vient de voir que le lieu des diverses perpendiculaires élevées sur XY

par le point A est le plan mené par ce point perpendiculairement à XY.

THÉORÈME.

523. *Si, d'un point* A *pris hors d'un plan* P (*fig.* 292), *on mène à ce plan la perpendiculaire* AB *et diverses obliques* AC, AD, AE :

1° *Deux obliques* AC *et* AD, *dont les pieds* C *et* D *s'écartent également du pied* B *de la perpendiculaire, sont égales.*

2° *La perpendiculaire* AB *est plus courte que toute oblique* AC, *et, de deux obliques* AC *et* AE, *l'oblique* AE, *qui s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire, est la plus longue.*

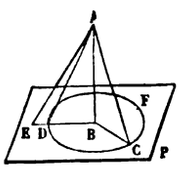
En effet :

1° Les deux triangles rectangles ABC et ABD étant égaux, comme ayant les deux côtés de l'angle droit respectivement égaux, les hypoténuses AC et AD sont égales.

2° En prenant BD = BC, on a, en vertu de l'alinéa précédent, AC = AD, et, par la Géométrie plane, AE > AD > AB; on a donc AB < AC et AE > AC.

524. Les réciproques de ces propositions sont vraies. Il en résulte que *le lieu des points d'un plan* P *situés à égale distance d'un point donné* A *est une circonférence ayant pour centre la projection* B *de ce point sur le plan* (*fig.* 292). De là,

Fig. 292.



un moyen pratique pour abaisser une perpendiculaire sur un plan P par un point extérieur A : on fixe au point A l'une des extrémités d'un fil dont l'autre extrémité est armée d'un crayon, on marque trois points C, D, F sur le plan en tenant le fil tendu, on cherche le centre du cercle qui passerait par ces trois points, et l'on a le pied de la perpendiculaire demandée.

Scolies.

525. En Géométrie, le mot *distance* est toujours synonyme de *plus courte distance*. D'après cela, il résulte du n° 523 que *la distance d'un point* A *à un plan* P *est la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan.*

Si l'on rapproche ce résultat des n°s 509 et 519, on voit que : 1° *une droite et un plan parallèles sont partout équidistants;* 2° *deux plans parallèles sont partout équidistants.*

§ IV. — PROJECTION D'UNE DROITE SUR UN PLAN. — ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN. — PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX DROITES.

DÉFINITIONS.

526. On appelle *projection* d'un point A sur un plan P le pied *a* de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan (*fig.* 293).

La projection d'une ligne quelconque ABC... sur un plan P est le lieu des projections *a*, *b*, *c*, ... des divers points de cette ligne.

Fig. 293.

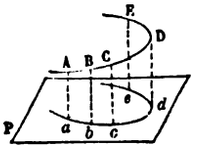
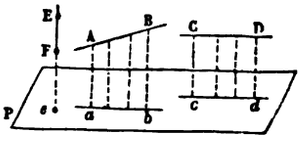


Fig. 294.



THÉORÈME.

527. *La projection d'une ligne droite* AB *sur un plan* P *est une ligne droite* (*fig.* 294).

Car toutes les perpendiculaires A*a*, B*b*, ... abaissées sur le plan P par les divers points de la droite AB sont parallèles (519); leur lieu est donc un plan (492), et, par suite, le lieu de leurs pieds est la droite *ab* suivant laquelle ce plan coupe le plan P.

Scolies.

528. Lorsque la droite est, comme EF, perpendiculaire au

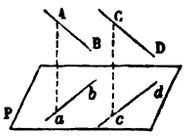
plan P, sa projection sur ce plan se réduit évidemment à un point *e*.

529. Lorsque la droite est, comme CD, parallèle au plan P, elle est parallèle à sa projection *cd* sur ce plan (495).

COROLLAIRES.

530. *Les projections ab et cd de deux droites parallèles* AB *et* CD, *sur un même plan* P, *sont parallèles* (*fig.* 295).

Fig. 295.



Car la *projetante* A*a* d'un point quelconque de AB et la projetante C*c* d'un point quelconque de CD étant parallèles, les angles BA*a*, DC*c* ont leurs plans parallèles (506); et, par suite, les droites *ab* et *cd*, suivant lesquelles le plan P coupe ces deux plans, sont parallèles.

THÉORÈME.

531. *Lorsque deux droites* AB *et* CD *de l'espace sont perpendiculaires l'une à l'autre, leurs projections ab et cd sur un plan* P *parallèle à l'une d'elles* CD *sont aussi perpendiculaires entre elles* (*fig.* 296).

Fig. 296.

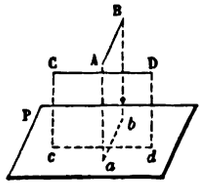
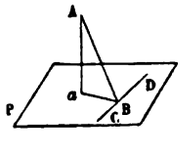


Fig 297.



En effet, la droite *cd* est, comme sa parallèle CD, à angle droit sur AB; elle est d'ailleurs à angle droit sur la projetante A*a*, droite perpendiculaire au plan P qui contient *cd*.

Donc, *cd* est perpendiculaire au plan AB*ab* et, par suite, à *ab*.

532. RÉCIPROQUEMENT, *deux droites de l'espace* AB *et* CD *sont perpendiculaires l'une à l'autre, si leurs projections ab et cd sur un plan* P *parallèle à l'une d'elles* CD *sont perpendiculaires entre elles* (*fig.* 296).

En effet, la droite *cd*, étant à angle droit sur *ab* et sur A*a*, est perpendiculaire au plan AB*ba*. Il en est donc de même de sa parallèle CD, qui, par suite, est perpendiculaire à AB.

Dans le cas très-particulier où le plan P contient CD et où les droites AB et CD se coupent, cette réciproque revient au théorème connu sous le nom de *théorème des trois perpendiculaires:*

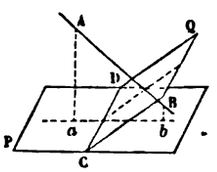
Si du pied a d'une perpendiculaire A*a à un plan* P *on mène la perpendiculaire a*B *sur une droite quelconque* CD *tracée dans ce plan, la droite* AB *qui joint au point* B *un point quelconque de la perpendiculaire* A*a est perpendiculaire à* CD (*fig.* 297).

Il y a une seconde réciproque que nous nous contenterons d'énoncer : *Si deux droites rectangulaires ont leurs projections rectangulaires, l'une d'elles au moins est parallèle au plan de projection.*

COROLLAIRE.

533. Considérons une droite quelconque AB et un plan Q perpendiculaire à cette droite; soient *ab* la projection de AB sur un plan quelconque P (*fig.* 298), et CD l'intersection des

Fig. 298.



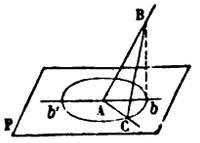
plans P et Q, ou la *trace* du plan Q sur le plan P. Les deux droites AB et CD étant perpendiculaires l'une à l'autre, il doit en être de même de leurs projections *ab* et CD; de là ce théorème, fondamental en Géométrie descriptive : *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan* Q, *sa projection sur un*

plan quelconque P *est perpendiculaire à la trace du plan* Q *sur le plan* P.

THÉORÈME.

534. *Lorsqu'une droite* AB *est oblique à un plan* P, *l'angle aigu* BA*b que cette droite fait avec sa projection sur ce plan est moindre que l'angle* BAC *qu'elle forme avec toute autre droite* AC *passant par son pied dans le plan* (*fig.* 299).

Fig. 299.



En effet, *b* étant la projection d'un point quelconque B de la droite AB, prenons AC = A*b* et menons BC. Les deux triangles BA*b*, BAC ont deux côtés égaux; mais le troisième côté B*b* du premier étant moindre que le troisième côté BC du second, puisque la perpendiculaire est plus courte que l'oblique, il faut que l'angle BA*b* soit moindre que l'angle BAC.

Scolie.

535. En faisant parcourir au point C le cercle décrit dans le plan P, du point A comme centre avec A*b* pour rayon, on voit que l'oblique BC croît d'une manière continue depuis le point *b* jusqu'au point *b'*, puis décroît en reprenant successivement les mêmes valeurs depuis *b'* jusqu'en *b*. Par suite, l'angle BAC, minimum lorsque le point C est en *b*, croît jusqu'à ce que le point C soit en *b'* : il est alors maximum; puis il décroît, en reprenant successivement les mêmes valeurs, depuis *b'* jusqu'en *b*.

536. On appelle *angle d'une droite et d'un plan* l'angle aigu que cette droite forme avec sa projection sur ce plan.

537. On voit aisément que *l'angle d'une droite* D *et d'un plan* P *est égal à l'angle d'une droite quelconque* D' *parallèle à* D *et d'un plan quelconque* P' *parallèle à* P.

THÉORÈME.

538. *Étant données deux droites* AB *et* CD *non situées dans le même plan :* 1° *il existe une droite, et une seule, qui les rencontre l'une et l'autre à angle droit;* 2° *cette perpendiculaire commune est la plus courte distance des deux droites* (*fig.* 300).

Fig. 300.

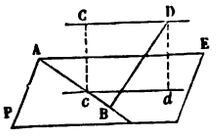
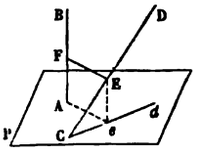


Fig. 301.



En effet :

1° Par un point quelconque A de AB, menons la parallèle AE à CD; le plan BAE, que nous désignerons par P, sera parallèle à CD; par suite, nous aurons la projection de CD sur ce plan P en menant une parallèle *dc* à la droite DC par la projection *d* d'un point quelconque D de cette droite. Cela posé, pour qu'une droite rencontre à la fois AB et CD à angle droit, il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire au plan P en un point de AB, et qu'elle ait son pied sur *cd*, lieu des pieds des perpendiculaires au plan P menées par des divers points de CD. Or la perpendiculaire au plan P élevée par le point *c* commun à AB et à *cd* remplit seule ces conditions. Il existe donc une droite C*c*, et une seule qui rencontre à angle droit les deux droites données AB et CD.

2° Cette perpendiculaire commune C*c* est moindre que toute autre droite BD joignant un point de AB à un point de CD. Car, D*d* étant la projetante du point D, on a évidemment C*c* = D*d* et D*d* < DB.

Scolies.

539. La démonstration qui précède permet d'obtenir la plus courte distance des deux droites AB et CD. Voici un second procédé très usuel (*fig.* 301).

On projette l'une des droites CD sur un plan P perpendiculaire à l'autre droite AB. Du pied A de AB sur le plan P, on

abaisse la perpendiculaire A*e* sur la projection C*d* de CD; on mène *e*E parallèle à AB jusqu'à sa rencontre E avec CD, et enfin EF parallèle à A*e*. Le lecteur démontrera sans peine que cette droite EF est, en grandeur et en position, la plus courte distance des deux droites données.

540. Enfin, si l'on ne veut que la *distance*, c'est-à-dire la longueur de la perpendiculaire commune, il suffit de mener par l'une AB des deux droites un plan P parallèle à l'autre CD, et de prendre la distance D*d* d'un point quelconque de CD au plan P (*fig.* 300).

§ V. — ANGLES DIÈDRES.

DÉFINITIONS.

541. Lorsque deux plans P et Q se rencontrent (*fig.* 302) et sont terminés à leur intersection commune BE, on dit qu'ils forment un *angle dièdre*. Les deux plans P et Q sont les *faces*, et la droite BE est l'*arête* de cet angle.

542. Pour désigner un angle dièdre isolé, il suffit d'indiquer son arête; ainsi l'on dit (*fig.* 302) l'angle dièdre BE. Mais, lorsque plusieurs angles dièdres ont la même arête, pour désigner celui d'entre eux que l'on considère, il faut employer quatre lettres, savoir : une lettre pour chaque face et deux

Fig. 302.

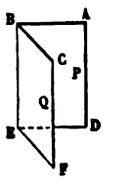
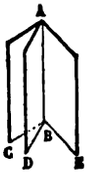


Fig. 303.



pour l'arête; on place d'ailleurs les deux lettres relatives à l'arête entre les deux autres. Ainsi, dans la *fig.* 303, on distingue les trois dièdres CABD, DABE, CABE.

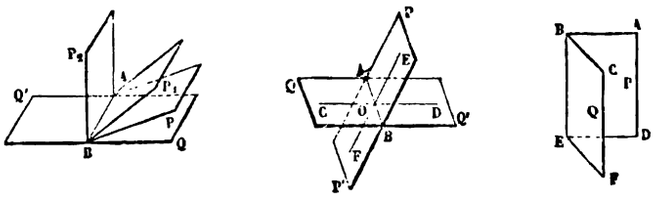
Deux angles, tels que CABD, DABE (*fig.* 303), qui ont la

même arête AB, une face commune ABD, et les deux autres faces situées de part et d'autre de la face commune, sont dits *adjacents*.

543. Deux angles dièdres sont égaux lorsqu'on peut les faire coïncider. Pour ajouter deux angles dièdres, on transporte le second à la suite du premier de manière à former deux angles adjacents, tels que CABD, DABE (*fig.* 303); l'angle CABE des deux faces non communes ABC, ABE est la somme des deux angles dièdres proposés.

544. On acquiert une idée nette de la grandeur de l'angle dièdre, en supposant que l'une des faces P, d'abord appliquée sur l'autre face Q (*fig.* 304), tourne autour de la droite AB; dans cette rotation, le plan mobile P fait avec le plan fixe Q un angle dièdre qui croît d'une manière continue.

Fig. 304. Fig. 305. Fig. 306.



Un plan P_2 est dit *perpendiculaire* sur un plan QQ' (*fig.* 304), lorsque les deux angles adjacents P_2ABQ, P_2ABQ', qu'il forme avec celui-ci, sont égaux. Un plan P, qui forme avec QQ' des angles adjacents PABQ, PABQ', inégaux, est dit *oblique* sur le plan QQ'.

On nomme *angle dièdre droit* tout dièdre P_2ABQ dont une face est perpendiculaire sur l'autre.

545. Deux angles dièdres sont dits *opposés par l'arête* lorsque les faces de l'un sont les prolongements des faces de l'autre. Deux plans indéfinis PP', QQ' (*fig.* 305) forment en se coupant quatre angles dièdres qui sont deux à deux opposés par l'arête AB.

On nomme *plan bissecteur* d'un angle dièdre le plan qui, mené par l'arête, divise cet angle dièdre en deux autres dièdres égaux entre eux.

546. On appelle *angle plan correspondant à un angle dièdre* l'angle rectiligne que l'on forme en élevant, par un même point de l'arête, une perpendiculaire à cette arête dans chacune des faces. Ainsi, B étant un point de l'arête BE de l'angle dièdre PEBQ (*fig.* 306), si l'on élève dans le plan P la perpendiculaire BA sur l'arête BE, et dans le plan Q la perpendiculaire BC sur l'arête BE, l'angle ABC sera l'*angle plan* du dièdre considéré.

Pour que cette définition ne soit pas contradictoire, il faut que la grandeur de l'angle plan correspondant à un angle dièdre soit la même, en quelque point de l'arête qu'on forme cet angle plan. Or, soient les angles plans ABC, DEF, formés en deux points B et E de l'arête de l'angle dièdre PBEQ (*fig.* 306): les côtés BC et EF sont parallèles et de même sens, comme étant, dans un même plan Q, perpendiculaires à la même droite BE; il en est de même de BA et de ED par rapport au plan P; les angles ABC, DEF sont donc égaux.

Il est à remarquer que le plan ABC est perpendiculaire à l'arête BE; réciproquement, tout plan perpendiculaire à l'arête coupe les faces suivant des perpendiculaires à cette arête, et, par suite, l'angle dièdre suivant son angle plan.

THÉORÈME.

547. *Par une droite* AB, *située dans un plan* QQ', *on peut toujours élever un plan* P, *perpendiculaire sur ce plan, et l'on ne peut en élever qu'un* (*fig.* 304).

COROLLAIRES.

548. *Tous les angles dièdres droits sont égaux.*

La démonstration de ce théorème et de son corollaire est tout à fait semblable à celle qui a été donnée aux nos 13 et 14 de la Géométrie plane.

Un angle dièdre est dit *aigu* ou *obtus* suivant qu'il est inférieur ou supérieur à l'angle dièdre droit. Deux angles dièdres

sont *complémentaires* lorsque leur somme est égale à un angle dièdre droit.

549. *Tout plan* P *qui en rencontre un autre* QQ' *fait avec celui-ci deux angles dièdres adjacents* PABQ, PABQ', *dont la somme est égale à deux dièdres droits* (*fig.* 304). Réciproquement, *si deux angles dièdres adjacents* PABQ, PABQ' *sont supplémentaires, c'est-à-dire ont une somme égale à deux dièdres droits, leurs faces non communes* Q *et* Q' *sont dans le prolongement l'une de l'autre.* (*Voir* les nos 16, 17 et 18.)

550. *Lorsque deux plans* PP', QQ' *se coupent, les angles dièdres opposés par l'arête* AB *sont égaux* (*fig.* 305). (*Voir* le n° 21.)

THÉORÈME.

551. *Le rapport de deux angles dièdres est égal au rapport de leurs angles plans.*

Il suffit (*voir* Note I) de prouver :

1° Que *si deux angles dièdres* AIOB, A'I'O'B' *sont égaux, leurs angles plans* AOB, A'O'B' *sont égaux* (*fig.* 307);

2° Que *si un angle dièdre* AIOC *est la somme de deux autres angles dièdres* A'I'O'B', BIOC, *son angle plan* AOC *est la somme des angles plans* A'O'B', BOC, *qui correspondent aux deux autres angles dièdres* (*fig.* 307).

En effet :

1° Transportons l'angle dièdre A'I'O'B', de manière que l'angle droit I'O'A' s'applique sur l'angle droit IOA; puisque

Fig. 307.

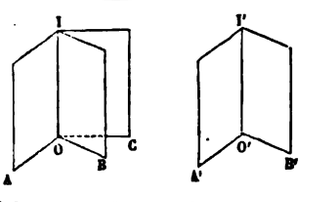
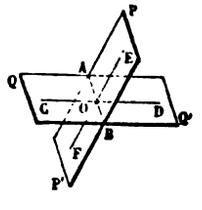


Fig. 308.



les dièdres AIOB, A'I'O'B' sont égaux, le plan I'O'B' tombera sur le plan IOB, et O'B' coïncidera avec la perpendicu-

laire à IO élevée dans le plan IOB par le point O, c'est-à-dire avec OB; les angles plans AOB, A'O'B' sont donc égaux.

2° Puisque l'angle plan A'O'B' est égal à AOB, pour prouver que l'angle plan AOC est égal à la somme de A'O'B' et de BOC, il suffit de faire voir que les trois droites OC, OB, OA sont dans un même plan; or cela résulte du n° 521.

COROLLAIRE.

552. Par suite, *tout angle dièdre a la même mesure que l'angle plan correspondant, pourvu que l'on prenne pour unité d'angle dièdre l'angle dièdre auquel correspond l'angle plan choisi pour unité d'angle plan ;* ou, d'une manière incorrecte, mais plus rapide, *tout angle dièdre a pour mesure son angle plan.*

SCOLIES.

553. *L'angle dièdre droit a pour angle plan un angle droit,* et, inversement, *un angle dièdre est droit si son angle plan est droit.* En effet, soient PABQ, PABQ' (*fig.* 308) deux angles dièdres adjacents formés par la rencontre du plan P et du plan QQ'; par un point O de l'arête AB, menons un plan perpendiculaire à cette arête; ce plan déterminera, par ses intersections avec les plans P et QQ', deux angles rectilignes adjacents EOC, EOD, qui seront les angles plans des deux angles dièdres proposés. Or, quand les deux dièdres sont égaux, les deux angles plans sont égaux, et réciproquement.

554. La proportionnalité des angles dièdres et des angles plans correspondants permet de conclure un grand nombre de propriétés des angles dièdres des propriétés analogues des angles rectilignes démontrées en Géométrie plane. Nous citerons, par exemple, les propositions suivantes, qui sont souvent utiles :

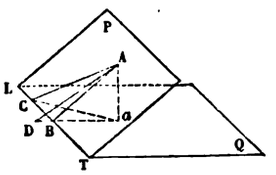
Le plan bissecteur d'un angle dièdre est le lieu des points qui, situés dans l'intérieur de cet angle, sont équidistants de ses faces ; etc. (*Voir* les n°s 51, 52, 53.)

Deux angles dièdres qui ont leurs faces parallèles deux à deux sont égaux ou supplémentaires. (*Voir* le n° 70.)

THÉORÈME.

555. *Parmi toutes les droites que l'on peut mener par un point* A *dans un plan* P, *celle qui fait le plus grand angle avec un autre plan donné* Q *est la perpendiculaire* AB *abaissée du point* A *sur l'intersection* LT *des deux plans* P *et* Q (*fig.* 309).

Fig. 309.



Soient AC une droite quelconque menée par le point A dans le plan P, et a la projection du point A sur le plan Q ; aB et aC seront les projections de AB et de AC, et il s'agit de démontrer (536) que l'angle ABa est plus grand que l'angle ACa. Or, la droite aB étant perpendiculaire sur LT, en vertu du théorème des trois perpendiculaires, la droite aC est une oblique, et l'on a $aB < aC$. Si l'on prend sur la droite aB, à partir du point a, une longueur aD égale à aC, le point D sera donc situé au delà de B, et l'angle ABa extérieur au triangle ABD surpassera l'angle intérieur ADa ; mais, les triangles AaC et AaD étant égaux comme ayant un angle droit égal compris entre deux côtés égaux, l'angle ADa est égal à l'angle ACa : donc enfin l'angle ABa est plus grand que l'angle ACa.

Scolie.

556. Lorsque le plan Q est horizontal, la droite AB prend le nom de *ligne de plus grande pente* du plan P. L'angle de cette ligne avec le plan Q est l'angle plan du dièdre PLTQ. Par chaque point d'un plan passe une ligne de plus grande pente de ce plan, et une seule.

§ VI. — PLANS PERPENDICULAIRES.

THÉORÈME.

557. *Lorsque deux plans* P *et* Q *sont perpendiculaires l'un à l'autre, toute droite* AB, *menée dans le premier plan* P *per-*

pendiculairement à l'intersection commune CD, *est perpendiculaire à l'autre plan* Q (*fig.* 310).

En effet, les deux plans P et Q étant perpendiculaires l'un à l'autre, l'angle plan correspondant à l'angle dièdre PCDQ doit être droit ; or on forme cet angle plan ABE en élevant, dans le plan Q et par le point B, la perpendiculaire BE à CD ; donc la droite AB est perpendiculaire à BE, et, comme elle l'est aussi par hypothèse à CD, elle est perpendiculaire au plan Q.

Fig. 310.

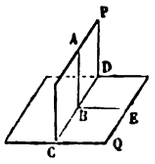
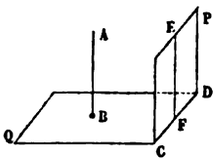


Fig. 311.



THÉORÈME.

558. *Si une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* Q, *tout plan* P *passant par cette droite ou parallèle à cette droite est perpendiculaire au plan* Q.

En effet :

1° Si le plan P passe par AB (*fig.* 310), menons dans le plan Q et par le point B la perpendiculaire BE à l'intersection CD des deux plans P et Q. L'angle ABE sera droit, puisque la droite AB est, par hypothèse, perpendiculaire au plan Q; d'ailleurs, cet angle ABE est l'angle plan du dièdre PCDQ ; donc ce dièdre est droit, et le plan P est perpendiculaire au plan Q.

2° Si le plan P est parallèle à AB (*fig.* 311), menons par un point quelconque E de ce plan la parallèle EF à AB ; cette droite EF sera à la fois perpendiculaire au plan Q et située dans le plan P. Donc le plan P, passant par une droite EF perpendiculaire au plan Q, sera perpendiculaire à ce plan (1°).

559. Réciproquement, *si deux plans* Q *et* P *sont perpendiculaires entre eux, toute droite* AB *perpendiculaire au premier plan* Q *est située dans l'autre plan* P *ou lui est parallèle.*

En effet, si la droite AB n'avait qu'un seul point commun

avec le plan P, en menant de ce point une perpendiculaire sur l'intersection CD des plans P et Q (*fig.* 311), cette perpendiculaire serait perpendiculaire au plan Q, et l'on pourrait mener d'un même point deux perpendiculaires au plan Q; ce qui est impossible. La droite AB, ne pouvant couper le plan P, est donc parallèle à ce plan ou située dans ce plan.

COROLLAIRE.

560. *Par une droite* AB *oblique à un plan* P (*fig.* 312), *on peut abaisser un plan perpendiculaire sur ce plan* P, *et l'on ne peut en abaisser qu'un.*

En effet, le plan BA*a*, déterminé par la droite AB et par la perpendiculaire A*a* au plan P abaissée d'un point quelconque de AB, est perpendiculaire au plan P. C'est le seul, car tout plan conduit par AB perpendiculairement au plan P doit contenir la perpendiculaire A*a*.

Fig. 312.

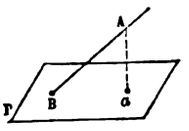
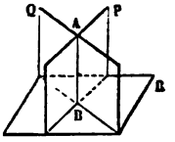


Fig. 313.



THÉORÈME.

561. *Si deux plans* P *et* Q *sont perpendiculaires à un troisième* R, *leur intersection* AB *est perpendiculaire à ce troisième plan* (*fig.* 313).

Car si, par un point quelconque de l'intersection AB, on mène la perpendiculaire au plan R, cette perpendiculaire doit se trouver à la fois dans le plan P et dans le plan Q (559); elle ne diffère donc pas de AB.

COROLLAIRES.

562. Un plan perpendiculaire à deux plans qui se coupent est perpendiculaire à leur intersection.

563. Si les plans P et Q de la *fig.* 313 forment un angle dièdre droit, les trois plans P, Q, R seront perpendiculaires entre

eux ; l'intersection de deux quelconques de ces plans sera perpendiculaire au troisième, et les trois intersections seront perpendiculaires entre elles.

§ VII. — ANGLES POLYÈDRES.

DÉFINITIONS.

564. Lorsque plusieurs plans ASB, BSC, CSD, ... (*fig.* 314) se coupent successivement suivant des droites SB, SC, SD, ... qui concourent en un même point S, on dit qu'ils forment *un angle polyèdre*. Le point S est le *sommet*, les droites SA, SB, SC, ... sont les *arêtes*, et les angles ASB, BSC, CSD, ... sont les *faces* de l'angle polyèdre.

On désigne un angle polyèdre par la lettre du sommet suivie des lettres relatives aux diverses arêtes. Ainsi, pour indiquer l'angle polyèdre de la *fig.* 314, on dira l'angle SABCDE, ou plus simplement l'angle S ; car, quand un angle polyèdre est isolé, la lettre du sommet suffit.

Fig. 314.

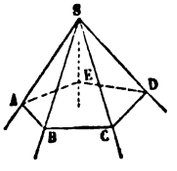
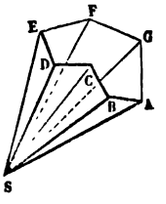


Fig. 315.

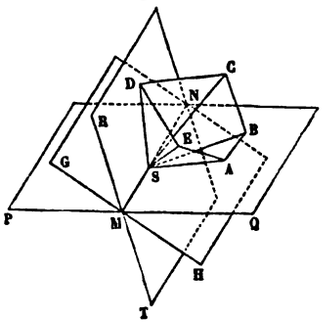


Il faut au moins trois plans pour former un angle polyèdre. L'angle formé par trois plans prend le nom d'*angle trièdre*. Dans un angle trièdre BACS (*fig.* 314), on distingue six éléments, savoir : les trois faces SBA, SBC, ABC, et les trois dièdres BA, BC, BS.

565. On dit qu'un angle polyèdre est *convexe*, lorsqu'il est situé tout entier d'un même côté par rapport au plan indéfini de chacune de ses faces (*fig.* 314) ; il est *concave* dans le cas contraire (*fig.* 315).

Considérons un angle polyèdre convexe SABCDE (*fig.* 316); ses arêtes seront, d'après la définition de la convexité, situées toutes d'un même côté du plan PQ d'une face quelconque ASB; dans la *fig.* 316, nous les avons placées, pour fixer les

Fig. 316.



idées, au-dessus de ce plan. Par le point S, dans le plan PQ, menons une droite MN située en dehors de l'angle ASB, et concevons une série de plans menés par la droite MN et contenant successivement chacune des arêtes SC, SD, SE. Si DSM ou RMN est celui de tous ces plans qui fait le plus petit angle avec la portion PMN du plan PQ, l'angle polyèdre proposé SABCDE sera situé tout entier dans l'angle dièdre RMNQ formé par la partie antérieure Q et la partie supérieure R des deux plans PQ, RT. Donc, tout plan GH mené par MN et situé dans l'angle dièdre PMNR et dans son opposé par l'arête QMNT sera un plan mené par le sommet S et laissant toutes les arêtes d'un même côté. Par suite, tout plan parallèle au plan GH et situé, comme l'angle polyèdre SABCDE, à droite de GH, coupera toutes les arêtes de cet angle sans passer par le sommet. Le section sera donc un polygone ABCDE ayant autant de côtés que l'angle polyèdre a de faces, et ce polygone sera convexe; car, l'angle polyèdre étant tout entier d'un même côté, par rapport au plan de chacune de ses faces, le polygone se trouvera, par là même, situé tout entier d'un même côté par rapport à chacune des droites indéfinies qui unissent deux sommets consécutifs quelconques.

566. Si l'on prolonge au delà du sommet S toutes les arêtes d'un angle polyèdre SABCDE (*fig.* 317), on obtient un autre angle polyèdre SA'B'C'D'E' qui est dit le *symétrique* du premier.

Deux angles polyèdres symétriques SABCDE, SA'B'C'D'E' ont tous leurs éléments respectivement égaux : les faces ASB et A'SB', BSC et B'SC', ... sont égales deux à deux comme angles plans opposés par le sommet, et les angles dièdres SA et SA', SB et SB', ... sont égaux comme opposés par l'arête. Mais la disposition des parties égales n'est pas la même dans les deux angles polyèdres. En effet, un observateur couché sur l'arête SA, ayant la tête en S, les pieds en A, et regardant l'intérieur de l'angle SABCDE, verrait les arêtes se présenter de

Fig. 317.

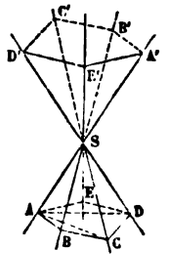
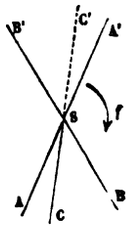


Fig. 318.



droite à gauche dans l'ordre SB, SC, SD, SE; tandis qu'un observateur placé de la même manière dans l'autre angle SA'B'C'D'E', c'est-à-dire couché sur SA', ayant la tête en S, les pieds en A' et regardant l'intérieur de l'angle, verrait les arêtes se succéder de droite à gauche dans l'ordre inverse SE', SD', SC', SB'.

A cause de cette différence de disposition, *deux angles polyèdres symétriques, bien qu'égaux dans toutes leurs parties, ne sont pas superposables.*

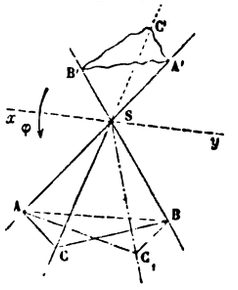
En effet, considérons, par exemple, deux trièdres symétriques SABC et SA'B'C' (*fig.* 318), et supposons, pour fixer les idées, que l'arête SC soit en avant du plan ASB, et, par suite, que son prolongement SC' soit en arrière du même plan. Il y a

deux manières différentes d'essayer la superposition des deux trièdres.

1° Concevons (*fig.* 318) la perpendiculaire élevée par le point S sur le plan ASB, et faisons tourner le trièdre SA'B'C' de 180 degrés autour de cette droite dans le sens de la flèche f; l'arête SA', qui dans ce mouvement ne sort pas du plan ASB, viendra sur SA; de même SB' s'appliquera sur SB; mais l'arête SC' restera toujours en arrière du plan ASB; par suite, dans sa nouvelle position, le trièdre SA'B'C' ne coïncidera pas avec SABC.

2° Menons (*fig.* 319) la bissectrice xSy de l'angle BSA', et, autour de cette droite, qui est située dans le plan ASB, faisons

Fig. 319.



tourner le trièdre SA'B'C' de 180 degrés dans le sens de la flèche φ. L'arête SA' s'appliquera sur SB, l'arête SB' sur SA, et, par suite, la face A'SB' coïncidera avec BSA ; de plus, l'arête SC' viendra cette fois en avant du plan ASB. Mais la nouvelle position SC_1 de cette arête différera en général de SC ; car, les angles dièdres suivant les arêtes SA et SB étant en général inégaux, il en sera de même des angles dièdres SB et SA', et, par suite, les plans CSB et C_1SB, étant inégalement inclinés sur le plan ASB, ne coïncideront pas.

On voit cependant que la coïncidence aurait lieu si le trièdre SABC avait les deux angles dièdres SA et SB égaux entre eux. Car, dans cette hypothèse, les plans C_1SB et CSB seraient également inclinés sur le plan ASB; ils tomberaient donc l'un sur l'autre; il en serait de même des plans C_1SA et CSA, et,

par suite, les arêtes SC et SC_1 se confondraient. Observons d'ailleurs que la face C′SA′, qui est égale à ASC, s'applique alors sur CSB, de sorte que l'égalité des deux angles dièdres SA et SB entraîne celles des faces CSB et CSA. Donc, en résumé, *pour qu'un trièdre soit superposable à son symétrique, il faut et il suffit que ce trièdre ait deux angles dièdres égaux ; et, dans un tel trièdre, les faces opposées aux dièdres égaux sont égales.*

THÉORÈME.

567. *Dans tout angle polyèdre, une face quelconque est moindre que la somme de toutes les autres.*

Il n'y a lieu à démontrer cette proposition que lorsque la face considérée est plus grande que chacune des autres.

Cela posé, considérons d'abord un angle trièdre SABC (*fig.* 320). Dans la face ASB, que nous supposons plus grande que chacune des deux autres, formons un angle ASD égal à ASC, et prenons, à partir de S, sur les droites SD et SC, des longueurs SC et SD égales entre elles. Par le point D, menons une droite ABD qui rencontre les arêtes SA et SB en A et en B ;

Fig. 320.

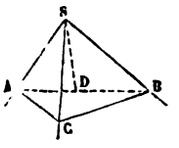
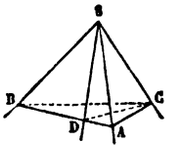


Fig. 321.



enfin, joignons le point C aux points A et B. L'égalité des deux triangles ASD, ASC, qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, donne $AD = AC$; et comme on a

$$AB \quad \text{ou} \quad AD + DB < AC + CB,$$

on voit que le segment BD est moindre que CB. Dès lors, les deux triangles CSB, DSB, ayant SB commun, $SC = SD$, et $DB < BC$, il faut (41) que l'angle DSB soit moindre que CSB. Donc, en ajoutant d'une part l'angle ASD et de l'autre son égal ASC, on a

$$ASD + DSB \quad \text{ou} \quad ASB < ASC + CSB.$$

Pour étendre le théorème au cas d'un angle polyèdre quelconque, il suffit de décomposer cet angle en trièdres en menant par l'une des arêtes SA et par les arêtes opposées SC, SD, des plans diagonaux ASC, ASD (*fig.* 317); la démonstration est évidente.

COROLLAIRE.

568. *Dans tout angle trièdre, à un plus grand angle dièdre est opposée une plus grande face.*

Soit (*fig.* 321) le trièdre SABC dans lequel l'angle dièdre SC est plus grand que l'angle dièdre SB. On pourra mener dans le dièdre SC et par l'arête SC un plan CSD qui fasse, avec le plan CSB, un angle dièdre égal au dièdre SB. Le trièdre SBCD ayant deux dièdres égaux, les faces BSD, CSD, opposées à ces angles, seront égales (566). Or le trièdre SACD donne

$$\text{ASC} < \text{ASD} + \text{DSC};$$

on aura donc, en remplaçant la face DSC par son égale DSB,

$$\text{ASC} < \text{ASD} + \text{DSB} \quad \text{ou} \quad \text{ASC} < \text{ASB}.$$

En rapprochant ce théorème de celui qui a été démontré au dernier alinéa du n° 566, et en raisonnant comme au n° 35, on verra que : RÉCIPROQUEMENT, *si un angle trièdre a deux faces égales, les dièdres opposés à ces faces sont égaux, et si un angle trièdre a deux faces inégales, à la plus grande face est opposé le plus grand dièdre.*

SCOLIE.

569. *Si, par le sommet* S *d'un angle trièdre* SABC, *on mène une droite* SO *à volonté dans l'intérieur de ce trièdre, la somme des angles* OSB, OSC *est moindre que la somme des faces* ASB, ASC.

Si les deux faces d'un angle trièdre sont respectivement égales à deux faces d'un autre angle trièdre, et si l'angle dièdre compris entre les premières est plus grand que l'angle dièdre compris entre les deux autres, la troisième face du premier trièdre est plus grande que la troisième face du second.

Cette dernière proposition est l'analogue de celle du n° 40. Elle se démontre de la même manière. Il est inutile de faire de nouvelles figures; il suffit de regarder la *fig.* 34 comme la section

plane des trièdres que l'on considère, les sommets de ces trièdres étant supposés en avant, par exemple, du plan des sections.

THÉORÈME.

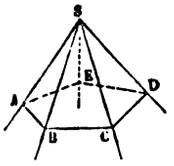
570. *Dans tout angle polyèdre convexe, la somme des faces est moindre que quatre angles droits* (*fig.* 322).

En effet, soit ABCDE un polygone *convexe* obtenu en coupant l'angle polyèdre par un plan qui rencontre toutes les arêtes (565). En ajoutant les inégalités

$$\begin{aligned} EAB &< EAS + BAS, \\ ABC &< ABS + CBS, \\ BCD &< BCS + DSC, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

que fournissent les trièdres A, B, C,... (567), on voit que la somme des angles intérieurs du polygone ABCDE est moindre que la somme des angles à la base des triangles SAB, SBC, SCD,..., qui ont S pour sommet. Or, la somme des angles tant intérieurs qu'extérieurs du polygone convexe ABCDE est égale à la somme de tous les angles des triangles dont S est le sommet commun. Donc, la somme des angles en S de ces triangles, c'est-à-dire la somme des faces de l'angle polyèdre, est moindre que la somme des angles extérieurs du polygone, c'est-à-dire moindre que quatre angles droits.

Fig. 322.

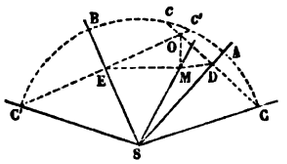


Scolie.

571. Il résulte des deux théorèmes précédents (567, 570) que, pour qu'on puisse former un angle trièdre avec trois faces données, *il faut* que la plus grande face soit inférieure à la somme des deux autres, et que la somme des trois faces soit moindre que quatre angles droits. Nous allons prouver que ces deux conditions sont *suffisantes*.

Soient (*fig.* 323) ASB la plus grande face, et ASC, BSC', les deux autres faces rabattues dans le plan de la première, de part et d'autre de celle-ci;

Fig. 323.



SC et SC' sont les deux droites provenant du dédoublement de la troisième arête.

Décrivons du point S comme centre un arc de cercle CC' de rayon arbitraire ; cet arc sera moindre qu'une circonférence, puisque la somme des trois faces données est inférieure à quatre angles droits. Cc et C'c' étant les cordes menées des points C et C' perpendiculairement aux arêtes SA et SB, les arcs AC et Ac sont égaux entre eux, ainsi que les arcs BC' et Bc'; et comme chacun de ces arcs est moindre que AB, les points c et c' tombent entre A et B. De plus, l'inégalité

$$\text{arc AB} < \text{arc AC} + \text{arc BC'}$$

ou

$$\text{arc AB} < \text{arc A}c + \text{arc B}c',$$

qui exprime que la plus grande face ASB est inférieure à la somme des deux autres, montre que le point c tombe entre B et c'. Il suit de là que les points C et c sont de part et d'autre de la corde C'c'; cette corde coupe donc la corde Cc en un point O situé à l'intérieur du cercle.

Élevons au point O la perpendiculaire OM au plan ASB et, dans le plan DOM, décrivons du point D comme centre, avec un rayon égal à DC, un arc de cercle qui coupera nécessairement la perpendiculaire OM, puisque OD est moindre que DC. M étant le point d'intersection, menons SM : le trièdre SABM sera formé avec les trois faces données. En effet, si l'on tire MD et ME, ces droites seront respectivement perpendiculaires sur SA et sur SB, en vertu du théorème des trois perpendiculaires ; dès lors les deux triangles SDM, SDC sont égaux comme ayant un angle droit compris entre deux côtés égaux chacun à chacun : on en conclut d'abord que la face ASM est égale à la face donnée ASC, et que l'arête SM est égale à SC. Les deux triangles rectangles SME, SC'E ont donc l'hypoténuse égale et un côté commun, et leur égalité prouve que la face MSB est égale à l'autre face donnée BSC'.

THÉORÈME.

572. *Si un angle trièdre* S A′ B′ C′ *est le trièdre supplémentaire d'un angle trièdre donné* SABC, *réciproquement* SABC *sera le trièdre supplémentaire de* S A′ B′ C′.

Pour bien comprendre la définition du trièdre supplémentaire et l'objet du présent théorème, il convient de faire une remarque. Par un point O d'un plan P, menons une perpendiculaire OM à ce plan et une oblique ON. Si les deux droites OM et ON *sont d'un même côté du plan* P, l'angle MON qu'elles forment est *aigu* (*fig.* 324), car il est compris dans l'un des angles droits MOT ou MOT′ que fait la perpendiculaire OM avec la trace TOT′ du plan MON sur le plan P. Si les deux droites OM et ON sont *situées de part et d'autre* du plan P,

Fig. 324.

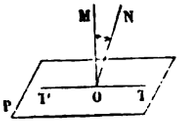


Fig. 325.

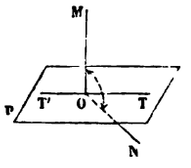
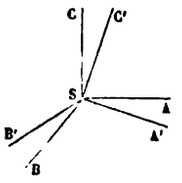


Fig. 326.



l'angle MON est *obtus* (*fig.* 325), car il contient l'un des angles MOT ou MOT′. Donc, réciproquement, suivant que l'angle MON est aigu ou obtus, on peut affirmer que la perpendiculaire OM et l'oblique ON sont d'un même côté du plan P ou de part et d'autre de ce plan.

Cela posé, on nomme trièdre supplémentaire d'un trièdre SABC (*fig.* 326) un nouveau trièdre S A′ B′ C′ formé de la manière suivante :

Par le sommet S, on élève une perpendiculaire SC′ à la face ASB, du même côté que SC par rapport au plan de cette face; on mène SB′ perpendiculaire à la face ASC, du même côté que SB par rapport au plan ASC, et l'on trace enfin SA′ perpendiculaire à la face BSC, du même côté que SA par rapport au plan BSC.

Il s'agit maintenant de démontrer que le trièdre SABC ré-

suite du trièdre SA'B'C', comme celui-ci du premier; ou, en d'autres termes, que l'arête SC, par exemple, est perpendiculaire à la face A'SB' et du même côté que SC' par rapport au plan de cette face. Or, par hypothèse, SA' est perpendiculaire au plan CBS et par suite à SC; de même, SB' est perpendiculaire à SC; donc SC est perpendiculaire au plan A'SB'. De plus, SC' ayant été menée perpendiculairement au plan ASB et du côté de SC, l'angle CSC' est aigu; par suite, la perpendiculaire SC au plan A'SB' et l'oblique SC' formant un angle aigu, ces deux droites sont situées d'un même côté par rapport à ce plan A'SB'.

THÉORÈME.

573. *Si* SABC *et* SA'B'C' *sont deux trièdres supplémentaires, chaque angle dièdre de l'un de ces trièdres est le supplément de la face opposée duns l'autre* (*fig.* 327).

La démonstration est fondée sur la remarque suivante :

Lorsque, par un point O *pris sur l'arête d'un angle dièdre* OI, *on élève sur la face* IOA *une perpendiculaire* OA' *du même côté du plan* IOA *que la face* IOB, *et sur la face* IOB *une perpendiculaire* OB' *du même côté du plan* IOB *que la face* IOA, *l'angle* A'OB' *est le supplément de l'angle plan* AOB *qui mesure le dièdre* (*fig.* 328, 329).

Fig. 327.

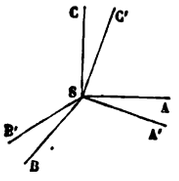


Fig. 328.

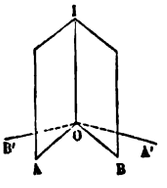
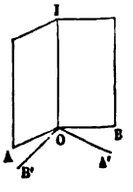


Fig. 329.



Les quatre droites OA, OB, OA', OB', sont dans le plan perpendiculaire à OI mené par O; d'ailleurs, OA' perpendiculaire au plan IOA doit être perpendiculaire à OA, et de même OB' doit être perpendiculaire sur OB; les angles AOB, A'OB' sont donc deux angles situés dans un même plan et ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun; pour prouver qu'ils

sont supplémentaires, il suffit de prouver qu'ils sont toujours d'espèce différente, c'est-à-dire l'un aigu, l'autre obtus. Or, cela résulte de la direction que l'énoncé impose aux perpendiculaires OA′ et OB′. En effet, si l'angle AOB est aigu (*fig.* 328), l'angle A′OB′ renferme l'angle droit AOA′ et, par suite, est obtus; si l'angle AOB est obtus (*fig.* 329), l'angle A′OB′ est contenu dans l'angle droit AOA′ et, par suite, est aigu.

Cela posé, revenons aux trièdres supplémentaires SABC, SA′B′C′ (*fig.* 327), et considérons, par exemple, le dièdre SC. La droite SB′ est une perpendiculaire à la face CSA de ce dièdre du côté de SB, et par suite du côté de l'autre face CSB; de même, SA′ est une perpendiculaire à la face CSB du dièdre, du côté de la face CSA; donc, l'angle A′SB′ est le supplément de l'angle qui mesure le dièdre SC ou, plus brièvement, le supplément du dièdre SC. On procéderait de même pour les dièdres SA et SB.

Puisque les deux trièdres SABC, SA′B′C′ se déduisent l'un de l'autre par la même construction, il est clair que la propriété qui vient d'être établie pour les dièdres du premier s'étend aux dièdres du second. D'ailleurs, la démonstration serait la même.

C'est en raison de cette double propriété que les deux trièdres ont été appelés *supplémentaires*.

Scolie.

574. Désignons par a, b, c les nombres qui mesurent les faces, et par A, B, C les nombres qui mesurent les angles dièdres d'un angle trièdre, l'angle droit étant pris pour unité d'angle. Les nombres a', b', c', qui mesureront les faces, et ceux A′, B′, C′ qui mesureront les angles dièdres du trièdre supplémentaire, seront donnés par les formules

$$a' = 2 - A, \quad A' = 2 - a,$$
$$b' = 2 - B, \quad B' = 2 - b,$$
$$c' = 2 - C, \quad C' = 2 - c.$$

Si l'on connaît une propriété quelconque d'un angle trièdre, c'est-à-dire une relation entre les éléments a, b, c, A, B, C de cette figure, en appliquant cette relation aux éléments a', b', c', A′, B′, C′ du trièdre supplémentaire, puis en remplaçant ces éléments par leurs valeurs tirées des

formules précédentes, on aura une relation nouvelle entre a, b, c, A, B, C, c'est-à-dire une nouvelle propriété du trièdre primitif.

De même, toute propriété relative à plusieurs trièdres *conduira*, par la considération des trièdres supplémentaires des proposés, à une propriété nouvelle de ce système de trièdres.

On conçoit par là l'importance du théorème précédent. Voici d'ailleurs quelques applications de la méthode générale que nous venons d'indiquer.

575. Nous avons vu (570) que la somme des faces d'un trièdre était toujours comprise entre zéro et quatre angles droits. Cherchons le théorème correspondant, ou, comme on dit, le théorème *corrélatif*. Considérons à cet effet le trièdre supplémentaire du proposé ; a', b', c' étant ses faces, on a

$$0 < a' + b' + c' < 4.$$

Par suite, A, B, C étant les dièdres du trièdre proposé, on a

$$0 < (2 - A) + (2 - B) + (2 - C) < 4,$$

ou

$$6 > A + B + C > 2.$$

Ainsi, la proposition demandée est la suivante : *Dans tout trièdre, la somme des angles dièdres est comprise entre deux droits et six droits.*

Nous avons vu encore (567) que, dans tout trièdre, la plus grande face est moindre que la somme des deux autres : quel est le théorème corrélatif?

Soient a', b', c' les faces du trièdre supplémentaire du trièdre considéré. a' étant la plus grande, on a

$$a' < b' + c' ;$$

par suite, si A, B, C sont les dièdres du trièdre proposé, on aura

$$2 - A < (2 - B) + (2 - C), \quad \text{ou} \quad A + 2 > B + C.$$

D'ailleurs, le supplément d'un angle diminuant quand cet angle augmente, A doit être le plus petit des dièdres A, B, C, puisque a' est la plus grande des faces a', b', c'. Donc, enfin, la proposition demandée est la suivante : *Dans tout trièdre, le plus petit angle dièdre, augmenté de deux droits, est plus grand que la somme des deux autres dièdres.*

576. En résumé, pour qu'on puisse former un angle trièdre avec trois dièdres donnés A, B, C, *il faut* que leur somme soit comprise entre deux droits et six droits, et que le plus petit augmenté de deux droits soit supérieur à la somme des deux autres.

Ces conditions sont *suffisantes;* car, quand elles sont remplies, les suppléments a', b', c' des angles donnés A, B, C satisfont aux deux conditions du n° 571. On peut donc, avec les trois faces a', b', c', construire un trièdre; par suite, en construisant le trièdre supplémentaire de celui-là, on aura un trièdre dont les dièdres seront les angles donnés A, B, C.

THÉORÈME.

577. *Deux angles trièdres sont égaux :*

1° *Lorsqu'ils ont une face égale adjacente à deux angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés;*

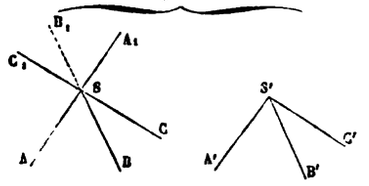
2° *Lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées;*

3° *Lorsqu'ils ont leurs faces égales chacune à chacune et semblablement disposées;*

4° *Lorsqu'ils ont leurs angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

1° Soient les deux trièdres SABC et S'A'B'C' (*fig.* 33o). Par hypothèse, la face ASB est égale à la face A'S'B', les angles

Fig. 33o.



dièdres SA et S'A' sont égaux entre eux, ainsi que les dièdres SB et S'B'. On suppose en outre que la disposition est la même, c'est-à-dire que, si un observateur dont la tête est en S, le dos appuyé sur la face ASB et le regard dirigé vers SC, a l'arête SA à sa gauche et l'arête SB à sa droite, un autre observateur, dont la tête serait en S', le dos appuyé sur la face A'S'B' et le regard dirigé vers S'C', aurait l'arête S'A' à sa gauche et l'arête S'B' à sa droite.

Dans ces conditions, les deux trièdres sont égaux, c'est-à-dire superposables. En effet, si l'on place la face A'S'B' sur son égale ASB, de façon que S'A' coïncide avec SA et S'B' avec SB,

l'arête S'C' tombe, par rapport au plan ASB, du même côté que SC, sans quoi la disposition des éléments serait différente dans les deux trièdres. Alors, les dièdres SA et S'A' étant égaux, le plan A'S'C' s'applique sur le plan ASC; de même, les dièdres SB et S'B' étant égaux, le plan B'S'C' s'applique sur le plan BSC; donc, enfin, les arêtes S'C' et SC se confondent et les deux trièdres coïncident.

2° Le deuxième cas résulte du précédent, dont il est le *corrélatif* (575). En effet, les deux trièdres supplémentaires des proposés ont une face égale adjacente à deux dièdres respectivement égaux et semblablement disposés; ils sont donc superposables et, par suite, il en est de même des trièdres primitifs.

D'ailleurs, la démonstration directe n'offre aucune difficulté; on voit, par un raisonnement analogue au précédent (1°), que la superposition est possible, si, conformément à l'hypothèse, la disposition des éléments est la même.

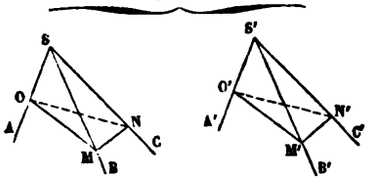
3° Pour le troisième cas, on pourrait prouver par l'absurde que le dièdre SB, par exemple, est égal au dièdre S'B', en s'appuyant sur le second théorème énoncé au n° 569.

Voici d'ailleurs une démonstration directe :

Soient SABC et S'A'B'C' les deux trièdres; il suffit évidemment de démontrer l'égalité de deux dièdres homologues, des dièdres SA et S'A', par exemple.

Supposons d'abord que les deux faces ASB, ASC, qui comprennent le dièdre SA, soient deux angles aigus. En un point quelconque O de l'arête SA, formons (*fig.* 331) l'angle plan

Fig. 331.

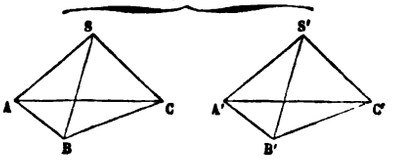


correspondant à l'angle dièdre SA; en d'autres termes, élevons par le point O des perpendiculaires sur SA dans les plans ASB

et ASC; les angles ASB et ASC étant aigus, ces perpendiculaires rencontrent les arêtes SB et SC en deux points M et N que nous joindrons par une ligne droite. Prenons S'O' = SO et construisons de même en O' l'angle plan M'O'N' du dièdre S' A'. Il s'agit de démontrer l'égalité des deux angles plans MON et M'O'N'. Or les deux triangles rectangles SOM, S'O'M' sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux : il en est de même des triangles SON et S'O'N'; par suite, les deux triangles SMN, S'M'N' ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, et enfin les deux triangles OMN, O'M'N' ont les trois côtés égaux chacun à chacun. L'égalité de ces derniers triangles entraîne celle des deux angles MON, M'O'N'.

Supposons en second lieu que les deux angles ASB et ASC, qui comprennent le dièdre SA, soient quelconques, et prenons six longueurs égales SA = SB = SC = S'A' = S'B' = S'C', à partir des sommets, sur les arêtes des deux trièdres (*fig.* 332).

Fig. 332.



Les triangles isocèles ASB et A'S'B', BSC et B'S'C', CSA et C'S'A' sont égaux deux à deux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux; par suite, les triangles ABC, A'B'C' sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. D'après cela, les deux trièdres A et A' ont leurs faces respectivement égales; d'ailleurs, les angles SAB, SAC, qui comprennent le dièdre AS, sont aigus comme angles à la base de triangles isocèles; donc, en vertu du raisonnement fait dans l'alinéa précédent, le dièdre AS est égal au dièdre A'S'.

4° Le dernier cas résulte du précédent dont il est le *corrélatif*. En effet, les deux trièdres supplémentaires des proposés ont leurs faces respectivement égales et semblablement disposées; ils sont donc superposables, et, par suite, il en est de même des trièdres primitifs.

Scolie.

578. Si, dans chacun des quatre cas examinés, la disposition des éléments égaux était différente dans les deux trièdres, il n'y aurait plus *égalité*, mais seulement *symétrie*. En effet, soient T et T′ les deux trièdres proposés, et T_1 le symétrique de T, c'est-à-dire celui que l'on déduit de T en prolongeant ses arêtes au delà du sommet (*fig.* 330). Les trièdres T et T_1 ont leurs éléments égaux et inversement disposés; par suite, comme T et T′ remplissent par hypothèse toutes les conditions de l'un des cas d'égalité, sauf celle relative à la disposition des parties égales, les trièdres T′ et T_1 satisferont à toutes les conditions de ce cas d'égalité : ils seront donc superposables; d'où l'on voit que T′ est alors superposable au symétrique de T.

579. Nous avons suffisamment signalé dans le courant de ce paragraphe l'analogie entre certaines propriétés des trièdres et des triangles rectilignes. Il importe toutefois d'observer en terminant que, si, à toute propriété des triangles répond une propriété des trièdres, la réciproque n'est pas vraie; par exemple, tandis que l'égalité des angles dièdres de deux trièdres entraîne l'égalité de leurs faces, l'égalité des angles de deux triangles n'entraîne que la proportionnalité des côtés.

§ VIII. — APPENDICE.

QUADRILATÈRE GAUCHE.

580. On dit qu'un quadrilatère ABCD (*fig.* 333) est *gauche* lorsque ses quatre côtés ne sont pas dans un même plan. Pour obtenir une pareille figure, il suffit d'assembler deux triangles ABC, ADC, ayant un côté commun AC, de façon que leurs plans ne coïncident pas.

THÉORÈME.

581. *Quand un plan* P *rencontre les quatre côtés d'un quadrilatère gauche* ABCD *en quatre points a, b, c, d* (*fig.* 333), *on a la relation segmentaire*

$$(1) \qquad \frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA} = +1.$$

En effet, en appliquant le théorème de Ménélaüs (310) aux deux triangles ABC et ADC coupés respectivement par les deux transversales *ab*

Fig. 333.

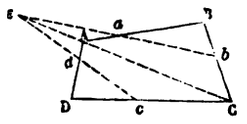
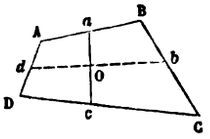


Fig. 334.



et *cd*, et remarquant que les deux droites *ab* et *cd* se rencontrent au point ε où la diagonale AC perce le plan P, on a les égalités

$$\frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{\varepsilon C}{\varepsilon A}=1,\quad \frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA}\cdot\frac{\varepsilon A}{\varepsilon C}=1,$$

dont le produit est précisément la relation (1).

582. Réciproquement, *si sur les quatre côtés d'un quadrilatère gauche* ABCD, *on prend quatre points a, b, c, d, tels qu'on ait la relation* (1), *ces quatre points sont dans un même plan* (*fig.* 334).

Car le plan P, déterminé par les trois points *b*, *c*, *d*, rencontre le côté AB en un point *a'*, tel qu'on ait (581)

$$\frac{a'A}{a'B}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA}=1.$$

La comparaison de cette relation avec la relation (1), qui a lieu par hypothèse, donne

$$\frac{aA}{aB}=\frac{a'A}{a'B};$$

et cette proportion entraîne (303) la coïncidence des points *a'* et *a*.

Corollaires.

583. La relation (1) est satisfaite lorsqu'on a

$$\frac{aA}{aB}=\frac{cD}{cC}\quad\text{et}\quad\frac{bB}{bC}=\frac{dA}{dD}.$$

De là ce théorème : *Si une première droite ac divise proportionnellement deux côtés opposés* AB *et* DC *d'un quadrilatère gauche* ABCD, *et si une seconde droite bd divise proportionnellement les deux autres côtés* BC *et* AD, *ces deux droites sont dans un même plan* (*fig.* 334).

Dans le cas particulier où le plan transversal P est parallèle aux deux côtés opposés BC et AD, les deux points *b* et *d* passent à l'infini, les

deux rapports $\frac{b\mathrm{B}}{b\mathrm{C}}$ et $\frac{d\mathrm{D}}{d\mathrm{A}}$ se réduisent à l'unité, et la relation (1) devient

$$\frac{a\mathrm{A}}{a\mathrm{B}} \cdot \frac{c\mathrm{C}}{c\mathrm{D}} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{a\mathrm{A}}{a\mathrm{B}} = \frac{c\mathrm{D}}{c\mathrm{C}}.$$

Donc : *Tout plan* P, *parallèle à deux côtés opposés* BC *et* AD *d'un quadrilatère gauche* ABCD, *divise proportionnellement les deux autres côtés*.

La démonstration directe de ce théorème est d'ailleurs très-simple : si, par chacune des droites BC et AD, on imagine un plan parallèle au plan P, on a deux droites AB et CD coupées par trois plans parallèles ; donc (310), etc.

Réciproquement : *Toute droite ac, qui divise proportionnellement deux côtés opposés* AB *et* CD *d'un quadrilatère gauche* ABCD, *est située dans un plan parallèle aux deux autres côtés* AD *et* BC. Car, si l'on imagine le plan mené par c parallèlement aux droites AD et BC, ce plan doit, en vertu du théorème direct, diviser le côté AB en parties proportionnelles à $c\mathrm{C}$ et $c\mathrm{D}$; ce plan contient donc le point a et, par suite, la droite ac.

RAPPORT ANHARMONIQUE DE QUATRE PLANS.

584. Il est aisé de voir que, *lorsque quatre plans* A, B, C, D *passent par une même droite, le rapport anharmonique du faisceau de quatre droites déterminé par un plan transversal quelconque est indépendant de la position de ce plan transversal*. Car les quatre droites a, b, c, d, déterminées par un premier plan P, et les quatre droites a', b', c', d', déterminées par un second plan P', se coupent deux à deux en quatre points α, β, γ, δ, situés sur l'intersection des deux plans P et P', et le rapport anharmonique des points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ est égal (321) à celui des droites a, b, c, d, aussi bien qu'à celui des droites a', b', c', d'.

D'après cela, on donne le nom de *rapport anharmonique d'un faisceau de quatre plans* passant par une même droite à tout rapport anharmonique du faisceau de quatre droites déterminé par un plan transversal quelconque.

585. *Lorsque quatre plans passent par une même droite, toute transversale les rencontre en quatre points dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre plans*. Car ces deux rapports ne sont autres que celui du faisceau de quatre droites déterminé par un plan quelconque contenant la transversale (321, 584).

Un faisceau de quatre plans, A, B, C, D, passant par une même droite, est dit *harmonique* lorsque le rapport anharmonique (A, B, C, D)

de ces quatre plans est égal à — 1. Alors, tout plan transversal ou toute sécante détermine un système harmonique de quatre droites ou de quatre points.

PROJECTION CENTRALE OU PERSPECTIVE.

586. Le théorème du n° 527, relatif à la projection d'une droite sur un plan, subsiste lorsque les projetantes des divers points de la droite sont obliques au plan, pourvu qu'elles soient parallèles entre elles ou qu'elles divergent d'un même point de l'espace; car les projetantes sont encore, dans l'un ou l'autre cas, situées toutes dans le plan de l'une d'elles et de la droite que l'on projette.

On est ainsi conduit à étendre le sens du mot *projection*.

La projection m d'un point M sur un plan P est dite *orthogonale, oblique* ou *centrale,* suivant que la projetante Mm est perpendiculaire au plan P, ou qu'elle est parallèle à une direction fixe oblique à ce plan, ou enfin qu'elle est issue du point fixe S de l'espace.

La projection orthogonale, oblique ou centrale d'une figure est le lieu des projections orthogonales, obliques ou centrales de ses divers points, en supposant, bien entendu, dans les deux derniers cas, que la direction oblique des projetantes, ou que le centre S de projection ne change pas quand on passe d'un point à un autre de la figure que l'on projette.

La *perspective* d'une figure sur un tableau P n'est autre chose que la projection centrale de cette figure sur le plan P, la position de l'œil étant prise pour centre S de projection.

D'après cela, le théorème du n° 583 peut encore être énoncé de la manière suivante :

Lorsque quatre droites concourantes sont situées dans un même plan, si l'on construit leur projection orthogonale, oblique ou centrale, sur un plan quelconque, on obtient quatre droites concourantes dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre premières.

Le théorème du n° 530, relatif aux projections de deux droites parallèles, subsiste, ainsi que la démonstration, pour la projection *oblique;* mais il cesse d'être vrai pour la projection *centrale*. Nous allons, à cette occasion, donner, sur la projection centrale ou perspective, quelques définitions et quelques principes fondamentaux qu'il est indispensable de connaître.

587. On nomme *droite de front* toute droite parallèle au tableau, et *plan de front* tout plan parallèle au tableau.

On appelle *trace d'une droite* D le point t où elle rencontre le tableau P (*fig.* 335), et *trace d'un plan* la droite suivant laquelle ce plan coupe le tableau. Une droite de front n'a pas de trace, ou plutôt sa trace

est à l'infini ; il en est de même d'un plan de front. Quand une droite SF passe par le centre S de projection, sa perspective se réduit à un point f, qui est sa trace. Quand un plan passe par le centre de projection, tous les points de ce plan ont donc leurs perspectives sur la trace du plan.

On nomme *point de fuite d'une droite* D non parallèle au tableau la trace f de la parallèle Sf menée à cette droite par le centre S de projection. Quand un point M s'éloigne de plus en plus sur la droite D, la projetante SM de ce point tend vers la position Sf, et la perspective m du point M tend vers f ; le point de fuite f d'une droite D est donc la perspective du point à l'infini de cette droite.

Lorsque plusieurs droites D, D′, D″, . . . , *non parallèles au tableau, sont parallèles entre elles,* elles ont le même point de fuite ; *leurs perspectives d, d′, d″, . . . concourent* donc en ce point f.

Une droite de front Δ n'a pas de point de fuite, ou plutôt son point de fuite est à l'infini ; elle a *pour perspective une droite* δ *qui lui est parallèle,* car son plan projetant, passant par une droite Δ parallèle au tableau, coupe le tableau suivant une parallèle δ à cette droite. Il résulte de là que, *si plusieurs droites de front sont parallèles, leurs perspectives sont parallèles.*

Fig. 335.

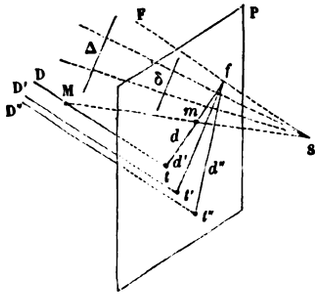
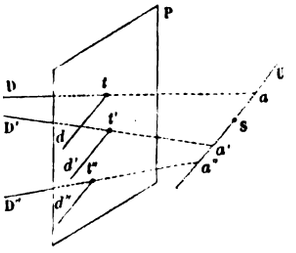


Fig. 336.

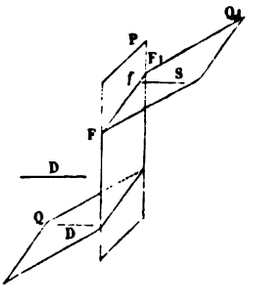


Les droites de front, parallèles entre elles, ne sont pas les seules droites qui aient leurs perspectives parallèles. *Pour que des droites* D, D′, D″, . . . (*fig.* 336) *aient leurs perspectives d, d′, d″, . . . parallèles entre elles, il faut et il suffit qu'elles rencontrent une même droite de front* SU *passant par le centre* S *de projection.* En effet, la condition est nécessaire : car, si les traces d, d', d'', . . . des plans projetants Std, S$t'd'$, S$t''d''$ sont parallèles, ces plans se coupent suivant une droite SU parallèle (500) à d, d', d'', . . . , c'est-à-dire suivant une droite de front qui rencontre chacune des droites D, D′, D″, ... La condition est suffisante ; car, si elle est remplie, les plans projetants SaD, Sa'D′, Sa''D″, . . . ,

passant tous par une même droite de front SU, auront leurs traces d, d', d'', ... parallèles à cette droite (495). On retombe sur le même résultat que celui obtenu dans le cas très particulier signalé d'abord, lorsque les droites D, D', D'', ... rencontrent à l'infini la droite de front SU.

588. On appelle *ligne de fuite* d'un plan Q, non parallèle au tableau P, la trace FF_1 du plan Q_1, mené par le centre S de projection parallèlement au plan Q (*fig.* 337). Plusieurs plans parallèles ont donc la même ligne de fuite.

Fig. 337.



Quand une droite D *est parallèle à un plan* Q *ou située dans ce plan, son point de fuite f est sur la ligne de fuite* FF_1 *du plan;* car la parallèle S*f* à D, menée par S, est contenue dans le plan Q_1 (497).

Les points à l'infini de toutes les droites du plan Q ont, d'après cela, leurs perspectives sur la ligne de fuite FF_1 de ce plan et, comme la perspective d'une ligne plane, dont le plan ne contient pas le centre S de projection, n'est une droite qu'autant que cette ligne est droite elle-même, on voit qu'*on est conduit à considérer tous les points à l'infini d'un plan* Q *comme étant en ligne droite.* On nomme cette droite la *droite de l'infini du plan* Q.

LIVRE VI.

LES POLYÈDRES.

§ I. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES ET AIRE LATÉRALE DU PRISME.

DÉFINITIONS.

589. On appelle *polyèdre* tout corps terminé de toutes parts par des plans.

Ces plans, en se limitant mutuellement, déterminent les *arêtes*, les *faces* et les *sommets* du polyèdre. Les angles dièdres et polyèdres formés par les faces sont les angles dièdres et polyèdres de la figure. Le polyèdre a pour *diagonales* les droites qui unissent deux sommets quelconques non situés sur une même face.

On a donné des noms particuliers à certains polyèdres d'après le nombre de leurs faces : ainsi, tout polyèdre ayant quatre faces est un *tétraèdre*. Les noms *hexaèdre*, *octaèdre*, *dodécaèdre*, *icosaèdre* correspondent aux polyèdres de six, huit, douze, vingt faces.

590. Un polyèdre est *convexe*, lorsqu'il reste tout entier d'un même côté de chacune de ses faces prolongées indéfiniment.

Une droite quelconque ne peut rencontrer la surface d'un polyèdre convexe en plus de deux points. Car tout plan mené suivant cette droite rencontre nécessairement la surface du polyèdre suivant un polygone convexe (26), dont le contour a, avec la droite donnée, les mêmes points d'intersection que la surface du polyèdre.

Dans ce qui suit, il n'est question que de polyèdres convexes.

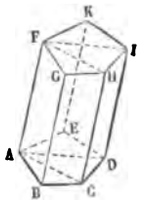
591. Parmi les polyèdres, on distingue le *prisme* et la *pyramide*.

Le *prisme* est un polyèdre compris sous plusieurs plans parallélogrammes réunis entre eux par deux faces opposées égales et parallèles.

On construit un prisme de la manière suivante :

Soit (*fig.* 338) ABCDE un polygone plan quelconque. Par le sommet A, menons extérieurement au plan de ce polygone la

Fig. 338.



droite AF et, par le point F, un plan parallèle au plan ABCDE; puis, par les sommets B, C, D, E, traçons jusqu'à la rencontre du plan mené par le point F les droites BG, CH, DI, EK, parallèles à AF. Ces droites sont toutes égales à AF (509); toutes les faces ABGF, BCHG, CDIH, etc., sont donc des parallélogrammes. De plus, les deux polygones parallèles ABCDE, FGHIK sont égaux comme ayant leurs côtés égaux et parallèles. Le polyèdre obtenu est donc un prisme.

592. Si la droite AF est perpendiculaire au plan ABCDE, le prisme est *droit;* sinon, il est *oblique*.

Les droites AF, BG, CH, ... sont les *arêtes latérales* du prisme, et la somme des faces parallélogrammes ABGF, BCHG, ... forme son *aire latérale*.

Le prisme a pour *bases* les deux polygones égaux et parallèles ABCDE, FGHIK, et sa *hauteur* est la distance des plans de ses deux bases.

593. Dans un prisme droit, chaque arête latérale est égale à la hauteur. Les faces latérales d'un prisme droit sont des rectangles.

Dans un prisme oblique, la hauteur est moindre que l'arête latérale.

Un prisme *régulier* est un prisme droit qui a pour bases des polygones réguliers.

594. Suivant que les bases d'un prisme sont des triangles, des quadrilatères, des pentagones, des hexagones, etc., le prisme est dit *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, *hexagonal*, *etc.*

595. Parmi les prismes quadrangulaires, on distingue celui qui a pour bases des parallélogrammes, et on lui donne le nom de *parallélipipède*. Toutes les faces d'un parallélipipède sont des parallélogrammes (*fig.* 339).

Un parallélipipède peut être *droit* ou *oblique* (592).

Parmi les parallélipipèdes droits, on distingue le *parallélipipède rectangle*, dont les bases sont des rectangles. Toutes les faces d'un parallélipipède rectangle sont des rectangles (*fig.* 340).

On nomme *cube* le parallélipipède rectangle dont les bases et les faces latérales sont des carrés, nécessairement égaux (*fig.* 341).

On remarquera que la perspective déformant les angles, la *fig.* 340. représente aussi bien un parallélipipède droit qu'un parallélipipède rectangle.

Fig. 339.

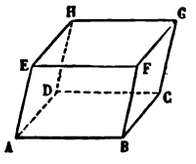


Fig. 340.

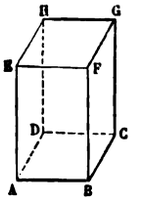
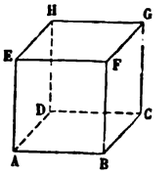


Fig. 341.



596. De même qu'on appelle dimensions d'un rectangle les longueurs de deux côtés adjacents, on appelle *dimensions* d'un parallélipipède rectangle les longueurs de trois arêtes contiguës, c'est-à-dire partant d'un même sommet. Le parallélipi-

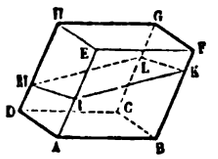
pède rectangle AG (*fig.* 340) a pour dimensions les longueurs des arêtes AB, AD, AE.

THÉORÈME.

597. *Les faces opposées d'un parallélipipède sont égales et parallèles.*

Soit (*fig.* 342) le parallélipipède AG. Ses bases ABCD, EFGH sont, par définition, des parallélogrammes égaux et parallèles.

Fig. 342.



Il faut donc prouver seulement que deux faces latérales opposées, ADHE et BCGF par exemple, remplissent la même condition. Or, AD et BC sont égaux et parallèles comme côtés opposés du parallélogramme ABCD; AE et BF sont aussi égaux et parallèles comme côtés opposés du parallélogramme ABFE. Par suite, les deux angles DAE et CBF sont égaux et leurs plans sont parallèles. Les deux parallélogrammes ADHE, BCGF sont donc égaux et parallèles.

COROLLAIRES.

598. Le parallélipipède étant un prisme compris sous six faces parallélogrammes dont les opposées sont égales et parallèles, *on peut prendre pour bases d'un parallélipipède deux faces opposées quelconques* (591).

599. *Tout plan qui rencontre deux faces opposées d'un parallélipipède le coupe suivant un parallélogramme.* Soit le plan IKLM (*fig.* 342) qui rencontre les deux faces opposées ADHE et BCGF du parallélipipède AG. Les côtés opposés de la section IKLM étant parallèles comme intersections de deux plans parallèles coupés par un troisième, cette section est un parallélogramme.

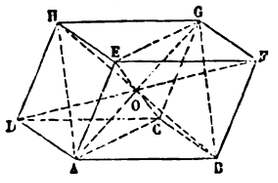
Scolie.

600. Pour construire un parallélipipède sur trois droites données AB, AD, AE, partant d'un même point A et non situées dans un même plan (*fig.* 342), il suffit de mener par l'extrémité non commune de chacune de ces droites un plan parallèle au plan des deux autres. Ainsi, par le point E, on conduira un plan parallèle au plan BAD, par le point D un plan parallèle au plan BAE, par le point B un plan parallèle au plan DAE. Le polyèdre compris sous les six plans considérés sera un parallélipipède.

THÉORÈME.

601. *Dans un parallélipipède, les quatre diagonales se coupent mutuellement en parties égales.*

Fig. 343.



Soient (*fig.* 343) le parallélipipède AG et ses quatre diagonales AG, CE, BH, DF. Les deux côtés AE et CG étant égaux et parallèles, la figure ACGE est un parallélogramme dont les diagonales AG et CE se coupent mutuellement au point O en parties égales. La figure ABGH étant aussi un parallélogramme, les diagonales AG et BH se coupent mutuellement en parties égales, c'est-à-dire au point O milieu de AG. On prouverait de même que la quatrième diagonale DF passe au point O et y est divisée en parties égales.

Scolies.

602. On appelle *centre* d'un parallélipipède le point de rencontre de ses quatre diagonales.

Toute droite KL passant par le point O et limitée à la surface du parallélipipède AG (*fig.* 343) est divisée au point O en deux parties égales. En effet, le plan déterminé par cette

droite et la diagonale AG coupe les deux faces opposées ADHE et BCGF suivant les parallèles AK et GL; les deux triangles AOK, GOL sont donc égaux.

603. Si le parallélipipède proposé est rectangle, tous les parallélogrammes de la figure deviennent des rectangles. Le parallélogramme ABGH, par exemple, est alors un rectangle, parce que l'arête AB est perpendiculaire à la face ADHE. Les diagonales d'un rectangle étant égales, *les quatre diagonales d'un parallélipipède rectangle sont égales.*

604. Dans l'hypothèse précédente, les triangles HAB, HDA, étant rectangles, on a

$$\overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2, \quad \overline{AH}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2.$$

Par suite,

$$\overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2.$$

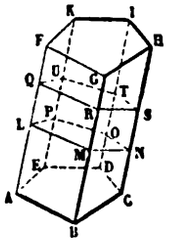
Donc, *le carré de la diagonale d'un parallélipipède rectangle est égal à la somme des carrés de ses trois dimensions.*

Un cube étant un parallélipipède rectangle dont les dimensions sont égales, *le carré de la diagonale d'un cube est égal à trois fois le carré de son arête.*

THÉORÈME.

605. *Les sections faites dans un prisme par deux plans parallèles sont deux polygones égaux.*

Fig. 344.



Soient (*fig.* 344) le prisme AH et les sections LMNOP,

QRSTU, faites par deux plans parallèles. Les côtés de ces sections sont deux à deux parallèles comme intersections de deux plans parallèles coupés par un troisième, et égaux comme parallèles comprises entre parallèles. Les deux polygones obtenus ont donc à la fois leurs angles égaux et leurs côtés égaux.

COROLLAIRES.

606. Lorsque le plan sécant est parallèle à la base du prisme, la section obtenue est égale à cette base.

En supposant les arêtes latérales du prisme prolongées au delà des bases, la démonstration précédente s'applique, que les sections soient intérieures ou extérieures au prisme, et même lorsqu'elles sont en partie intérieures et en partie extérieures. Il suffit que les plans sécants rencontrent toutes les arêtes latérales.

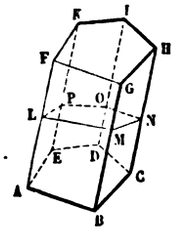
SCOLIE.

607. On appelle *section droite* d'un prisme la section déterminée dans ce prisme par un plan perpendiculaire à ses arêtes latérales.

THÉORÈME.

608. *L'aire latérale d'un prisme a pour mesure le produit du périmètre de sa section droite par son arête latérale.*

Fig. 345.



Soient (*fig.* 345) le prisme AH et sa section droite LMNOP. Les côtés de cette section droite sont les hauteurs des parallélogrammes qui forment l'aire latérale du prisme, et ces pa-

rallélogrammes ont pour bases égales les arêtes latérales du polyèdre. La somme de leurs mesures sera donc

$$\begin{aligned} &AF.LM + BG.MN + \ldots + KE.PL \\ &= AF\,(LM + MN \ldots + PL). \end{aligned}$$

COROLLAIRE.

609. Si le prisme est droit, sa section droite est égale à sa base et son arête latérale à sa hauteur (606, 593). *L'aire latérale d'un prisme droit a* donc *pour mesure le produit du périmètre de sa base par sa hauteur.*

SCOLIE.

610. En ajoutant à l'aire latérale d'un prisme deux fois l'aire de sa base, on obtient son aire totale.

§ II. — VOLUME DU PRISME.

DÉFINITIONS.

611. On appelle *volume* d'un polyèdre l'étendue du lieu qu'il occupe dans l'espace indéfini.

Quand deux polyèdres peuvent coïncider, ils sont *égaux*. Quand deux polyèdres ont des volumes égaux sans pouvoir coïncider, on dit qu'ils sont *équivalents*.

Pour démontrer que deux polyèdres convexes coïncident, il suffit de prouver qu'ils ont les mêmes sommets.

612. Si l'on détache une portion d'un prisme par un plan incliné à sa base, le polyèdre restant est un *prisme tronqué*. La section obtenue est la base supérieure du tronc de prisme.

THÉORÈME.

613. *Deux prismes droits de même base et de même hauteur sont égaux.*

Car, si l'on fait coïncider les bases inférieures de ces prismes, leurs arêtes latérales prendront deux à deux la même direc-

tion (518), et comme elles sont égales à la hauteur donnée, les bases supérieures des deux prismes coïncideront aussi.

Scolie.

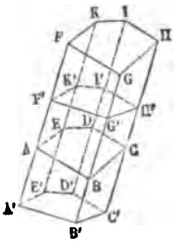
614. La démonstration précédente s'applique au cas de deux prismes droits tronqués de même base, lorsque leurs arêtes latérales sont égales deux à deux.

THÉORÈME.

615. *Tout prisme oblique est équivalent au prisme droit ayant pour base la section droite du prisme oblique et pour hauteur son arête latérale.*

Soit (*fig.* 346) le prisme oblique ABCDEFGHIK ou AH. Par un point G′ de l'arête BG, menons la section droite F′G′H′I′K′.

Fig. 346.



Prolongeons l'arête BG au-dessous de la base ABCDE d'une longueur BB′ = GG′, et par le point B′ menons un plan parallèle au plan de la section droite. Les intersections de ce plan avec les arêtes latérales du prisme prolongées détermineront un polygone A′B′C′D′E′ égal (606) au polygone F′G′H′I′K′. La figure A′B′C′D′E′F′G′H′I′K′ ou A′H′ sera donc un prisme droit ayant pour base la section droite du prisme oblique AH et pour hauteur son arête latérale BG; car on a B′G′ = BG, puisque, par construction, BB′ = GG′.

Ceci posé, le volume compris entre la base inférieure du prisme oblique AH et la base supérieure du prisme droit A′H′ est commun aux deux prismes. Pour démontrer l'équivalence de ces deux prismes, il suffit donc de démontrer l'égalité des deux

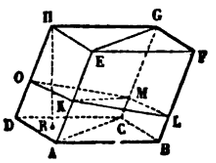
polyèdres ou prismes droits tronqués (612) A'B'C'D'E' ABCDE ou A'C et F'G'H'I'K'FGHIK ou F'H. Cette égalité résulte immédiatement de la remarque faite au n° 614; car les deux bases A'B'C'D'E', F'G'H'I'K' sont égales, ainsi que les arêtes correspondantes A'A et F'F, B'B et G'G, etc. A'A, par exemple, est l'arête latérale ou la hauteur du prisme droit A'H', diminuée de AF', et F'F est l'arête latérale du prisme oblique AH, diminuée de la même quantité.

THÉORÈME.

616. ***Le plan mené par deux arêtes latérales opposées d'un parallélipipède le partage en deux prismes triangulaires équivalents.***

Soit (*fig.* 347) le parallélipipède quelconque AG. Le plan AEGC, mené par les arêtes opposées AE et CG, partage ce parallélipipède en deux prismes triangulaires ABCEFG, ACDEGH, dont il s'agit de démontrer l'équivalence.

Fig. 347.



Menons la section droite du parallélipipède AG. Cette section OKLM est un parallélogramme (599); et les deux triangles égaux KLM, KMO, suivant lesquels la diagonale KM la divise, sont respectivement les sections droites des prismes ABCEFG, ACDEGH.

Or, le prisme triangulaire ABCEFG est équivalent au prisme droit ayant pour base KLM et pour hauteur AE (615); de même, le prisme triangulaire ACDEGH est équivalent au prisme droit ayant pour base KMO et pour hauteur AE. Les deux prismes droits énoncés étant égaux (613), les deux prismes triangulaires ABCEFG, ACDEGH sont équivalents, et chacun d'eux est la moitié du parallélipipède AG.

Or, dans le système d'unités adopté, le premier membre de cette relation est égal au nombre qui mesure le volume AN et les rapports qui composent le second membre sont respectivement égaux aux nombres qui mesurent la base et la hauteur du parallélipipède rectangle proposé. Donc le nombre qui mesure le volume du parallélipipède rectangle est égal au produit des nombres qui mesurent sa base et sa hauteur. Ainsi, en désignant ces trois nombres par V, B, H, on a la formule

$$V = B.H.$$

On préfère énoncer ce théorème usuel d'une manière plus rapide, quoique incorrecte, en disant : *le volume d'un parallélipipède rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

Scolies.

621. En se reportant au n° 618, le rapport du parallélipipède rectangle AN au cube A'G' peut s'écrire

$$\frac{AN}{A'G'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AD}{A'D'} \cdot \frac{AE}{A'E'}.$$

Les rapports qui composent le second membre étant respectivement égaux aux nombres qui mesurent les arêtes contiguës du parallélipipède rectangle, on voit que le nombre qui mesure le volume d'un parallélipipède rectangle est égal au produit des nombres qui mesurent ses trois dimensions. En d'autres termes, *le volume d'un parallélipipède rectangle est égal au produit de ses trois dimensions.*

Ce second énoncé n'est applicable qu'au parallélipipède rectangle; nous allons prouver, en terminant ce paragraphe, que le premier (620), où entrent explicitement la base et la hauteur du parallélipipède, est applicable à tous les prismes.

622. Le volume d'un cube est égal à la troisième puissance de son arête. De là, le nom de *cube* donné à la troisième puissance d'un nombre.

623. Le volume d'un parrallélipipède rectangle est encore

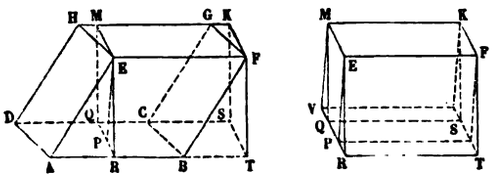
égal au produit de sa base par sa hauteur, lorsqu'on prend pour unité de volume le parallélipipède rectangle ayant pour base l'unité d'aire quelle qu'elle soit et pour hauteur la longueur prise pour unité de hauteur.

THÉORÈME.

624. *Le volume d'un parallélipipède quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Soit (*fig.* 349) le parallélipipède quelconque AG ayant pour base ABCD ou EFGH et pour hauteur la perpendiculaire EP abaissée du sommet E sur le plan ABCD. Menons par le point E, dans le plan EFGH, la perpendiculaire EM à HG. Si

Fig. 349.



l'on prend la face AEHD pour base du parallélipipède proposé (598), son arête latérale sera EF, et sa section droite (607) sera le parallélogramme EMQR déterminé par le plan MEP. Le parallélipipède AG sera donc équivalent au parallélipipède droit RK ayant pour base la section droite EMQR et pour hauteur l'arête EF (615).

Cela posé, reproduisons à part, pour plus de clarté (*fig.* 349) ce parallélipipède droit RK, et construisons un parallélipipède rectangle PK ayant pour dimensions EF, EM, EP. Le parallélipipède droit RK et le parallélipipède rectangle PK ainsi déterminé présentent seulement comme parties non communes les deux prismes droits qui ont pour hauteur EF et pour bases les deux triangles égaux EPR, MVQ. Ces deux prismes étant égaux (613), les deux parallélipipèdes seront équivalents et, par suite, il en sera de même du parallélipipède quelconque AG et du parallélipipède rectangle PK. Donc,

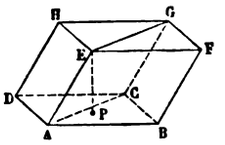
le produit EF.EM.EP, qui exprime la mesure (621) du parallélipipède rectangle PK, mesure aussi le volume du parallélipipède quelconque AG. Or, EF.EM mesure la base EFGH de ce parallélipipède, et EP est sa hauteur.

Donc, enfin, le volume du parallélipipède quelconque AG est égal au produit de sa base par sa hauteur.

THÉORÈME.

625. *Le volume d'un prisme quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Fig. 350.



1° Soit (*fig.* 350) le prisme triangulaire ABCEFG. Par l'extrémité A de l'arête AB, menons le plan ADHE parallèle à la face BCGF, et par l'extrémité C de l'arête BC le plan CDHG parallèle à la face ABFE; prolongeons en même temps les deux bases du prisme jusqu'à la rencontre de ces plans. On obtiendra ainsi (600) le parallélipipède AG construit sur les trois droites BA, BC, BF. La face ACGE du prisme triangulaire considéré étant un plan diagonal du parallélipipède AG, ce prisme en sera la moitié (616). Donc, le volume du parallélipipède AG ayant pour mesure le produit de sa base ABCD par sa hauteur EP (624), le volume du prisme triangulaire ABCEFG aura pour mesure la moitié de ce produit, c'est-à-dire le produit de sa base ABC, moitié du parallélogramme ABCD, par sa hauteur EP.

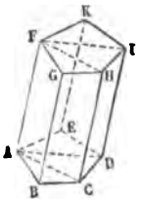
2° Soit (*fig.* 351) un prisme quelconque ABCDEFGHIK. On le décompose en prismes triangulaires en faisant passer des plans diagonaux par l'arête AF et chacune des arêtes CH, DI. Ces prismes triangulaires ont pour bases les triangles ABC, ACD, ADE, qui composent la base du prisme donné, et leur

hauteur commune est celle H du prisme. La somme de leurs mesures (1°)

$$ABC.H + ACD.H + ADE.H,$$

ou la mesure du prisme AI, sera donc égale au produit de sa base ABCDE par sa hauteur H.

Fig. 351.



COROLLAIRES.

626. En désignant par V, B, H les trois nombres qui mesurent respectivement le volume d'un prisme, sa base et sa hauteur, on a la formule générale

$$V = B.H.$$

Donc, *deux prismes de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalents; deux prismes sont entre eux comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur; deux prismes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs; deux prismes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

627. APPLICATION. — *Un bassin a la forme d'un prisme hexagonal régulier de* $0^m,75$ *de hauteur, le côté de la base hexagonale est égal à* 1 *mètre; calculer la capacité du bassin.*

L'aire de la base du prisme considéré étant six fois l'aire du triangle équilatéral de 1 mètre de côté est égale à $\frac{6^{mq}\sqrt{3}}{4}$ (427) ou à $\frac{3^{mq}\sqrt{3}}{2}$. En appliquant la formule $V = B.H$,

on aura donc pour le volume cherché

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2}.0,75 = \frac{9\sqrt{3}}{8} = \frac{9 \times 1,7321}{8} = 1^{mc},946,$$

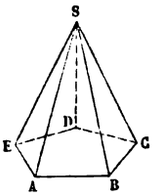
à 1 décimètre cube près.

§ III. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES ET AIRE LATÉRALE DE LA PYRAMIDE.

DÉFINITIONS.

628. La *pyramide* est un polyèdre dont l'une des faces est un polygone quelconque, et dont toutes les autres faces sont des triangles ayant pour bases respectives les différents côtés de la face polygonale et, pour sommet commun, un point extérieur à cette face.

Fig. 352.



Ainsi, soit (*fig.* 352) un polygone ABCDE et un point S pris hors du plan de ce polygone. Le corps limité par la face polygonale ABCDE et par les faces triangulaires SAB, SBC, SCD, SDE, SEA est une pyramide.

629. La pyramide SABCDE a pour *base* le polygone ABCDE et pour *sommet* le point S. Sa *hauteur* est la distance du sommet S à la base ABCDE, c'est-à-dire la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan.

Les droites SA, SB, SC, ... sont les *arêtes latérales* de la pyramide, et la somme des faces triangulaires SAB, SBC, SCD, ... constitue son *aire latérale*.

630. La pyramide est *régulière* lorsque sa base est un polygone régulier dont le centre se confond avec le pied de la hauteur de la pyramide.

Les arêtes latérales d'une pyramide régulière sont nécessairement égales, comme obliques s'écartant également du pied de la hauteur; ses faces latérales sont donc des triangles isocèles tous égaux entre eux. La hauteur d'un de ces triangles est l'*apothème* de la pyramide régulière.

631. Suivant que la base de la pyramide est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, un hexagone, etc., la pyramide est dite *triangulaire, quadrangulaire, pentagonale, hexagonale*, etc.

632. Toute pyramide triangulaire ayant quatre faces, on lui donne souvent aussi le nom de *tétraèdre* (589).

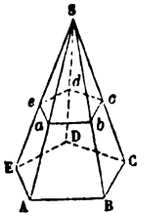
D'après la définition générale de la pyramide, on voit qu'on a le droit de prendre pour base d'un tétraèdre telle face qu'on veut; le sommet du tétraèdre est alors le sommet opposé à la base choisie.

Les tétraèdres sont dans la Géométrie de l'espace ce que les triangles sont dans la Géométrie plane. On fixe la position d'un point sur un plan en le rattachant par un triangle à deux points donnés. On fixe la position d'un point dans l'espace en le rattachant par un tétraèdre à trois points donnés.

633. Si l'on coupe une pyramide par un plan qui rencontre toutes ses faces latérales, le polyèdre compris entre la section obtenue et la base de la pyramide est une *pyramide tronquée* ou un *tronc de pyramide*.

Si le plan sécant est parallèle au plan de la base de la pyramide, le tronc de pyramide est dit *à bases parallèles*.

Fig. 353.



Soit (*fig.* 353) la pyramide SABCDE. Coupons cette pyra-

mide par le plan *abcde* parallèle à la base ABCDE, et compris entre cette base et le sommet S. La section *abcde* et la base ABCDE sont les bases du tronc de pyramide à bases parallèles ABCDE*abcde*. La *hauteur* du tronc est la distance constante des plans de ses deux bases. Les segments A*a*, B*b*, C*c*, ..., sont ses *arêtes latérales*, et son *aire latérale* est la somme des trapèzes AB*ab*, BC*bc*, CD*cd*, ...

634. Si la pyramide considérée est régulière, le tronc de pyramide à bases parallèles qui lui correspond est un tronc de pyramide *régulier*.

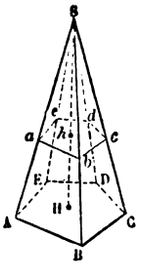
THÉORÈME.

635. *Si une pyramide est coupée par un plan parallèle à sa base :*

1° *Ses arêtes latérales et sa hauteur sont divisées en parties proportionnelles ;*

2° *La section est un polygone semblable à la base de la pyramide.*

Fig. 354.



1° Soit (*fig.* 354) la pyramide SABCDE coupée par le plan *abcde* parallèle à sa base. Ce plan rencontre les arêtes latérales SA, SB, SC, ..., et la hauteur SH de la pyramide aux points *a*, *b*, *c*, ..., *h*. Deux plans parallèles coupant en parties proportionnelles une série de sécantes issues d'un même point (511), on peut écrire immédiatement

$$\frac{Sa}{SA}=\frac{Sb}{SB}=\frac{Sc}{SC}=\ldots=\frac{Sh}{SH}.$$

2° Les polygones ABCDE et *abcde* ont leurs côtés deux à deux parallèles (495) et dirigés dans le même sens. Les angles homologues de ces polygones sont donc égaux (506). De plus, le parallélisme de leurs côtés entraîne la similitude des triangles SAB et S*ab*, SBC et S*bc*, ... Par suite,

$$\frac{ab}{AB}=\frac{Sb}{SB},\quad \frac{Sb}{SB}=\frac{bc}{BC};$$

d'où

$$\frac{ab}{AB}=\frac{bc}{BC}.$$

On prouverait de la même manière qu'on a

$$\frac{bc}{BC}=\frac{cd}{CD}=\frac{de}{DE}=\frac{ea}{EA}.$$

Les polygones ABCDE et *abcde*, ayant leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels, sont semblables.

COROLLAIRE.

636. La similitude des triangles SAB et S*ab* donne

$$\frac{ab}{AB}=\frac{Sa}{SA}$$

ou, d'après ce qui précède,

$$\frac{ab}{AB}=\frac{Sh}{SH}.$$

La similitude des polygones ABCDE et *abcde* donne à son tour

$$\frac{abcde}{ABCDE}=\frac{\overline{ab}^2}{\overline{AB}^2}.$$

On a donc

$$\frac{abcde}{ABCDE}=\frac{\overline{Sh}^2}{\overline{SH}^2},$$

c'est-à-dire que, *dans une pyramide, les sections parallèles à la base et la base elle-même sont proportionnelles aux carrés de leurs distances au sommet de la pyramide.*

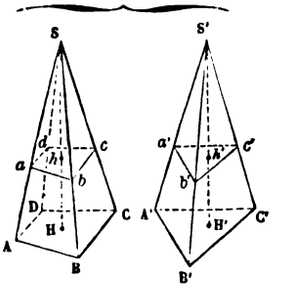
SCOLIE.

637. Si l'on coupe une pyramide régulière par un plan parallèle à la base, la section *abcde*, étant semblable à la base ABCDE, est aussi un polygone régulier. Comme les arêtes latérales d'une pyramide régulière sont égales, il en est de même des arêtes du tronc de pyramide régulier obtenu. Les faces latérales d'un tronc de pyramide régulier sont donc des trapèzes isocèles tous égaux entre eux. La hauteur d'un de ces trapèzes est l'*apothème* du tronc de pyramide.

THÉORÈME.

638. ***Lorsque deux pyramides ont des hauteurs égales, les sections faites dans ces pyramides parallèlement à leurs bases et à la même distance de leurs sommets sont proportionnelles aux bases des deux pyramides.***

Fig. 355.



Soient (*fig.* 355) les deux pyramides SABCD, S'A'B'C', dont les hauteurs SH et S'H' sont égales. Prenons $Sh = S'h'$ et, par les points h et h', menons la section *abcd* parallèle à la base ABCD et la section $a'b'c'$ parallèle à la base A'B'C'. Nous aurons (636)

$$\frac{abcd}{ABCD} = \frac{\overline{Sh}^2}{\overline{SH}^2}, \quad \frac{a'b'c'}{A'B'C'} = \frac{\overline{S'h'}^2}{\overline{S'H'}^2},$$

c'est-à-dire, en vertu de l'hypothèse et de la construction,

$$\frac{abcd}{ABCD} = \frac{a'b'c'}{A'B'C'}.$$

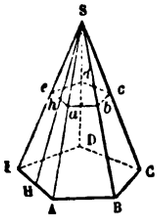
SCOLIE.

639. *Si les bases des deux pyramides sont équivalentes, les sections obtenues sont équivalentes.*

THÉORÈME.

640. *L'aire latérale d'une pyramide régulière a pour mesure la moitié du produit du périmètre de sa base par son apothème.*

Fig. 356.



Soit (*fig.* 356) la pyramide régulière SABCDE. Les triangles isocèles et égaux qui composent sa surface latérale ayant respectivement pour bases les côtés AB, BC,..., EA de la base de la pyramide, et pour hauteur son apothème SH (630), la somme des aires de ces triangles, c'est-à-dire l'aire demandée, a pour mesure la moitié du produit de la somme des côtés AB, BC,..., EA par l'apothème SH, c'est-à-dire la moitié du produit du périmètre de la base de la pyramide par son apothème.

SCOLIE.

641. *L'aire latérale d'un tronc de pyramide régulier a pour mesure le produit de la demi-somme des périmètres de ses deux bases par son apothème.*

Soit (*fig.* 356) le tronc de pyramide régulier ABCDE*abcde*. Les trapèzes isocèles et égaux qui composent son aire latérale ayant respectivement pour bases les côtés AB et *ab*, BC et *bc*, ..., EA et *ea*, des bases du tronc de pyramide, et pour hauteur son apothème H*h* (637), la somme des aires de ces trapèzes, c'est-à-dire l'aire demandée, aura pour mesure le

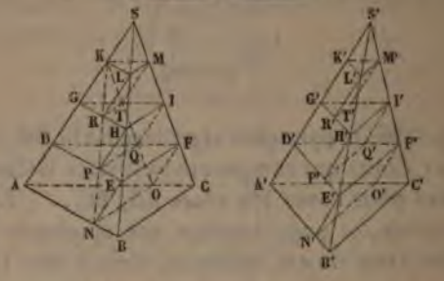
produit de la demi-somme des côtés AB et *ab*, BC et *bc*, EA et *ea*, par l'apothème H*h*, c'est-à-dire le produit d demi-somme des périmètres des deux bases du tron pyramide par son apothème.

§ IV. VOLUME DE LA PYRAMIDE.

THÉORÈME.

642. *Deux pyramides triangulaires de bases équival et de hauteurs égales sont équivalentes.*

Fig. 357.



Nous diviserons la démonstration en deux parties.

1° Considérons (*fig.* 357) une pyramide triangulaire S Divisons l'arête SA en un certain nombre *n* de parties é SK, KG, GD, DA et, par les points de division K, G, D, me des plans parallèles au plan de la base ABC. Soient K GIH, DFE, les sections faites dans la pyramide par ces pl La parallèle menée par M à SA sera située dans le plan dé miné par le point M et la droite SA, c'est-à-dire dans le p de la face SAC; elle rencontrera donc GI en un certain poi tandis que la parallèle menée par L à SA rencontrera à tour la droite GH en un certain point R. La figure KML sera alors un prisme inscrit dans la tranche KMLGIH, et obtiendra de même les prismes GIHDQP, DFEAON, insc dans les tranches suivantes GIHDFE, DFEACB.

Cela posé, nous allons prouver que *la somme* S *des volu*

des prismes inscrits dans les diverses tranches de la pyramide **SABC** *a pour limite le volume de cette pyramide, lorsque le nombre* **n** *croît indéfiniment.*

Remarquons, à cet effet, que les droites SK, LR, HP, EN, étant égales et parallèles, les figures SKLR, LRHP, HPEN, sont des parallélogrammes; les segments KR, RP, PN, sont donc parallèles à l'arête SB, et, comme l'extrémité de chacun d'eux est l'origine du suivant, ils appartiennent tous à une même droite KN parallèle à SB. Les points K, T, Q, O, sont, également, sur une même droite, KO parallèle à l'arête SC. Il en résulte que la figure AKON est un tétraèdre dont la base est parallèle à celle du tétraèdre primitif ASCB (632), qui diffère d'autant moins de ce tétraèdre que la division SK est plus petite, et qui coïncide avec lui à la limite, lorsque n croît indéfiniment, puisque, dans cette hypothèse, SK tend vers zéro. Mais le volume fixe ASCB et les volumes AKON et S qui varient avec n satisfont évidemment, pour toute valeur de l'entier n, aux inégalités

$$\text{AKON} < \text{S} < \text{ASCB}.$$

Donc, puisque AKON a pour limite ASCB, la somme S tend vers cette même limite.

2° Considérons maintenant (*fig.* 357) deux pyramides triangulaires SABC, S′A′B′C′, de bases équivalentes et de même hauteur. Si l'on place les bases ABC, A′B′C′, sur un même plan, de façon que les sommets S et S′ soient d'un même côté de ce plan, ces sommets seront dans un plan parallèle au plan commun des bases. Si l'on opère alors sur la première pyramide SABC comme il a été dit ci-dessus, en menant des plans parallèles au plan commun des bases par les points de division de l'arête SA supposée divisée en n parties égales, ces plans partageront aussi SA′ en n segments égaux entre eux et, à chaque tranche de SABC et au prisme qui y est inscrit, correspondront une tranche de S′A′B′C′ et un prisme inscrit dans cette tranche. Mais deux prismes inscrits correspondants, tels que GIHDQP, G′I′H′D′Q′P′, sont équivalents (626); car, leurs bases GIH, G′I′H′, sont équi-

valentes (639), et leurs hauteurs sont les mêmes pu
les bases supérieures sont dans un même plan aussi
que les bases inférieures. Donc, la somme des vol
des prismes inscrits dans la pyramide SABC est, que
soit l'entier n, égale à la somme des volumes des pr
inscrits dans la pyramide S'A'B'C'; et, comme chacu
ces sommes a pour limite le volume de la pyramide
respondante lorsque n croît indéfiniment (1°), les vol
de ces pyramides sont égaux (611).

THÉORÈME.

643. *Le volume d'une pyramide a pour mesure le tie
produit de sa base par sa hauteur.*

Fig. 358.

Fig. 359.

1° Soit (*fig.* 358) la pyramide triangulaire EABC. Pa
sommets A et C, menons les droites AD et CF, parallè
l'arête BE, jusqu'à leurs rencontres D et F avec un plan
par le sommet E parallèlement à la base ABC de la pyra
Le polyèdre ABCDEF sera un prisme triangulaire ayant m
base et même hauteur que la pyramide proposée.

Si l'on fait passer un plan par les trois sommets D, E,
prisme triangulaire ABCDEF se trouve décomposé en troi
ramides triangulaires EABC, EDCA, EDCF. La première
pyramide donnée. Les deux autres sont équivalentes (6
car elles ont même hauteur et leurs bases sont équivale
comme moitiés du parallélogramme ACFD. Or, si l'on p
la face DEF pour base de la pyramide EDCF, son somme
le point C. Cette pyramide a donc même base et même

teur que le prisme ABCDEF; elle est donc équivalente à la pyramide EABC.

Les trois pyramides dont se compose le prisme ABCDEF étant équivalentes, chacune d'elles est le tiers de ce prisme. Or, le volume du prisme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur; le volume de la pyramide EABC a donc pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

2° Soit (*fig.* 359) la pyramide polygonale SABCDE. On la décompose en pyramides triangulaires en faisant passer des plans par l'arête SA, et chacune des arêtes SC, SD. Ces pyramides triangulaires ont pour bases les triangles ABC, ACD, ADE, qui composent la base de la pyramide donnée, et leur hauteur commune est celle de cette pyramide. La somme de leurs mesures ou la mesure de la pyramide SABCDE sera donc égale au tiers du produit de sa base ABCDE par sa hauteur SO.

Corollaires.

644. En désignant par V, B, H les trois nombres qui mesurent respectivement le volume d'une pyramide, sa base et sa hauteur, on a la formule générale

$$V = \frac{1}{3} B.H.$$

Donc, *toute pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur. Deux pyramides quelconques de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalentes. Deux pyramides sont entre elles comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur. Deux pyramides de même base sont entre elles comme leurs hauteurs. Deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases.*

645. Quand un tétraèdre est régulier, son volume s'exprime en fonction de son arête a.

Un tétraèdre régulier est compris sous quatre triangles équilatéraux égaux. Sa base a donc pour expression (427)

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Sa hauteur est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle

ayant pour second côté de l'angle droit le rayon du cercle
conscrit au triangle de base, c'est-à-dire $\frac{a}{\sqrt{3}}$, et pour hyp
nuse l'arête a du tétraèdre. Cette hauteur est, par suite,

$$\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

On a donc, pour le volume du tétraèdre régulier en fonc
de son arête,

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

EXEMPLE.

Quel est le volume du tétraèdre régulier dont l'arête
1 mètre?

On a

$$V=\frac{1^{mc}\sqrt{2}}{12}=\frac{1^{mc},41421356}{12}=0^{mc},117851,$$

à $\frac{1}{2}$ centimètre cube près.

SCOLIE.

646. Pour évaluer le volume d'un polyèdre, il suffit de
composer ce polyèdre en pyramides, de calculer les volu
de ces pyramides et de faire la somme des nombres obten
Plus généralement, il suffit de décomposer le polyèdre p
posé en parties telles, que l'expression de leur volume
connue.

Pour opérer la décomposition en pyramides, on peut cho
un point quelconque dans l'espace et le joindre à tous
sommets du polyèdre. Les bases des différentes pyrami
formées sont les faces du polyèdre, et leurs hauteurs s
les perpendiculaires abaissées du point choisi sur ces fac
Le volume du polyèdre est la somme arithmétique ou al
brique des volumes des pyramides obtenues, suivant que l
sommet commun est lui-même intérieur ou extérieur
polyèdre.

Souvent on effectue la décomposition en prenant pour centre l'un des sommets du polyèdre, c'est-à-dire en menant toutes les diagonales qui partent d'un même sommet.

Si l'on peut trouver dans l'intérieur du polyèdre un point à égale distance de toutes ses faces, les pyramides qui le composeront auront pour hauteur commune la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'une des faces, et *le volume du polyèdre aura pour mesure le tiers du produit de son aire par cette perpendiculaire.*

THÉORÈME.

647. *Un tronc de pyramide à bases parallèles est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour bases respectives les deux bases du tronc et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases.*

1° Soit (*fig.* 360) le tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles ABCDEF.

Fig. 360.

Les plans AEC, DEC le partagent en trois pyramides triangulaires EABC, EDCF, EDCA, dont nous désignerons les volumes respectifs par P, P′, P″.

La première EABC a pour base la base inférieure ABC du tronc de pyramide, et elle a même hauteur que ce tronc, puisque son sommet E est un sommet de la base supérieure.

Si l'on prend le point C pour sommet, la seconde pyramide EDCF a pour base DEF la base supérieure du tronc, et elle a même hauteur que ce tronc, puisque son sommet C se confond avec un sommet de la base inférieure.

Pour évaluer la troisième pyramide EDCA, comparons-la successivement aux deux autres.

Si l'on prend le point C comme sommet commun des d
pyramides EABC, EDCA, elles ont même hauteur et sont e
elles comme leurs bases EAB, ADE; mais ces triangles,
la hauteur est aussi la même, sont entre eux comme l
bases AB et DE, et l'on peut écrire

$$\frac{P}{P''} = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \quad (635,\ 2°).$$

De même, si l'on prend le point E comme sommet com
des deux pyramides EDCA, EDCF, elles ont même hauteu
sont entre elles comme leurs bases DAC, CDF, ou comme
bases AC et DF de ces triangles, qui ont aussi même haut
On a, par suite,

$$\frac{P}{P''} = \frac{P''}{P'}.$$

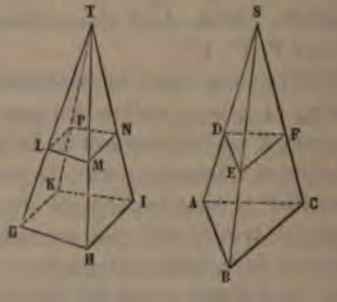
Il en résulte

$$P''^2 = P.P'.$$

Le volume de la troisième pyramide est donc la moye
proportionnelle des volumes des deux premières, c'est à-d
que la pyramide EDCA équivaut à une pyramide ayant p
hauteur la hauteur du tronc, et pour base la moyenne p
portionnelle entre ses deux bases.

2° Soit (*fig.* 361) le tronc de pyramide polygonale GHIKLM

Fig. 361.



Ce tronc a été obtenu en coupant la pyramide TGHIK

un plan parallèle à sa base. Prenons un point S à la même hauteur que le point T au-dessus de la base GHIK, et construisons dans le plan de cette base un triangle ABC qui lui soit équivalent. La pyramide triangulaire SABC sera équivalente à la pyramide polygonale TGHIK (644). Si l'on prolonge le plan LMNP jusqu'à la pyramide SABC, il déterminera dans cette pyramide une section DEF équivalente à la section LMNP (639); les deux pyramides SDEF, TLMNP seront donc aussi équivalentes. Par suite, le tronc polygonal GHIKLMNP, différence des pyramides TGHIK, TLMNP, sera équivalent au tronc triangulaire ABCDEF, différence des pyramides SABC, SDEF. Et comme le tronc de pyramide triangulaire est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc et pour bases respectives les deux bases du tronc et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases, il en sera de même du tronc de pyramide polygonale qui a même hauteur et des bases équivalentes.

Corollaires.

648. En désignant par V, B, b, h les nombres qui mesurent respectivement le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles, ses deux bases et sa hauteur, on a la formule

$$V = \frac{1}{3}Bh + \frac{1}{3}bh + \frac{1}{3}h\sqrt{Bb}$$

ou

$$(1) \qquad V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{Bb}).$$

Souvent, au lieu de donner les deux bases B et b, on donne l'une d'elles B et le rapport $\frac{a}{A}$ de deux côtés homologues de ces deux bases; on a alors

$$\frac{b}{B} = \frac{a^2}{A^2}, \quad \text{d'où} \quad b = \frac{a^2}{A^2}B.$$

Il en résulte

$$(2) \qquad V = \frac{Bh}{3}\left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right).$$

Cette formule, très-commode dans les applications, se trouve dans un Traité de Léonard de Pise, *Sur les centres de gravité*.

EXEMPLE.

Les bases parallèles d'un tronc de pyramide sont deux hexagones réguliers ayant respectivement 1 *mètre et* 2 *mètres de côté, sa hauteur est égale à* 3 *mètres : calculer son volume.*

On a dans ce cas

$$B = \frac{3\,A^2\sqrt{3}}{2} = 6^{mq}\sqrt{3}$$

et, en appliquant la formule (2),

$$V = \frac{6.\sqrt{3}.3}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right),$$

c'est-à-dire

$$V = 3\sqrt{3}.3,5 = 18^{mc},186534$$

à 1 centimètre cube près.

SCOLIES.

649. On aurait pu employer, pour trouver le volume d'un tronc de pyramide polygonale, la méthode de *décomposition* déjà suivie dans d'autres cas (625, 643); mais cette marche exigeant ici la vérification d'une formule algébrique, il était préférable d'avoir recours à la méthode de *transformation* en figures équivalentes.

650. On peut donner au mot *tronc* une extension utile.

De même que les théorèmes relatifs aux sections d'un prisme s'étendent au cas où elles sont extérieures (606), les théorèmes relatifs aux sections d'une pyramide (635, 636) s'étendent au cas où ces sections deviennent extérieures, qu'elles soient faites au delà du sommet ou au-dessous de la base de la pyramide proposée. Les plans sécants doivent seulement rester parallèles à la base de cette pyramide.

On peut distinguer les deux cas possibles en disant que les sections faites au-dessous du sommet donnent des troncs de *première espèce*, et

que les sections faites au-dessus du sommet donnent des troncs de *seconde espèce*.

Pour évaluer le volume d'un tronc de seconde espèce ABCDEF (*fig.* 362),

Fig. 362.

il suffit d'effectuer la somme des pyramides SABC, SDEF. La hauteur h du tronc est d'ailleurs égale à la somme des hauteurs H et H′ des deux pyramides. On a ainsi, en conservant les notations du n° 648,

$$V = \frac{1}{3}BH + \frac{1}{3}bH' = \frac{B}{3}\left(H + \frac{bH'}{B}\right).$$

De la relation (648, 636)

$$\frac{B}{b} = \frac{A^2}{a^2} = \frac{H^2}{H'^2}$$

il résulte

$$\frac{H}{A} = \frac{H'}{a} = \frac{H + H'}{A + a} = \frac{h}{A + a},$$

d'où

$$H = \frac{Ah}{A + a}, \quad H' = \frac{ah}{A + a}.$$

Par suite,

$$V = \frac{Bh}{3}\,\frac{A^3 + a^3}{A^2(A + a)} = \frac{Bh}{3}\left(1 - \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right),$$

et aussi

$$V = \frac{h}{3}\left(B - \frac{Ba}{A} + \frac{Ba^2}{A^2}\right) = \frac{h}{3}\left(B + b - \sqrt{Bb}\right).$$

Pour un tronc de seconde espèce, la formule du volume est donc la même que pour un tronc de première espèce, sauf le signe de la moyenne proportionnelle. On passe donc de l'une à l'autre formule en changeant le signe de cette moyenne ou en changeant a en $-a$.

On aurait pu suivre une marche analogue pour calculer l'expr du volume d'un tronc de pyramide de première espèce; seulemer lieu d'ajouter les pyramides SABC, SDEF, il aurait fallu les retra (*fig.* 361).

631. Problème. — *On donne le volume* V, *la hauteur h et le côt la base inférieure d'un tronc de pyramide à bases parallèles ; on pose que cette base est un hexagone régulier, et l'on demande le c de l'hexagone régulier, base supérieure du tronc.*

L'équation du problème sera l'équation (2) du n° 648, dans laque remplacera a par l'inconnue x, c'est-à-dire

$$V = \frac{Bh}{3}\left(1 + \frac{x}{A} + \frac{x^2}{A^2}\right),$$

d'où

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{x}{A} + 1 - \frac{3V}{Bh} = 0.$$

Les racines de cette équation restent imaginaires tant qu'on a V < elles deviennent réelles et elles restent toutes deux négatives tant est compris entre $\frac{Bh}{4}$ et $\frac{Bh}{3}$; enfin, elles sont l'une positive et l'autr gative, lorsqu'on a $V > \frac{Bh}{3}$.

Dans le premier cas, le problème est impossible; dans le deuxièm deux troncs de seconde espèce répondent à la question; dans le troi cas, un tronc de première espèce et un tronc de seconde espèce pondent à la fois.

Supposons, par exemple, $A = 1^m$, d'où $B = \frac{3^{mq}.\sqrt{3}}{2}$, $h = 1^m.\sqrt$ $V = 2^{mc}$. L'équation à résoudre sera

$$x^2 + x + 1 - \frac{4}{3} = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + x - \frac{1}{3} = 0.$$

Elle donne

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6} = \frac{-3 \pm 4,5825757}{6}.$$

La racine positive est $x = 0,26376$ à $\frac{1}{2000}$ de millimètre près; la r négative est $x = -1,26376$ avec la même approximation. La prem répond à un tronc de première espèce; la seconde, *prise positivem*

à un tronc de seconde espèce. La hauteur de la pyramide qui correspond au tronc de première espèce est (630)

$$H = \frac{A\,h}{A - x} = \frac{1^{m}.\sqrt{3}}{0{,}73624} = 2{,}353$$

à $\frac{1}{2}$ millimètre près. Celle de la pyramide qui correspond au tronc de seconde espèce est (630)

$$H = \frac{A\,h}{A + x} = \frac{1^{m}.\sqrt{3}}{2{,}26376} = 0^{m},765$$

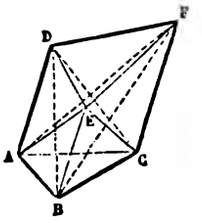
à $\frac{1}{2}$ millimètre près.

THÉORÈME.

652. ***Un tronc de prisme triangulaire*** *est équivalent à la* ***somme de trois pyramides ayant pour*** *base commune la base* ***inférieure du tronc et, pour sommets,*** *ceux de sa base supérieure.*

Soit (*fig.* 363) le tronc de prisme triangulaire ABCDEF. En menant le plan ACE, on détache du tronc la pyramide triangulaire EABC, qui a pour base ABC et pour sommet le point E.

Fig. 363.



Il reste la pyramide quadrangulaire ECADF. En menant le plan DEC, on la partage en deux pyramides triangulaires ECDA, ECDF.

La première ECDA, qui a pour sommet le point E et pour base CDA, équivaut à la pyramide BCDA de même base CDA et de même hauteur, puisque son sommet B est situé sur l'arête EB parallèle à DA ou au plan CDA de la base commune. Or la pyramide triangulaire BCDA peut être regardée comme ayant pour base ABC et pour sommet le point D.

La seconde pyramide triangulaire ECDF peut être regardée

comme ayant pour base ECF et pour sommet le point D; équivaut donc à la pyramide ABCF, de base BCF et de sommet A. En effet, les deux bases ECF, BCF sont équivalentes comme triangles de même base CF et de même hauteur, puisque l'arête EB est parallèle à FC; et les hauteurs des deux pyramides comparées sont égales, puisque la droite DA, qui joint leurs sommets, est parallèle à FC et, par conséquent, au plan commun EBCF de leurs bases. Or, la pyramide triangulaire ABCF peut être considérée comme ayant pour base ABC et pour sommet le point F.

Scolie.

653. Si le tronc considéré est un tronc de prisme droit, les hauteurs des trois pyramides indiquées se confondent avec

Fig. 364.

les arêtes latérales EB, DA, FC, et la base ABC avec la section droite du tronc. Le volume du corps tronqué a donc pour mesure le *produit de sa section droite par la moyenne arithmétique de ses arêtes latérales* (643).

On étend facilement cet énoncé au cas du tronc de prisme oblique. Soit (*fig.* 364) le tronc de prisme oblique ABCDEF. Menons sa section droite MNP. Elle le partage en deux troncs de prisme MNPABC, MNPDEF, qui sont droits relativement à cette section considérée comme base. Le premier a pour mesure

$$\text{MNP}\left(\frac{\text{MA}+\text{NB}+\text{PC}}{3}\right);$$

le second,

$$\text{MNP}\left(\frac{\text{MD}+\text{NE}+\text{PF}}{3}\right).$$

Le tronc de prisme oblique ABCDEF, somme des deux troncs de prismes droits MNPABC, MNPDEF, a donc pour mesure la somme de leurs mesures, c'est-à-dire

$$\text{MNP}\left(\frac{\text{AD}+\text{BE}+\text{CF}}{3}\right).$$

COROLLAIRE.

654. En désignant par V, B, β, h, h', h'', a, a', a'' les nombres qui mesurent respectivement le volume d'un tronc de prisme triangulaire, sa base et sa section droite, les hauteurs des sommets de sa base supérieure au-dessus du plan de sa base inférieure et ses arêtes latérales, on a les formules

$$\text{(1)} \qquad \text{V}=\text{B}\left(\frac{h+h'+h''}{3}\right),$$

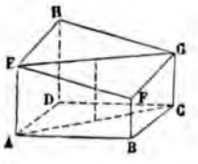
$$\text{(2)} \qquad \text{V}=\beta\left(\frac{a+a'+a''}{3}\right).$$

APPLICATION.

655. *La base* B *d'un parallélipipède droit tronqué est égale à* 36 *mètres carrés; ses arêtes latérales sont égales à* 5 *mètres,* 3 *mètres,* 7 *mètres et* 9 *mètres; on demande de calculer son volume.*

Soit (*fig.* 365) ABCDEFGH le parallélipipède tronqué proposé. Menons le plan diagonal ACGE qui le partage en deux

Fig. 365.



troncs de prismes triangulaires droits, dont les bases sont égales entre elles et à la moitié du parallélogramme ABCD. Les volumes de ces deux troncs de prismes étant respective-

ment, d'après les formules du numéro précédent,

$$18\left(\frac{5+3+7}{3}\right) \quad \text{et} \quad 18\left(\frac{5+9+7}{3}\right),$$

le volume cherché sera

$$V = 18.\frac{36}{3} = 216^{mc}.$$

D'une manière générale, si l'on désigne par A et a, B et b, les a latérales, opposées deux à deux, d'un parallélipipède tronqué quelco et par S sa section droite, les volumes v et v' des deux prismes tria laires tronqués qui le composent sont

$$v = \frac{S}{2}\cdot\frac{A+a+b}{3}, \quad v' = \frac{S}{2}\cdot\frac{A+a+B}{3};$$

par suite, son volume $V = v + v'$ a pour expression

$$V = S\cdot\frac{2(A+a)+(B+b)}{6}.$$

Mais, si l'on représente par δ la longueur de la droite qui unit les cen des deux bases du tronc, on a

$$A + a = B + b = 2\delta,$$

d'où

$$V = S.\delta.$$

Le volume d'un parallélipipède tronqué quelconque a donc pour sure *le produit de sa section droite par la moyenne arithmétique de s arêtes latérales opposées.*

THÉORÈME.

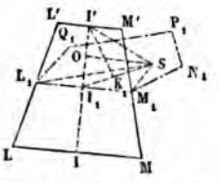
636. *Le volume de tout polyèdre ayant pour bases deux polyg quelconques situés dans des plans parallèles et pour faces latérales trapèzes ou des triangles est exprimé par la formule*

$$\frac{H}{6}(B + B' + 4B''),$$

dans laquelle H *désigne la distance des deux plans parallèles,* B *la b inférieure du polyèdre,* B' *la base supérieure, et* B'' *la section équidista des deux bases.*

En effet, soient $L_1M_1N_1P_1Q_1$ la section équidistante des bases (*fig.* 366) et S un point pris à volonté dans l'intérieur de cette section. Le polyèdre peut être décomposé en pyramides ayant pour bases ses diverses faces et

Fig. 366.



pour sommet commun le point S. Les volumes des deux pyramides qui reposent sur les bases B et B' ont évidemment pour mesures $\frac{BH}{6}$, $\frac{B'H}{6}$, et il reste à évaluer les volumes des pyramides qui reposent sur les faces latérales. Soit donc LMM'L' une quelconque de ces faces, par exemple celle qui répond au côté L_1M_1 du polygone $L_1M_1N_1P_1Q_1$; pour raisonner d'une manière générale, nous supposerons que cette face soit un trapèze (si c'était un triangle, l'un des côtés parallèles LM ou L'M' serait nul). Abaissons du point S la perpendiculaire SO sur le plan de la face LMM'L'; dans ce plan, menons par le point O la perpendiculaire $I'OI_1$ à L_1M_1; la droite SI_1 sera perpendiculaire à L_1M_1; enfin menons $I'K_1$ perpendiculaire au plan de la section $L_1M_1N_1P_1Q_1$: $I'K_1$ sera la moitié de la distance H des bases du polyèdre. Cela posé, la pyramide SLMM'L'a pour mesure

$$L_1M_1 . 2I'I_1 . \frac{1}{3}SO.$$

Or, le produit $I'I_1.SO$ peut être remplacé par le produit $SI_1.I'K_1$, qui, comme lui, exprime le double de l'aire du triangle $I'I_1S$; on a donc, pour le volume de la pyramide indiquée,

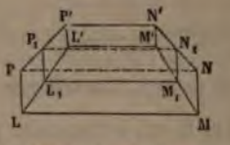
$$\frac{H}{6} 2L_1M_1.SI_1 = \frac{H}{6} \cdot 4SL_1M_1.$$

Par suite, pour avoir la somme des volumes des pyramides qui reposent sur les faces latérales du polyèdre, il faut multiplier par $\frac{H}{6}$ quatre fois la somme des triangles qui ont S pour sommet commun et pour bases les côtés de la section $L_1M_1N_1P_1Q_1$, c'est-à-dire multiplier par $\frac{H}{6}$ quatre fois l'aire B" de cette section.

APPLICATION.

657. Les amas de pierres, les fossés ou cuvettes établis de distanc distance le long des routes, les tombereaux, etc., sont terminés ha bas par deux rectangles parallèles LMNP, L'M'N'P', et latéralement quatre trapèzes LMM'L', MNN'M', NPP'N', PLL'P'. Exprimons le vo d'un pareil corps en fonction de la distance h des plans des deux rectar et des dimensions a et b, a' et b', de ces rectangles (*fig.* 367).

Fig. 367.



La section $L_1M_1P_1Q_1$, équidistante des bases, est un rectangle don dimensions, L_1M_1, L_1P_1, sont évidemment égales à $\frac{1}{2}(a+a')$ et $\frac{1}{2}(b+$ Le volume du corps est donc, en vertu du théorème précédent, donné la formule

$$\frac{h}{6}[ab+a'b'+(a+a')(b+b')],$$

que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$\frac{bh}{6}(2a+a')+\frac{b'h}{6}(2a'+a).$$

Pour $b'=0$, le volume se réduit à

$$\frac{bh}{6}(2a+a'),$$

et le corps a la forme qu'on donne dans les parcs d'artillerie aux piles boulets sphériques rectangulaires.

§ V. — FIGURES SYMÉTRIQUES.

DÉFINITIONS.

658. Deux points A et A' sont *symétriques par rappor un centre* O, lorsque ce centre O est le milieu de la droite A (*fig.* 368).

Deux points A et A' sont symétriques par rapport à axe xy (*fig.* 369) ou à un plan P (*fig.* 370), lorsque cet a

ou ce plan est perpendiculaire au milieu de la droite AA'.

Deux figures sont symétriques par rapport à un centre, à un axe ou à un plan, lorsque leurs points sont deux à deux symétriques par rapport à ce centre, à cet axe ou à ce plan. Les points symétriques des deux figures sont dits *homologues*.

Fig. 368.

Fig. 369.

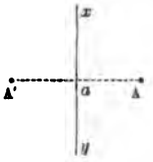
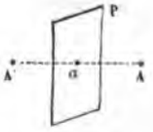


Fig. 370.



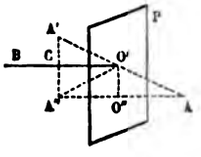
Deux figures symétriques, par rapport à un axe, sont égales. Car une rotation de 180 degrés autour de l'axe, imprimée à l'une des deux figures, amène évidemment cette figure sur l'autre.

La symétrie par rapport à un axe n'offre donc rien de particulier. Aussi, dans la suite de ce paragraphe, ne sera-t-il question que de la symétrie relative à un point ou à un plan.

THÉORÈME.

659. ***Deux figures F' et F'', symétriques d'une même figure F par rapport à deux centres différents O' et O'', sont égales*** (*fig.* 371) (¹).

Fig. 371.



Soient A un point quelconque de la figure F, A' son homologue dans la figure F' et A'' son homologue dans la figure F''. O' étant le milieu de AA' et O'' le milieu de AA'', la droite A'A''

(¹) BRAVAIS, *Journal de Mathématiques*, t. XIV.

est parallèle à O'O'' et égale à 2O'O''. La figure F'' n'est donc que la figure F' transportée parallèlement à la direction O'O'', d'une quantité égale à 2O'O''.

COROLLAIRE.

660. La position du centre de symétrie n'influe ni sur la *forme* ni même sur l'*orientation* de la figure symétrique d'une figure donnée.

THÉORÈME.

661. *Si deux figures* F *et* F'' *sont symétriques par rapport à un plan* P, *on peut toujours les placer de telle sorte qu'elles soient symétriques par rapport à un centre* O' *pris à volonté dans ce plan;* et réciproquement, *si deux figures* F *et* F' *sont symétriques par rapport à un centre* O', *on peut toujours les placer de telle sorte qu'elles soient symétriques par rapport à un plan quelconque* P *passant par ce centre* (*fig* 371) (1).

Il suffit de faire tourner la figure F'' dans le premier cas, la figure F' dans le second, de 180 degrés autour de la perpendiculaire O'CB élevée en O' au plan P.

En effet, considérons une figure F, un plan P et un point quelconque O' de ce plan; soient F' la figure symétrique de F par rapport au point O', et F'' la figure symétrique de F par rapport au plan P. Le théorème direct et sa réciproque seront démontrés à la fois, si l'on fait voir que les figures F' et F'' sont symétriques par rapport à la perpendiculaire O'B élevée en O' au plan P (658). Or, soient A, A', A'' trois points homologues des figures F, F', F'', et O'' le point où la droite AA'' rencontre le plan P. O' étant le milieu de AA' et O'' le milieu de AA'', la droite A'A'' est parallèle à O'O'' et, par suite, perpendiculaire sur O'B. D'ailleurs O'B, étant menée parallèlement à AA'' par le milieu de AA', passe par le milieu C de A'A''. Donc, enfin, les points A' et A'' sont symétriques par rapport à la droite O'B.

(1) BRAVAIS, *Journal de Mathématiques*, t. XIV.

Corollaires

662. Deux figures symétriques d'une même figure F, par rapport à deux plans différents P et Q, ne sont autre chose, quant à la *forme*, que la figure symétrique de F par rapport à un centre quelconque (659); elles sont donc superposables. Mais leur *orientation* dans l'espace n'est pas la même, à moins que les plans P et Q ne soient parallèles.

663. En résumé, si l'on fait abstraction de l'orientation pour n'avoir égard qu'à la forme, on voit qu'*une figure* F *n'a qu'une seule figure symétrique*. Toutes les figures obtenues en prenant la figure symétrique de F, par rapport à tel centre ou à tel plan qu'on veut, sont superposables.

Scolie.

664. Telle propriété de deux figures *symétriques* (658) est plus ou moins aisée à démontrer, suivant que l'on considère la symétrie relative à un plan ou à un centre. Le théorème précédent (661) permet de choisir le mode de symétrie qui facilite le plus les raisonnements. C'est généralement la symétrie relative à un centre qui rend les démonstrations plus simples, parce qu'en déplaçant le centre de symétrie on n'altère pas même l'orientation de la figure symétrique (660).

THÉORÈME.

665. *La figure symétrique d'une ligne droite est une ligne droite.*

Car, si l'on prend un point quelconque de la droite pour centre de symétrie, ce qui ne peut rien changer au résultat (660), on retrouve évidemment la droite elle-même pour figure symétrique.

Corollaires.

666. *La distance de deux points est égale à celle de leurs symétriques.*

Car, si l'on prend pour centre de symétrie le milieu de la droite qui joint les deux points, on voit que ces deux points ne font que s'échanger.

667. *L'angle de deux droites est égal à l'angle de leurs symétriques.*

Car, en prenant pour centre de symétrie le sommet de cet angle, on voit que les droites symétriques forment l'angle qui lui est opposé par le sommet.

SCOLIE.

668. Il importe de se figurer nettement la situation de deux droites symétriques par rapport à un centre ou par rapport à un plan.

Soit AB (*fig.* 372) une droite dont on veut la droite symétrique par rapport à un centre donné O'. Prenons d'abord la

Fig. 372.

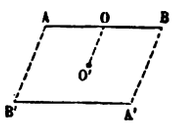
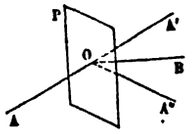


Fig. 373.



droite symétrique de AB par rapport à son milieu O : le point A aura son symétrique en B, et le point B son symétrique en A; de sorte que la droite symétrique de AB, par rapport à son milieu O pris pour centre, sera BA. Pour passer ensuite du centre O au centre O', il suffira (659) de faire décrire aux points A et B des droites BA' et AB' parallèles à OO' et doubles de OO'. On trouve ainsi, pour symétrique de AB, la droite A'B' *parallèle à* AB, *de sens contraire, et située à la même distance du centre* O' *de symétrie.*

Soit OA (*fig.* 373) une droite dont on veut la droite symétrique par rapport à un plan P qu'elle rencontre en O. En prenant d'abord la droite symétrique de OA par rapport au point O, on trouve son prolongement OA', et il suffit (661) de faire tourner OA' de 180 degrés autour de la perpendiculaire OB au plan P, pour avoir la droite OA'' demandée. On voit que *les deux droites* OA *et* OA'', *symétriques par rapport au plan* P, *sont également inclinées sur ce plan, qu'elles rencontrent d'ailleurs au même point* O.

THÉORÈME.

669. *La figure symétrique d'un plan est un plan.*

Car, si l'on prend un point du plan pour centre de symétrie, on retrouve évidemment le plan lui-même pour figure symétrique.

COROLLAIRES.

670. *La figure symétrique d'un polygone plan est un polygone égal au premier.*

D'abord, c'est un polygone plan (669); il est ensuite égal au premier, parce qu'il a ses côtés et ses angles égaux aux côtés homologues et aux angles homologues de ce polygone (666, 667).

671. *L'angle de deux plans est égal à l'angle de leurs symétriques.*

Car, en prenant pour centre de symétrie un point de l'arête de l'angle dièdre donné, on voit que les plans symétriques de ses faces forment le dièdre qui lui est opposé par l'arête.

SCOLIE.

672. Deux plans symétriques par rapport à un centre sont parallèles et équidistants de ce centre.

Deux plans symétriques par rapport à un plan sont également inclinés sur ce plan, qu'ils coupent d'ailleurs suivant la même droite.

THÉORÈME.

673. *Deux polyèdres symétriques ont :* 1° *leurs faces égales chacune à chacune;* 2° *leurs angles dièdres homologues égaux;* 3° *leurs angles polyèdres homologues symétriques* (566).

1° L'égalité des faces homologues résulte du n° 670.

2° L'égalité des angles dièdres homologues résulte du n° 671.

3° Pour montrer clairement la relation qui existe entre un angle polyèdre A de la première figure P et l'angle polyèdre homologue A′ de la seconde figure P′, il suffit de construire la

figure symétrique de P en prenant pour centre de symétrie le sommet A du premier angle polyèdre. On voit ainsi que l'angle polyèdre A′ est l'angle polyèdre opposé par le sommet à l'angle polyèdre A.

THÉORÈME.

674. ***Deux polyèdres symétriques*** **P** ***et*** **P′** ***sont équivalents.***

Si l'on décompose le polyèdre P en tétraèdres, à chacun de ces tétraèdres répond un tétraèdre symétrique, et l'ensemble de ces tétraèdres symétriques forme le polyèdre P′. Deux polyèdres symétriques P et P′, étant d'après cela composés d'un même nombre de tétraèdres symétriques deux à deux, il suffit de démontrer que deux tétraèdres symétriques sont équivalents.

Or, soit (*fig.* 374) SABC un tétraèdre quelconque. Formons son symétrique SA′B′C′ par rapport au point S. Les triangles ABC, A′B′C sont égaux (670), et leurs plans sont équidistants du point S (672). Par suite, les deux tétraèdres SABC, SA′B′C′, ayant des bases et des hauteurs égales, sont équivalents.

Fig. 374.

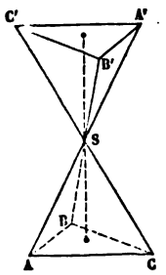
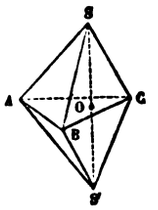


Fig. 375.



La symétrie relative à un plan fournirait dans ce cas une démonstration tout aussi simple; car, comme la propriété dont il s'agit concerne la ***grandeur*** et non la ***situation***, on peut prendre à volonté le plan de symétrie (662). Or, en construisant (*fig.* 375) la figure S′ABC symétrique de SABC par rapport au plan ABC, on voit que les deux tétraèdres SABC,

S'ABC ont même base ABC et des hauteurs égales SO et S'O; d'où résulte leur équivalence.

SCOLIE.

675. Les deux prismes dans lesquels un parallélipipède est décomposé par un plan diagonal (616) sont évidemment symétriques par rapport au centre O du parallélipipède (*fig.* 343). C'est pourquoi ils ont même volume (674), bien qu'ils ne soient pas en général superposables. On ne peut les superposer que quand ils sont droits.

§ VI. — POLYÈDRES SEMBLABLES.

DÉFINITIONS.

676. On donne le nom de *polyèdres semblables* aux polyèdres qui ont leurs angles polyèdres égaux et qui sont compris sous un même nombre de faces semblables chacune à chacune.

L'égalité des angles polyèdres entraîne évidemment l'égalité des angles dièdres homologues.

On appelle *homologues* les éléments (faces, arêtes, dièdres, etc.) qui se correspondent dans deux polyèdres semblables.

677. *Les arêtes homologues de deux polyèdres semblables sont proportionnelles.*

Car les faces semblables de ces polyèdres ayant le même rapport de similitude, puisqu'une même arête appartient sur chaque polyèdre à deux faces adjacentes, le rapport de deux arêtes homologues quelconques est constant.

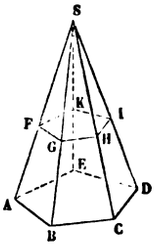
THÉORÈME.

678. *En coupant une pyramide par un plan parallèle à la base, on détermine une seconde pyramide semblable à la première.*

Soit (*fig.* 376) la pyramide SABCDE, dans laquelle un plan parallèle à la base a déterminé la section FGHIK. Les deux pyramides SABCDE, SFGHIK ont leurs faces semblables, car

les polygones ABCDE, FGHIK sont semblables (635), et les faces latérales SAB et SFG, SBC et SGH . . ., le sont aussi par

Fig. 376.



suite du parallélisme des côtés de ces deux polygones.

Quant aux angles polyèdres, l'angle polyèdre S est commun, et deux angles trièdres homologues, tels que A et F, sont égaux comme ayant un angle dièdre commun compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées, savoir : l'angle dièdre SA commun, la face SAB égale à la face SFG et la face SAE égale à la face SFK.

THÉORÈME.

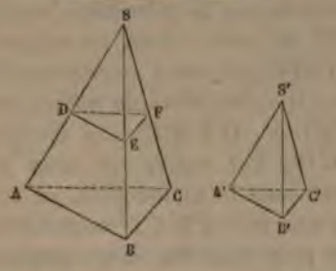
679. *Deux pyramides triangulaires sont semblables, lorsqu'elles ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées.*

Soient (*fig.* 377) les pyramides SABC, S'A'B'C', dans lesquelles l'angle dièdre SA est égal à l'angle dièdre S'A', et les faces SAB, SAC, semblables aux faces S'A'B', S'A'C', et semblablement placées.

Portons la seconde pyramide sur la première, de manière qu'elles aient même sommet et que les faces homologues de leurs angles dièdres égaux coïncident. Le triangle S'A'B' étant semblable au triangle SAB et le point A' tombant en D sur SA, S'B' se confondra avec SB, et le point B' viendra en un point E tel, que DE soit parallèle à AB. De même le triangle S'A'C', étant semblable au triangle SAC, S'C' se confondra avec SC.

et le point C′ viendra en un point F tel, que DF soit parallèle à AC. La base A′B′C′ occupera donc alors la position DEF, et

Fig. 377.

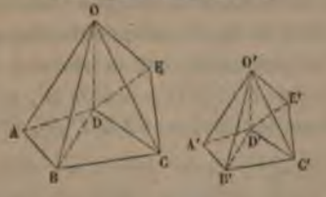


son plan sera parallèle au plan de la base ABC (506). La pyramide SDEF étant semblable à la pyramide SABC (678), il en est de même de la pyramide S′A′B′C′ qu'elle représente.

THÉORÈME.

680. *Deux polyèdres, composés d'un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et semblablement disposés, sont semblables.*

Fig. 378.



Soient (*fig.* 378) OABD, OBCD, OCDE, ..., O′A′B′D′, O′B′C′D′, O′C′D′E′, ... deux séries de tétraèdres respectivement semblables et semblablement disposés; le polyèdre formé par les premiers tétraèdres est semblable au polyèdre formé par les seconds.

En effet :

1° Les faces homologues des deux polyèdres sont semblables

comme composées d'un même nombre de triangles sembla
et semblablement disposés. Considérons, par exemple, la
ABCD du premier polyèdre. Les triangles ABD, BCD, qu
constituent, sont semblables aux triangles A'B'D', B'C
comme faces homologues de tétraèdres semblables. De p
les triangles ABD, BCD étant dans un même plan, les an
dièdres OBDA, OBDC des deux tétraèdres OABD, OBCD
supplémentaires; il en est donc de même des angles diè
homologues O'B'D'A', O'B'D'C', des tétraèdres sembla
O'A'B'D', O'B'C'D'. Par suite, les deux triangles A'B
B'C'D' sont aussi dans le même plan, et constituent su
second polyèdre une face A'B'C'D' semblable à la face AB

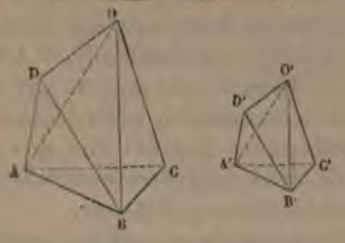
2° Les angles polyèdres des deux polyèdres sont ég
comme ayant tous leurs éléments égaux et semblablem
disposés; car les faces homologues des deux polyèdres é
semblables et semblablement disposées, leurs angles
lyèdres ont d'abord toutes leurs faces égales chacune à c
cune et semblablement disposées. De plus, les angles diè
homologues de ces angles polyèdres sont égaux, soit com
dièdres homologues de deux tétraèdres semblables,
comme somme d'angles dièdres égaux. L'angle dièdre BC
par exemple, formé par les deux faces ABCD, CDE du p
mier polyèdre, est la somme des deux angles dièdres BC
ECDO, qui appartiennent aux deux tétraèdres OBCD, OC
et l'angle dièdre B'C'D'E', formé par les deux faces A'B'C
C'D'E' du second polyèdre, est la somme des deux ang
dièdres homologues B'C'D'O', E'C'D'O', qui appartienn
aux deux tétraèdres semblables O'B'C'D', O'C'D'E'.

681. Réciproquement, *deux polyèdres semblables peu*
être décomposés en un même nombre de tétraèdres sembla
et semblablement disposés.

Soit (*fig.* 379) un point O pris dans l'intérieur du prem
polyèdre; décomposons-le en tétraèdres en prenant le poi
pour centre de décomposition (646), et soit OABC l'un
tétraèdres obtenus. Les points A, B, C, ayant pour hom
logues sur le second polyèdre les points A', B', C', men
un plan O'A'B' faisant au-dessus de A'B'C' un angle diè

égal à celui que forme le plan AOB au-dessus de ABC, et dans ce plan O′A′B′ construisons le triangle O′A′B′ semblable au

Fig. 379.



triangle OAB. En prenant le point O′ pour centre de décomposition, on décompose donc le second polyèdre en tétraèdres, qui correspondent à ceux du premier polyèdre, et il reste seulement à prouver que ces tétraèdres sont semblables deux à deux.

Soit D un quatrième sommet du premier polyèdre, tel que les deux triangles ABC, ABD aient un côté commun et soient situés sur la même face ou sur deux faces adjacentes. Comparons les deux tétraèdres OABD, O′A′B′D′. Les faces OAB, O′A′B′ sont semblables comme faces homologues des deux tétraèdres semblables OABC, O′A′B′C′; les faces ABD, A′B′D′ le sont aussi comme triangles homologues de deux faces semblables des polyèdres donnés. De plus, si les deux triangles ABC, ABD sont dans un même plan, les deux dièdres OABD, O′A′B′D′ sont égaux comme suppléments des angles dièdres égaux OABC, O′A′B′C′; si les deux triangles ABC, ABD ne sont pas dans un même plan, les deux angles dièdres OABD, O′A′B′D′ sont encore égaux comme différences des angles dièdres égaux, DABC et OABC d'une part, D′A′B′C′ et O′A′B′C′ d'autre part. Dans les deux cas, les tétraèdres OABD, O′A′B′D′ sont semblables (679).

La même démonstration s'appliquera de proche en proche. La similitude des deux tétraèdres considérés en dernier lieu permettra toujours de vérifier la similitude des deux tétraèdres suivants.

SCOLIE.

682. Deux points O et O′ rapportés à deux polyèdres semblables sont dits *homologues*, lorsqu'en joignant l'un d'eux O aux sommets consécutifs A, B, C de l'un des polyèdres, et l'autre O′ aux sommets homologues A′, B′, C′ de l'autre polyèdre, on obtient deux tétraèdres OABC, O′A′B′C′ semblables et semblablement disposés par rapport aux deux polyèdres.

Il résulte de la démonstration précédente que deux points homologues quelconques peuvent être pris pour centres de décomposition de deux polyèdres semblables, en tétraèdres semblables et semblablement disposés.

Si le point O est extérieur au premier polyèdre, son homologue O′ est aussi extérieur au second polyèdre; il faut alors considérer les deux polyèdres comme composés de tétraèdres additifs et de tétraèdres soustractifs.

Si le point O coïncide avec l'un des sommets A du premier polyèdre, son homologue O′ coïncide avec le sommet A′ du second polyèdre, et les diagonales homologues des deux polyèdres, relatives aux sommets A et A′, se confondent avec les arêtes latérales de leurs tétraèdres homologues.

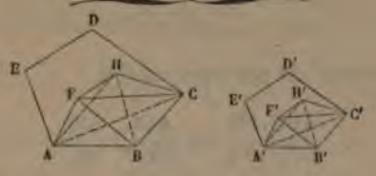
683. Deux droites rapportées à deux polyèdres semblables sont dites *homologues*, lorsque leurs extrémités sont deux à deux des points homologues. Telles sont, par exemple, les diagonales relatives à des sommets homologues.

Le rapport de deux droites homologues quelconques est égal au rapport de similitude des faces homologues des deux polyèdres.

Soient (*fig.* 380) ABCDE, A′B′C′D′E′ deux faces homologues quelconques des polyèdres donnés, et FH, F′H′ deux droites homologues quelconques. Formons les tétraèdres homologues FABC, F′A′B′C′, HABC, H′A′B′C′. La similitude de ces tétraèdres entraîne celle des tétraèdres FHAC, F′H′A′C′. En effet, les faces FAC, HAC sont respectivement semblables aux faces F′A′C′, H′A′C′, et l'angle dièdre FACH, différence des angles dièdres FACB, HACB, est égal à l'angle dièdre

F′A′C′H′, différence des angles dièdres égaux F′A′C′B′,

Fig. 380.



H′A′C′B′. Les deux tétraèdres FHAC, F′H′A′C′ étant semblables, on a (677)

$$\frac{FH}{F'H'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

THÉORÈME.

684. *Le rapport des volumes de deux polyèdres semblables est égal au cube du rapport de similitude de leurs faces homologues, ou deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes des arêtes homologues.*

Fig. 381.

Soient d'abord (*fig.* 381) deux tétraèdres semblables SABC, SDEF, qu'on peut toujours supposer placés l'un dans l'autre, comme l'indique la figure (678), de manière que leurs bases ABC, DEF soient parallèles.

Le premier tétraèdre SABC ayant pour base ABC et pour hauteur SH, son volume a pour expression

$$\frac{ABC.SH}{3}.$$

Le second tétraèdre ayant pour base DEF et pour hauteur SK, son volume est égal à

$$\frac{DEF.SK}{3}.$$

Le rapport cherché est par suite égal à

$$\frac{ABC.SH}{DEF.SK} = \frac{ABC}{DEF}.\frac{SH}{SK}.$$

Mais le plan DEF étant parallèle au plan ABC, on a (636, 635)

$$\frac{ABC}{DEF} = \frac{\overline{SH}^2}{\overline{SK}^2} \quad \text{et} \quad \frac{SH}{SK} = \frac{SA}{SD} = \frac{AB}{DE}.$$

Le rapport des volumes des deux tétraèdres est donc représenté par

$$\frac{\overline{SH}^3}{\overline{SK}^3} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{AB}^3}{\overline{DE}^3}.$$

Soient maintenant deux polyèdres semblables P et P'. Le rapport de similitude de leurs faces homologues sera (677) celui de deux arêtes homologues quelconques AB et A'B'. Ces deux polyèdres sont décomposables en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés (681), et le rapport de similitude des faces homologues de deux tétraèdres homologues est égal (683) au rapport $\frac{AB}{A'B'}$. Si le polyèdre P est composé des tétraèdres T, T_1, T_2, et le polyèdre P' des tétraèdres homologues T', T'_1, T'_2, on aura donc, d'après ce qui précède,

$$\frac{T}{T'} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3}, \quad \frac{T_1}{T'_1} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3}, \quad \frac{T_2}{T'_2} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3},$$

et, par suite, en appliquant un théorème connu,

$$\frac{T + T_1 + T_2}{T' + T'_1 + T'_2} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{P'} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3}.$$

Scolies.

685. *Les aires de deux polyèdres semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs arêtes homologues.*

686. De la relation démontrée, on déduit réciproquement

$$\frac{AB}{A'B'} = \sqrt[3]{\frac{P}{P'}}.$$

Donc, lorsqu'on veut *amplifier* ou *réduire* un polyèdre dans un rapport donné, l'*échelle* à adopter pour amplifier ou réduire les arêtes de ce polyèdre est égale à la racine cubique du rapport donné. Par exemple, si le volume du nouveau polyèdre doit être la millième partie du polyèdre donné, il faudra faire ses arêtes dix fois plus petites que les arêtes homologues du polyèdre donné.

Application.

687. *Étant donnée une pyramide dont l'une des arêtes* SA *est égale à* 1 *mètre, par quels points a et a' de cette arête faut-il mener des plans parallèles à la base de la pyramide, pour partager son volume en trois parties équivalentes?*

Les pyramides partielles dont les arêtes sont Sa et Sa' représentent respectivement le tiers et les deux tiers de la pyramide donnée. On aura donc

$$\frac{Sa}{SA} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \quad \frac{Sa'}{SA} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}};$$

d'où, en opérant par logarithmes et en faisant $SA = 1^m$,

$$Sa = 0^m,693 \quad \text{et} \quad Sa' = 0^m,874$$

à $\frac{1}{2}$ millimètre près.

§ VII. — APPENDICE.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES POLYÈDRES.

THÉORÈME.

688. *Dans tout polyèdre convexe, le nombre des arêtes augmenté de* 2 *est égal au nombre des faces augmenté de celui des sommets.*

Soient A le nombre des arêtes, F celui des faces, et S celui des som-

mets du polyèdre; il faut démontrer l'égalité

$$F + S = A + 2. \tag{1}$$

Considérons d'abord une figure plane formée de polygones convexes juxtaposés sans laisser de vides, et désignons par F', S', A' le nombre des polygones, celui des sommets et celui des côtés. Décomposons ces polygones en triangles à l'aide de diagonales menées, dans chacun d'eux, d'un sommet aux sommets non voisins. d étant le nombre total des diagonales, $F' + d$ sera le nombre total des triangles, $A' + d$ le nombre total des côtés; le nombre S' des sommets sera resté le même. Supposons maintenant que l'on enlève successivement les différents triangles sauf un, en commençant par ceux qui reposent sur le bord et en continuant par ceux dont un ou deux côtés auront été amenés, par les suppressions déjà faites, à faire partie du contour extérieur. Soit t' le nombre des triangles qui, au moment où on les enlève, ont un côté sur le bord, et t'' celui des triangles qui en ont deux. La suppression d'un triangle du premier genre détruira seulement un côté et celle d'un triangle du second genre détruira deux côtés et un sommet.

Par suite, quand on aura enlevé tous les triangles, sauf un, le nombre des triangles détruits étant $t' + t''$, celui des côtés détruits sera $t' + 2t''$ et celui des sommets supprimés sera t''. Donc, comme le nombre des triangles restants est alors égal à 1 et que celui des côtés restants, aussi bien que celui des sommets restants, est égal à 3, on aura

$$F' + d - (t' + t'') = 1, \quad A' + d - (t' + 2t'') = 3, \quad S' - t'' = 3$$

d'où

$$F' + S' - A' = 1. \tag{2}$$

Ce lemme établi, revenons au polyèdre convexe. Si on supprime l'une des faces, les faces restantes, dont le nombre sera F — 1, pourront être considérées comme formant une suite de polygones convexes juxtaposés et renfermés dans le contour de la face supprimée, et nous pourrons raisonner sur ce réseau comme s'il était plan, puisque le théorème ne dépend que des nombres des polygones, des sommets et des arêtes. La relation (2) doit donc être satisfaite par les valeurs

$$A' = A, \quad S' = S, \quad F' = F - 1;$$

on tombe ainsi sur la relation (1), qui est due à Euler (*Mémoires de Pétersbourg*, 1758) (1).

COROLLAIRES.

689. Désignons par $t, q, p, h, h', o, \ldots$ les nombres des faces triangulaires, quadrangulaires, pentagonales, hexagonales, heptagonales, octogo-

(1) *Voir* une autre demonstration, après la mesure des aires spheriques.

nales, ... Chaque arête étant commune à deux faces, on aura évidemment

$$F = t + q + p + h + h' + o + \ldots, \tag{2}$$

$$2A = 3t + 4q + 5p + 6h + 7h' + 8o + \ldots. \tag{3}$$

Soient T, Q, P, H, H', O, ... les nombres d'angles triedres, tétraèdres, pentaèdres, hexaèdres, ... du polyèdre proposé; chaque arête unissant deux sommets, on aura de même

$$S = T + Q + H + H' + O + \ldots. \tag{4}$$

$$2A = 3T + 4Q + 5P + 6H + 7H' + 8O + \ldots. \tag{5}$$

D'après l'égalité (3), *le nombre des faces dont le nombre des côtés est impair* (c'est-à-dire le nombre $t + p + h' + \ldots$) *est toujours pair;* d'après l'égalité (5), *le nombre des angles polyèdres ou des sommets dont le nombre des arêtes est impair* (c'est-à-dire le nombre $T + P + H' + \ldots$) *est toujours pair.*

690. On peut exprimer F en fonction de T, Q, P, H, H', O, ...; il suffit d'éliminer S et A entre les relations (1), (4) et (5). On trouve

$$2F = 4 + T + 2Q + 3P + 4H + 5H' + 6O + \ldots. \tag{6}$$

De même, on peut exprimer S en fonction de t, q, p, h, h', o, ...; il suffit d'éliminer F et A entre les relations (1), (2) et (3). On trouve

$$2S = 4 + t + 2q + 3p + 4h + 5h' + 6o + \ldots. \tag{7}$$

Scolie.

691. *Si l'on conçoit la surface d'un polyèdre convexe décomposé en plusieurs portions, chaque portion étant une face seule ou le système de plusieurs faces voisines, le théorème d'Euler a encore lieu entre le nombre des portions dont il s'agit, le nombre des arêtes qui servent de limites à ces mêmes portions, et le nombre des sommets compris entre ces arêtes.*

En effet, que les droites qui terminent chaque portion soient ou non dans un même plan, les nombres considérés ne varient pas. Or, dans la première hypothèse, sans rien changer à ces mêmes nombres, on pourrait former un nouveau polyèdre en substituant à chaque portion une face plane terminée au même contour, et le théorème d'Euler serait applicable à ce polyèdre.

Toutes les formules que nous venons d'établir subsistent dans ce cas; seulement, t est alors le nombre des portions de la surface, terminées par un contour triangulaire; q, p, ... les nombres des portions dont le contour est quadrangulaire, pentagonal, etc.

THÉORÈME.

692. *Dans tout polyèdre convexe, le nombre des faces triangulaires, augmenté de celui des angles trièdres, est au moins égal à huit.*

En effet, si dans la relation (1), qu'on peut écrire

$$4F + 4S = 4A + 8,$$

on remplace F par la valeur (2), S par la valeur (4), et 4 A par la somme des valeurs (3) et (5), on trouve

$$t + T = 8 + (p + P) + 2(h + H) + 3(h' + H') + 4(o + O) + \dots$$

D'après cela, *il n'existe aucun polyèdre convexe qui ne renferme ni face triangulaire, ni angle trièdre.*

THÉORÈME.

693. 1° *Il n'existe aucun polyèdre convexe dont toutes les faces aient plus de cinq côtés ;* 2° *il n'existe aucun polyèdre convexe dont tous les angles polyèdres aient plus de cinq arêtes.*

En effet :

1° Si, dans l'inégalité $2A > 3S$, qui résulte de la comparaison des relations (4) et (5), on remplace A et S par les valeurs (3) et (7), on trouve la formule

$$3t + 2q + p > 12 + (h' + 2o + \dots),$$

qui prouve que t, q et p ne peuvent être nuls à la fois.

2° Si, dans l'inégalité $2A > 3F$, qui résulte de la comparaison des relations (2) et (3), on remplace A et F par les valeurs (5) et (6), on trouve la formule

$$3T + 2Q + P > 12 + (H' + 2O + \dots),$$

qui prouve que T, Q et P ne peuvent être nuls à la fois.

SCOLIE.

694. La symétrie de la formule d'Euler par rapport aux nombres F et la similitude des équations (2) et (4), (3) et (5) entraînent dans relations qu'on peut en déduire une corrélation que le lecteur a sans déjà remarquée.

THÉORÈME.

695. *Il ne peut exister que cinq espèces de polyèdres convexes toutes les faces aient le même nombre n de côtés et dont tous les polyèdres aient le même nombre m d'arêtes.*

En effet, chaque arête appartenant à deux faces et joignant deux sommets, on a

$$2A = nF = mS.$$

L'élimination de A et de S entre ces équations et la formule d'Euler donne

$$F = \frac{4m}{2(m+n) - mn}.$$

Pour $n = 3$, cette relation devient

$$F = \frac{4m}{6 - m},$$

et l'on ne peut donner alors à m que les valeurs 3, 4 et 5, auxquelles répondent respectivement les valeurs $F = 4$, $F = 8$, $F = 20$.

Pour $n = 4$ ou $n = 5$, on a

$$F = \frac{2m}{4 - m} \quad \text{ou} \quad F = \frac{4m}{10 - 3m}.$$

On ne peut donner dans les deux cas à m que la valeur 3, et il en résulte $F = 6$ ou $F = 12$.

Pour $n = 6$, on a

$$F = \frac{m}{3 - m},$$

et l'on ne peut donner à m aucune valeur. Il en est de même *a fortiori* pour $n > 6$; ce résultat était d'avance indiqué par le théorème du n° 693.

Il n'y a donc que cinq espèces de polyèdres convexes dont toutes les faces aient le même nombre de côtés et tous les angles polyèdres le même nombre d'arêtes : ce sont le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre à faces triangles; l'hexaèdre à faces quadrilatères; le dodécaèdre à faces pentagones.

THÉORÈME.

696. *L'angle droit étant pris pour unité, la somme des angles de toutes les faces d'un polyèdre convexe est égale à quatre fois le nombre des sommets diminué de* 2.

L'angle droit étant l'unité d'angle, on sait que, pour une face quelconque de n côtés, la somme des angles est $2n - 4$. En désignant par n, n', n'', ... les nombres de côtés des différentes faces, on aura donc pour toutes les faces

$$(2n - 4) + (2n' - 4) + (2n'' - 4) + \dots$$

Cette suite contiendra d'ailleurs F termes. La somme cherchée a donc pour expression

$$2(n + n' + n'' + \dots) - 4F.$$

Chaque côté appartenant à deux faces, la parenthèse est égale à 2A, et l'on obtient la formule

$$4(A - F) \quad \text{ou} \quad 4(S - 2),$$

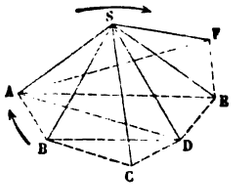
d'après le théorème d'Euler.

CONDITIONS D'ÉGALITÉ ET DE SIMILITUDE DE DEUX POLYÈDRES CONVEXES.

LEMME.

697. *Si, dans un angle polyèdre convexe dont toutes les faces moins une seule demeurent constantes, un ou plusieurs angles dièdres non adjacents à la face qui peut varier augmentent ou diminuent tous à la fois, cette face elle-même augmente ou diminue.*

Fig. 382.



Soient (*fig.* 382) l'angle polyèdre SABCDEF et, dans cet angle, SAB la seule face qui puisse varier. Supposons d'abord qu'un seul angle dièdre SD augmente ou diminue. Menons les plans ASD, BSD. Les deux angles polyèdres SBCD, SADEF ne changent ni de forme ni de grandeur, d'après les conditions de constance imposées à leurs faces et à leurs angles dièdres. Par suite, si l'angle dièdre SD augmente ou diminue, ce ne peut être que par sa partie ASDB ; et, comme ce dernier angle dièdre est compris dans l'angle trièdre SABD entre deux faces invariables de grandeur, la face opposée ASB augmente ou diminue (569).

Si plusieurs angles dièdres non adjacents à la face ASB augmentent ou diminuent à la fois, il en sera de même de cette face ; car on peut faire varier isolément, et l'un après l'autre, les angles dièdres considérés et, d'après ce qui précède, chaque changement partiel en produira toujours un de même nature sur la face ASB.

COROLLAIRE.

698. Si, toutes les faces demeurant constantes, certains dièdres d'un angle polyèdre viennent à changer, il est impossible que tous varient dans le même sens, c'est-à-dire qu'il est impossible que tous augmentent ou que tous diminuent.

LEMME.

699. *Dans un angle polyèdre convexe ayant plus de trois faces, toutes les faces demeurant constantes et l'angle polyèdre restant convexe, on suppose que plusieurs angles dièdres ont, les uns augmenté, les autres diminué; si alors, en faisant le tour de l'angle polyèdre, on affecte du signe + l'arête de chaque angle dièdre augmenté, du signe — l'arête de chaque angle dièdre diminué, on trouvera toujours dans le tour entier au moins quatre variations de signes.*

Il est impossible qu'il n'y ait que deux variations de signes, c'est-à-dire il est impossible qu'à une série de signes + succède une série de signes — qui ramène au premier signe +. En effet, si (*fig.* 382), les arêtes SA, SF, SE étant affectées du signe +, les arêtes suivantes SD, SC, SB étaient affectées du signe —, la face ASE qui sépare les deux angles polyèdres SAFE, SEDCBA augmenterait dans l'un et diminuerait dans l'autre (697).

Puisqu'il y a plus de deux variations de signes et qu'on doit fermer le circuit en rejoignant le signe qui a servi de point de départ, il est impossible que le nombre des variations soit impair. Puisque ce nombre est pair et plus grand que 2, il est au moins égal à 4.

THÉORÈME.

700. *Dans un polyèdre convexe dont toutes les faces sont constantes, les angles dièdres sont aussi constants.*

« En effet, supposons, contre l'énoncé ci-dessus, que l'on puisse faire » varier les inclinaisons des faces adjacentes, sans détruire le polyèdre; » et pour simplifier encore la question, supposons d'abord que l'on puisse » faire varier toutes les inclinaisons à la fois. Les inclinaisons sur certaines » arêtes varieront en plus, les inclinaisons sur d'autres arêtes varieront » en moins; et en comparant deux à deux, relativement aux signes de » leurs variations, les inclinaisons des arêtes qui, dans chaque face, abou- » tissent aux mêmes sommets, on trouvera, en passant successivement » d'une arête à l'autre, plusieurs changements de signes. C'est le nombre » de ces changements que nous allons chercher à déterminer (1). »

Il suit du lemme précédent que chaque angle polyèdre présente sur ses arêtes au moins quatre changements de signes. Le nombre des changements de signes obtenus en considérant tous les angles polyèdres du polyèdre serait donc au moins égal à 4S. Or il est aisé de voir que cela est impossible.

---

(1) Cauchy, *Journal de l'École Polytechnique*, XVIe Cahier, p. 96.

Remarquons qu'en faisant le tour de chaque sommet ou en faisant celui du périmètre de chaque face on doit trouver le même nombre total de variations de signes. En effet, chaque variation de signes autour d'un sommet correspond à deux arêtes de signes différents qui se suivent sur le périmètre d'une même face, et réciproquement.

Mais, sur un périmètre, le nombre des variations ne peut dépasser le nombre des côtés et ne peut être impair ; car, puisqu'on doit revenir au point de départ, chaque variation en entraîne nécessairement une seconde. Chaque face triangulaire ne peut donc fournir plus de deux changements de signes ; les quadrilatères et les pentagones ne peuvent en fournir plus de quatre ; de même, les hexagones et les heptagones plus de six, et ainsi de suite. Toutes les faces ou tous les sommets du polyèdre ne pourront donc donner plus de changements de signes qu'il n'y a d'unités dans la somme

$$2t + 4q + 4p + 6h + 6h' + 8o + \dots.$$

Or cette somme est inférieure à 4 S ; car on a (690), d'après la formule (7),

$$4S = 8 + 2t + 4q + 6p + 8h + 10h' + 12o + \dots.$$

Il faut en conclure qu'il est impossible que les inclinaisons sur les arêtes changent toutes à la fois.

« Si l'on suppose, en second lieu, que, dans le polyèdre donné, non-
» seulement les faces, mais encore les inclinaisons sur plusieurs arêtes
» restent invariables, et que cependant on puisse, sans détruire le po-
» lyèdre, faire varier les inclinaisons sur les arêtes restantes, alors, pour
» démontrer l'absurdité de l'hypothèse, il suffira de concevoir la surface
» du polyèdre décomposée en autant de portions que les arêtes sur les-
» quelles les inclinaisons varient forment de contours différents, et d'ap-
» pliquer aux portions, aux arêtes qui les terminent, et aux sommets
» compris entre ces arêtes, les mêmes raisonnements que nous avons ap-
» pliqués, dans l'hypothèse précédente, aux faces, aux arêtes et aux som-
» mets du polyèdre (1). » On y parviendra en s'appuyant encore sur le lemme précédent et sur le scolie du n° 691.

COROLLAIRES.

701. Il suit du théorème précédent que *deux polyèdres convexes, compris sous un même nombre de faces égales, sont égaux ou symétriques*, suivant que les faces égales sont ou non semblablement placées.

702. Il suit encore du théorème précédent que, *lorsque deux polyèdres convexes sont compris sous un même nombre de faces semblables, le*

(1) CAUCHY, *loc. cit.*

second est semblable au premier ou à un troisième polyèdre symétrique du premier, suivant que les faces semblables sont ou non semblablement placées.

PROBLÈME.

703. *Chercher le nombre de conditions nécessaires pour déterminer un polyèdre convexe.*

1° Le polyèdre est d'une nature déterminée, c'est-à-dire qu'on connaît pour ce polyèdre les nombres A, F, S, t, q, p, h, h', ...

Prenons pour base une des faces du polyèdre. Si elle a n côtés, il faut $2n-3$ conditions pour la déterminer. Il y a hors de cette base $S-n$ sommets. Pour déterminer un point dans l'espace, il faut trois conditions. On aurait donc en tout $2n-3+3(S-n)$, ou $3S-n-3$ conditions. Mais les sommets qui répondent à une même face sont dans un même plan, et trois points suffisent pour déterminer un plan. Par conséquent, pour tous les sommets d'une même face, en sus des trois premiers, il ne faut réellement que deux conditions. On doit donc diminuer $3(S-n)$ de la somme $(n'-3)+(n''-3)+(n'''-3)+\ldots$, en désignant par n', n'', n''', ... les nombres de côtés des $F-1$ faces qui restent en dehors de la base choisie. Le nombre de conditions demandé est donc finalement

$$3(F+S-2)-(n+n'+n''+n'''+\ldots);$$

mais (688, 689)

$$n-n'+n''+n'''+\ldots=2A \quad \text{et} \quad F+S-2=A.$$

Le nombre cherché se réduit donc à A. Ainsi, *le nombre des données nécessaires pour déterminer un polyèdre,* dans les conditions indiquées, *est égal au nombre de ses arêtes.*

« Remarquez cependant que les données dont il s'agit ne doivent pas » être prises au hasard parmi les lignes et les angles qui constituent les » éléments du polyèdre ; car, quoiqu'on eût autant d'équations que d'in- » connues, il pourrait se faire que certaines relations entre les quantités » connues rendissent le problème indéterminé. Ainsi, il semblerait, d'après » le théorème qu'on vient de trouver, que la connaissance des arêtes » seules suffit en général pour déterminer un polyèdre; mais il y a des » cas où cette connaissance n'est pas suffisante. Par exemple, étant donné » un prisme non triangulaire quelconque, on pourra former une infinité » d'autres prismes qui auront des arêtes égales et placées de la même ma- » nière. Car, dès que la base a plus de trois côtés, on peut, en conser- » vant les côtés, changer les angles et donner ainsi à cette base une infi- » nité de formes différentes ; on peut aussi changer la position de l'arête » longitudinale du prisme par rapport au plan de la base ; enfin, on peut » combiner ces deux changements l'un avec l'autre, et il en résultera

» toujours un prisme dont les arêtes ou côtés n'auront pas changé. D'où » l'on voit que les arêtes seules ne suffisent pas dans ce cas pour déter- » miner le polyèdre. Les données qu'il convient de prendre sont celles » qui ne laissent aucune indétermination (¹). »

2° La nature du polyèdre n'est pas déterminée, et l'on connaît seulement le nombre de ses sommets.

Prenons trois de ces sommets à volonté en construisant un triangle où il entre trois des éléments donnés. Si l'on considère ce triangle comme base, il y a S — 3 sommets hors de cette base, et la détermination de chacun d'eux exige trois conditions. Le nombre cherché est donc ici $3+3(S-3)$ ou $3S-6$.

SCOLIE.

704. Si un côté et A — 1 angles déterminent un polyèdre de nature donnée, un autre côté pris à volonté et les mêmes angles déterminent un polyèdre semblable au premier. Donc, *pour que deux polyèdres de même nature soient semblables, il faut* A — 1 *conditions.*

Si les deux polyèdres ne sont pas de nature déterminée, et s'ils ont seulement le même nombre S d'angles polyèdres, il faut 3S — 7 conditions pour qu'ils soient semblables.

RELATION ENTRE L'ÉTENDUE D'UNE FIGURE PLANE ET CELLE DE SA PROJECTION ORTHOGONALE.

THÉORÈME.

705. *La projection d'une droite* AB *sur un axe* XY *est égale au produit de la longueur* AB *de cette droite par le cosinus de l'angle aigu qu'elle fait avec l'axe.*

Fig. 383.

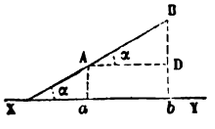
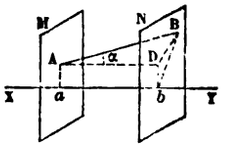


Fig. 384.



Nous supposons ici (*fig.* 384) que la droite AB et l'axe XY ne soient

(¹) LEGENDRE, *Éléments de Géométrie*, 14ᵉ édition. Note VIII.

pas dans un même plan, sans quoi le théorème ne différerait pas de celui qui a été démontré déjà en Géométrie plane (Appendice du IIIe Livre). Dans notre hypothèse, la projection *ab* est égale à la portion de l'axe XY comprise entre deux plans M et N menés par A et B perpendiculairement à cet axe, ou bien encore à la portion AD de la parallèle à l'axe menée par le point A jusqu'à la rencontre du plan N. Or le triangle rectangle ADB donne

$$AD = AB\cos\alpha \quad \text{ou} \quad ab = AB\cos\alpha.$$

THÉORÈME.

706. *L'aire de la projection d'un triangle sur un plan est égale à l'aire de ce triangle multipliée par le cosinus de l'angle aigu que forme le plan du triangle avec le plan de projection.*

Fig. 385.

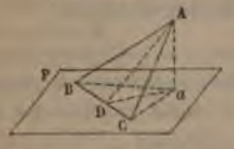
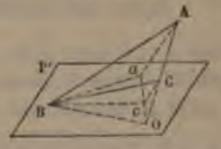


Fig. 386.



Supposons d'abord que le triangle proposé ABC ait un de ses côtés BC situé dans le plan P de projection (*fig.* 385). Si de la projection *a* du sommet A on mène la perpendiculaire *a*D sur BC, la droite AD sera, en vertu du théorème des trois perpendiculaires, la hauteur du triangle ABC. Or, le rapport des triangles *a*BC, ABC, de même base BC, est égal au rapport des hauteurs *a*D et AD, c'est-à-dire au cosinus de l'angle aigu AD*a* qui mesure l'inclinaison des deux plans.

Considérons actuellement un triangle ABC placé d'une manière quelconque par rapport au plan de projection (*fig.* 386), et menons par le sommet B le plus voisin de ce plan un plan P′ qui lui soit parallèle. La projection *a*B*c* du triangle ABC sur le plan P′ est égale à celle qu'on obtiendrait en le projetant sur le plan primitif. Or, soient O le point où le côté AC prolongé rencontre le plan P′; et α l'angle du plan ABC et du plan de projection; le triangle ABC étant la différence de deux triangles ABO, CBO, qui ont un côté BO dans le plan P′, on a

$$\begin{aligned} a\mathrm{B}c &= a\mathrm{BO} - c\mathrm{BO} = \mathrm{ABO}\cos\alpha - \mathrm{CBO}\cos\alpha \\ &= (\mathrm{ABO} - \mathrm{CBO})\cos\alpha = \mathrm{ABC}\cos\alpha. \end{aligned}$$

COROLLAIRE.

707. *Le théorème s'étend à la projection de l'aire d'un polygone plan et même d'une courbe plane fermée.*

Il suffit de faire voir que la proposition a lieu pour un polygone, puisqu'une courbe n'est qu'un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

Or, soient T, T', T'', ... les aires des triangles qui composent le polygone plan P et t, t', t'', ... les triangles correspondants du polygone p, qui est la projection de P ; chacun des triangles de la deuxième série est évidemment la projection du triangle correspondant de la première, et si l'on appelle α l'inclinaison du plan du polygone P sur le plan de projection, on a

$$t = \mathrm{T}\cos\alpha, \quad t' = \mathrm{T}'\cos\alpha, \quad t'' = \mathrm{T}''\cos\alpha, \quad \ldots,$$

d'où, en ajoutant,

$$t + t' + t'' + \ldots = (\mathrm{T} + \mathrm{T}' + \mathrm{T}'' + \ldots)\cos\alpha \quad \text{ou} \quad p = \mathrm{P}\cos\alpha.$$

CENTRE DES DISTANCES PROPORTIONNELLES.

708. Soient A et B deux points donnés, α un *coefficient* ou nombre fixe, d'ailleurs positif ou négatif, correspondant au point A, et 6 un coefficient relatif au point B. On sait que, sur la droite indéfinie qui passe par les points A et B, il existe un point unique M tel, que le rapport $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$ soit égal en grandeur et en signe à $-\frac{6}{\alpha}$. Projetons les trois points A, B, M sur un plan quelconque P, parallèlement à une direction donnée arbitrairement, et proposons-nous de déterminer la longueur de la projetante MM_1 ou z du point M en fonction des coefficients α et 6, et des projetantes $\mathrm{AA}_1 = a$ et $\mathrm{BB}_1 = b$ des points A et B.

Il y a deux cas à distinguer, suivant que les coefficients α et 6 sont de même signe ou de signes contraires.

Fig. 387.

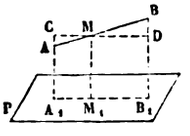
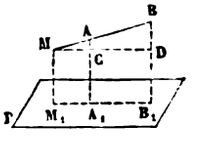


Fig. 388.



Dans le premier cas (*fig.* 387), le rapport $-\frac{6}{\alpha}$ est négatif, et, par

suite, le point M est situé entre A et B. D'ailleurs, en menant CMD parallèle au plan P, on voit que le rapport $\frac{MA}{MB}$ est égal, en valeur absolue, à $\frac{AC}{BD} = \frac{z-a}{b-z}$; on a donc $-\frac{6}{\alpha} = \frac{MA}{MB} = -\frac{z-a}{b-z}$, d'où

$$z = \frac{a\alpha + b6}{\alpha + 6}.$$

Dans le second cas (*fig.* 388), le rapport $-\frac{6}{\alpha}$ est positif et, par suite, le point M est situé sur l'un des prolongements de AB. On a alors

$$-\frac{6}{\alpha} = \frac{MA}{MB} = \frac{a-z}{b-z} \quad \text{ou} \quad \frac{z-a}{z-b},$$

d'où

$$(1) \qquad z = \frac{a\alpha + b6}{\alpha + 6}.$$

C'est la même formule que dans le premier cas. $\alpha + 6$ sera le coefficient attribué au point M.

709. Nous avons supposé jusqu'ici que les points A, B, M étaient situés d'un même côté du plan P ; mais cette restriction n'est pas nécessaire, et la formule (1) subsiste pour toutes les dispositions possibles de la figure, pourvu qu'on regarde les nombres a, b, z, qui mesurent les projetantes, comme positifs pour les points situés d'un côté du plan P, et comme négatifs pour les points situés du côté opposé.

En effet, les points A, B, M, étant situés d'une manière quelconque par rapport au plan P, menons un plan P' parallèle à P et à une distance h assez grande pour que les trois points A, B, M, soient au-dessus du plan P'. Alors, si a', b', z' mesurent les projetantes relatives à ce plan P', on aura (708)

$$(\alpha + 6)\, z' = a'\alpha + b'6.$$

En retranchant de cette égalité l'identité

$$(\alpha + 6)\, h = h\alpha + h6,$$

on obtient la relation

$$(\alpha + 6)(z' - h) = (a' - h)\alpha + (b' - h)6.$$

Mais, en ayant égard aux signes des projetantes, on a toujours

$$z' - h = z, \quad a' - h = a, \quad b' - h = b,$$

a, b, z étant les projetantes relatives au plan P. Donc la formule

$$(\alpha + 6)z = a\alpha + b6$$

subsiste dans tous les cas.

710. Cela posé, soient A, B, C, D, ..., L autant de points qu'on voudra, situés d'une manière quelconque dans l'espace ; désignons par α, 6, γ, δ, ..., λ les coefficients correspondants, et par a, b, c, d, ..., l les nombres positifs ou négatifs qui mesurent les droites projetant obliquement ou orthogonalement les points A, B, C, D, ..., L, sur un plan quelconque P.

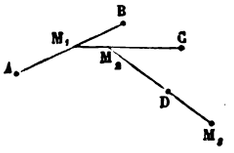
Sur la droite AB (*fig.* 389) prenons le point M_1 tel, que

$$\frac{M_1A}{M_1B} = -\frac{6}{\alpha}.$$

La projetante z_1 de ce point sera, en grandeur et en signe,

$$z_1 = \frac{a\alpha + b6}{\alpha + 6}.$$

Fig. 389.



Menons M_1C et prenons sur cette droite le point M_2 tel, que

$$\frac{M_2M_1}{M_2C} = -\frac{\gamma}{\alpha + 6}.$$

La projetante z_2 de ce point sera

$$z_2 = \frac{z_1(\alpha + 6) + c\gamma}{(\alpha + 6) + \gamma} = \frac{a\alpha + b6 + c\gamma}{\alpha + 6 + \gamma}.$$

En menant de même M_2D et prenant sur cette droite un point M_3 tel, que

$$\frac{M_3M_2}{M_3D} = -\frac{\delta}{\alpha + 6 + \gamma},$$

et continuant ainsi jusqu'au dernier point L, on obtiendra finalement un point M dont la projetante z aura pour expression

$$z = \frac{a\alpha + b6 + c\gamma + \ldots + l\lambda}{\alpha + 6 + \gamma + \ldots + \lambda}. \qquad (2)$$

On dit que ce point M est le *centre des distances proportionnelles* des points donnés (A, α) (B, β), (C, γ),..., (L, λ). On arrive d'ailleurs au même point M dans quelque ordre que l'on joigne les points donnés; cela résulte de ce que la formule (2), qui exprime la distance du point M à un plan quelconque P, ne porte aucune trace de l'ordre suivi.

Dans le cas où tous les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ sont égaux entre eux; le point M prend le nom de *centre des moyennes distances;* sa distance à un plan quelconque, comptée parallèlement à une droite arbitraire, est donnée par la formule

$$z = \frac{a + b + c + \ldots + l}{n},$$

n étant le nombre des points considérés.

711. La formule (2), qu'on peut écrire

$$z\Sigma\alpha = \Sigma a\alpha, \tag{3}$$

en désignant en général par la notation $\Sigma\alpha$ la somme de tous les coefficients et par $\Sigma a\alpha$ la somme de tous les produits $a\alpha$, $b\beta, \ldots, l\lambda$, exprime que *la somme des produits obtenus en multipliant la projetante de chaque point par son coefficient est égale au produit de la projetante du centre des distances proportionnelles par la somme des coefficients.*

Pour que z soit nul, il faut et il suffit que $\Sigma a\alpha$ le soit, car on suppose expressément que la somme $\Sigma\alpha$ des coefficients donnés est différente de zéro. Donc, *pour qu'un plan passe par le centre des distances proportionnelles, il faut et il suffit que la somme des produits obtenus en multipliant chaque projetante relative à ce plan par le coefficient correspondant soit égale à zéro.* Cette condition se réduit à $\Sigma a = 0$, lorsqu'il s'agit du centre des moyennes distances.

712. Dans le cas où tous les points donnés A, B, C, ..., L sont dans un même plan Q, le centre M est aussi dans ce plan. Si l'on prend alors pour direction des projetantes une parallèle au plan Q, tous les pieds des projetantes seront situés sur l'intersection XY du plan Q et du plan P de projection ; cela revient donc à projeter sur une droite quelconque XY du plan Q.

713. Soient A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ... deux groupes de points; M le centre des distances proportionnelles du premier groupe, et Z le centre des distances proportionnelles du système formé par tous les points des deux groupes.

Appelons α_1, α_2, ..., β_1, β_2, ... les coefficients, a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ... les projetantes des points donnés, et désignons par m et par z les proje-

tantes de M et de Z. On aura, par la formule (2),

$$m\Sigma\alpha = \Sigma a\alpha, \quad z(\Sigma\alpha + \Sigma\beta) = \Sigma a\alpha + \Sigma b\beta,$$

d'où, en posant $\Sigma\alpha = \mu$,

$$z(\mu + \Sigma\beta) = m\mu + \Sigma b\beta.$$

Le point Z est donc le centre des distances proportionnelles des points M, B_1, B_2, ..., quand on donne à M un coefficient égal à μ.

Ainsi, *dans la recherche du centre des distances proportionnelles d'un système de points, on peut remplacer plusieurs de ces points par leur centre particulier, pourvu qu'on donne à ce centre un coefficient égal à la somme des coefficients des points correspondants.*

Inversement, *on peut remplacer un point par plusieurs autres, dont il est le centre, et dont la somme des coefficients est égale à son coefficient.*

CENTRE DE GRAVITÉ.

714. On appelle *centre de gravité d'une ligne droite* AB le centre des moyennes distances de ses extrémités A et B, c'est-à-dire par conséquent le milieu de cette droite.

Le *centre de gravité d'une ligne brisée* plane est le centre des distances proportionnelles des centres de gravité des divers côtés de ce contour polygonal, ces centres ayant des coefficients proportionnels aux côtés correspondants.

Il est aisé de voir, d'après cela, que *le centre de gravité du périmètre d'un triangle* ABC *est le centre* O *du cercle inscrit au triangle* A'B'C' *formé en joignant les milieux des côtés du triangle primitif* (*fig.* 390). En effet,

Fig. 390.

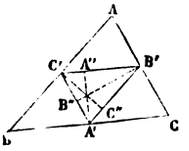
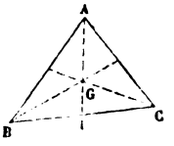


Fig. 391.



si l'on mène les trois hauteurs A'A'', B'B'', C'C'' du triangle A'B'C', et si l'on applique la formule (3) en projetant successivement sur chacun des côtés de ce triangle, on trouve

$$\frac{AB.C'C''}{AB + BC + CA}, \quad \frac{BC.A'A''}{AB + BC + CA}, \quad \frac{CA.B'B''}{AB + BC + CA},$$

pour les distances du centre de gravité aux trois droites A'B', B'C', C'A'.

Or, comme les numérateurs de ces trois fractions représentent chacun l'aire du triangle ABC, on voit que le centre de gravité cherché est équidistant des trois côtés du triangle A'B'C'.

715. On appelle centre de gravité de l'aire d'un triangle, ou plus rapidement *centre de gravité d'un triangle*, le centre des moyennes distances des trois sommets.

Il est aisé de voir (*fig.* 391) que *le centre de gravité* G *d'un triangle* ABC *est le point de concours des médianes de ce triangle*; car, pour avoir ce centre, il faut, d'après la construction même du n° 710, prendre le milieu I de BC, puis diviser IA de telle sorte que $\frac{GI}{GA} = -\frac{1}{2}$. Donc le point G est sur la médiane AI, au tiers de sa longueur à partir de la base, etc.

716. Un polygone ABCDE étant donné (*fig.* 392), si on le décompose en triangles, en joignant tous ses sommets à un point O pris dans son plan,

Fig. 392.

et que l'on cherche le centre G des distances proportionnelles des centres de gravité G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 de ces triangles, en leur attribuant des coefficients proportionnels aux aires des triangles correspondants, on aura ce qu'on appelle le *centre de gravité du polygone*. Si le point O est pris à l'intérieur du polygone, tous les triangles sont additifs, et l'on donne à tous les coefficients le signe +; si le point O est pris à l'extérieur du polygone, il y a des triangles additifs et des triangles soustractifs, et l'on donne pour coefficients aux centres de gravité des triangles additifs les aires de ces triangles précédées du signe +, et aux centres de gravité des triangles soustractifs les aires de ces triangles précédées du signe —.

Pour légitimer cette définition, il faut prouver que la position du centre de gravité G du polygone est indépendante de la position qu'occupe le point O dans son plan. A cet effet, projetons la figure sur un plan quelconque P, en donnant aux projetantes une direction perpendiculaire au plan ABCDE. Soient g, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 les projetantes des points G, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, et γ, γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, γ_5 les coefficients correspondants, c'est-à-dire les aires du polygone ABCDE et des triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OEA, prises avec les signes convenables.

La formule (3) donnant

$$\gamma.g = \gamma_1.g_1 + \gamma_2.g_2 + \gamma_3.g_3 + \gamma_4.g_4 + \gamma_5.g_5,$$

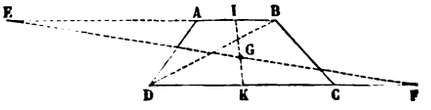
$\gamma.g$ représente le volume du tronc de prisme droit dont ABCDE est la base. En effet g_1, projetante du point G_1, est égal au tiers des projetantes des points O, A et B, puisque g_1 est le centre des moyennes distances des trois sommets du triangle OAB. Donc $\gamma_1.g_1$ représente (653) le volume du tronc du prisme droit dont OAB est la base. De même, les produits $\gamma_2.g_2$, $\gamma_3.g_3$, ... représentent les volumes des troncs de prisme construits sur OBC, OCD, ... D'ailleurs, comme les facteurs γ_1, γ_2, γ_3, ... sont positifs ou négatifs, suivant que les triangles correspondants sont additifs ou soustractifs, on voit que les produits $\gamma_1.g_1$, $\gamma_2.g_2$, ... ont naturellement le signe + ou le signe −, suivant que les troncs de prisme qu'ils représentent sont additifs ou soustractifs. Donc, enfin, le second membre de la relation précédente exprime la mesure du volume du tronc de prisme construit sur le polygone ABCDE, et, en désignant ce volume par V, on a

$$\gamma.g = V \quad \text{ou} \quad g = \frac{V}{\gamma}.$$

La distance du point G à un plan quelconque P, comptée perpendiculairement au plan ABCDE, est donc indépendante de la position que le point O occupe dans le plan du polygone.

717. Cherchons, par exemple, le centre de gravité d'un trapèze ABCD (*fig.* 393).

Fig. 393.



D'après le théorème précédent, le point G est le centre des distances proportionnelles des centres de gravité des triangles ABD, BDC, ces points ayant des coefficients proportionnels aux aires de ces triangles, c'est-à-dire à leurs bases AB et DC, puisqu'ils ont même hauteur, ou à 3AI et 3KC, les points I et K étant les milieux de AB et de DC. Mais (713) on peut remplacer le centre de gravité du triangle ABD par le système des trois points A, B, D, affectés chacun d'un coefficient égal à AI, et le centre de gravité du triangle BDC par le système des trois points B, D, C affectés chacun d'un coefficient égal à KC. On a donc en somme à prendre le centre des distances proportionnelles des quatre points A, B, C, D, affectés respectivement de coefficients égaux à AI, AI + KC, KC, AI + KC

Or, les points A et B peuvent être à leur tour remplacés par le point I, ayant $2AI + KC$ pour coefficient, et les points D et C par le point K, ayant $2KC + AI$ pour coefficient. Le centre de gravité G du trapèze, étant le centre des distances proportionnelles de ces deux points I et K, s'obtiendra en divisant IK en deux parties telles que

$$\frac{GI}{GK} = -\frac{2KC + AI}{2AI + KC} = -\frac{DC + AI}{AB + KC}.$$

Par suite, si l'on prolonge BA d'une longueur AE égale à DC, et DC d'une longueur CF égale à AB, la droite EF coupera IK au point demandé G.

718. Pour déterminer les centres de gravité des volumes, on suit une marche entièrement analogue à celle qu'on vient d'exposer.

Après avoir défini le *centre de gravité d'un tétraèdre* comme étant le centre des moyennes distances de ses sommets, on définira le *centre de gravité d'un polyèdre* quelconque comme étant le centre des distances proportionnelles des centres de gravité des tétraèdres additifs ou soustractifs qu'on obtient en joignant à tous les sommets du polyèdre un point O pris à volonté dans l'espace ; ces centres de gravité doivent être d'ailleurs affectés chacun d'un coefficient proportionnel au volume du tétraèdre correspondant. On démontrera, par un raisonnement semblable à celui du n° 716, que la position du centre de gravité ainsi défini ne dépend pas de la position du point O.

Nous laissons au lecteur le soin de développer ce sujet et d'en faire des applications. Les problèmes de ce genre ont leur véritable place dans la Statique, où l'on aperçoit mieux leur utilité. Les centres de gravité ne jouent qu'un rôle fort restreint en Géométrie pure, où ils interviennent cependant d'une manière intéressante pour l'évaluation de quelques aires et de certains volumes, comme nous allons le voir immédiatement pour le tronc de prisme quelconque, et comme nous le montrerons plus tard à la suite de l'étude des corps ronds.

Fig. 394.

Nous nous arrêterons néanmoins un instant sur le *centre de gravité du*

tétraèdre. En remplaçant (*fig.* 394) les deux sommets **A** et **B** par leur milieu I affecté du coefficient 2 et, de même, les sommets **C** et **D** par leur milieu K affecté du coefficient 2, on voit que *le centre de gravité* G du *tétraèdre est au milieu de la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées* AB *et* CD.

Si, procédant autrement, on remplace les trois points **B**, **C**, **D** par le centre de gravité O du triangle BCD, affecté du coefficient **3**, on voit que le centre de gravité G est sur la droite AO en un point tel, que

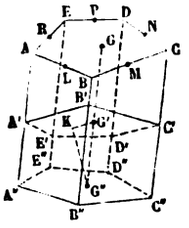
$$\frac{GO}{GA} = -\frac{1}{3}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad GO = \frac{AO}{4}.$$

En réunissant ces deux résultats, on a la proposition suivante : *Dans tout tétraèdre, les trois droites qui joignent les milieux de chaque couple d'arêtes opposées, et les quatre droites qui joignent chaque sommet au point de rencontre des médianes de la face opposée, passent par un même point ; ce point est situé au milieu des trois premières droites, et pour chacune des quatre autres il est aux trois quarts de sa longueur comptée à partir du sommet correspondant.*

THÉORÈME.

719. *L'aire latérale d'un tronc de prisme quelconque est égale au produit du périmètre de la section droite par la portion de la parallèle aux arêtes du prisme, menée par le centre de gravité du contour de la section droite et comprise entre les deux bases du tronc* (*fig.* 395.)

Fig. 395.



Soient A'B'C'D'E' A''B''C''D''E'' le tronc de prisme, et ABCDE une section droite située, par exemple, au-dessus des deux bases. Par les milieux L, M, N, P, R des côtés de la section droite, et par le centre de gravité G du contour de cette section, concevons des parallèles aux arêtes du prisme, et appelons respectivement l', m', n', p', r', g' les longueurs de ces parallèles prolongées jusqu'au plan de la base A'B'C'D'E', et l'', m'',

n'', p'', r'', g'' les longueurs des mêmes parallèles prolongées jusqu'au plan de la base A″B″C″D″E″. $\lambda, \mu, \nu, \pi, \rho$ étant les côtés AB, BC, CD, DE, EA de la section droite, on aura, par la formule (3),

$$(\lambda+\mu+\nu+\pi+\rho)g' = \lambda l' + \mu m' + \nu n' + \pi p' + \rho r',$$
$$(\lambda+\mu+\nu+\pi+\rho)g'' = \lambda l'' + \mu m'' + \nu n'' + \pi p'' + \rho r'',$$

d'où, en retranchant,

$$(\lambda+\mu+\nu+\pi+\rho)(g''-g') = \lambda(l''-l') + \mu(m''-m') + \nu(n''-n') + \pi(p''-p') + \rho(r''-r').$$

Le second membre représente évidemment la somme des aires des faces latérales du tronc de prisme ; il doit donc en être de même du premier. Or, ce premier membre est le produit du périmètre $\lambda+\mu+\nu+\pi+\rho$ de la section droite, par la portion $g''-g'$ de la parallèle aux arêtes du prisme menée par G et comprise entre les plans A′B′C′D′E′ et A″B″C″D″E″.

THÉORÈME.

720. *Les centres de gravité des aires de toutes les sections planes d'un prisme sont situés sur une même parallèle aux arêtes de ce prisme.*

Le théorème est évident pour le prisme triangulaire, car, lorsqu'on projette obliquement ou orthogonalement un triangle sur un plan, chaque médiane du triangle primitif a pour projection une médiane du nouveau triangle.

Considérons actuellement un prisme quelconque ; soit ABCDE (*fig.* 392) sa section droite, qu'on a décomposée en triangles en joignant aux divers sommets un point quelconque O de son plan ; soit P le plan d'une section quelconque incliné d'un angle α sur le plan de la section droite. Conservons toutes les notations du n° 716, et désignons par A′, B′, C′, D′, E′, O′, G′, G'_1, G'_2, G'_3, G'_4, G'_5 les points où les arêtes du prisme et les parallèles à ces arêtes menées par les points O, G, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 rencontrent le plan P. G étant le centre de gravité de la section droite, on a

$$\gamma.g = \gamma_1.g_1 + \gamma_2.g_2 + \gamma_3.g_3 + \gamma_4.g_4 + \gamma_5.g_5$$

et, par suite, en multipliant par $\cos\alpha$,

$$\gamma\cos\alpha.g = \gamma_1\cos\alpha.g_1 + \gamma_2\cos\alpha.g_2 + \gamma_3\cos\alpha.g_3 + \gamma_4\cos\alpha.g_4 + \gamma_5\cos\alpha.g_5.$$

Mais les points G'_1, G'_2, G'_3, G'_4, G'_5 sont, d'après le premier alinéa, les centres de gravité des triangles O′A′B′, O′B′C′, O′C′D′, O′D′E′, O′E′A′, dont se compose la section par le plan P, et $\gamma_1\cos\alpha$, $\gamma_2\cos\alpha$, $\gamma_3\cos\alpha$,

$\gamma_1 \cos\alpha$, $\gamma_2 \cos\alpha$ sont (706) les aires de ces triangles prises avec le signe + ou le signe —, suivant que ces triangles sont additifs ou soustractifs. Donc la dernière relation exprime que le point G est le centre de gravité de la section oblique.

721. Le théorème correspondant sur les centres de gravité des *périmètres* des diverses sections planes d'un prisme n'est pas vrai. Les centres des périmètres des sections faites par une série de plans parallèles sont bien situés sur une même droite parallèle aux arêtes, mais cette droite se déplace lorsque l'inclinaison de la série des plans parallèles vient à changer.

THÉORÈME.

722. *Le volume d'un tronc de prisme quelconque est égal au produit de l'aire de la section droite par la distance des centres de gravité des deux bases.*

Dans le cas où la section droite est l'une des deux bases du tronc, le théorème résulte immédiatement de ce qui a été dit aux nos 716 et 720. En effet, on a vu au n° 716 qu'en désignant par V le volume d'un pareil tronc, par γ l'aire de la section droite, et par g la parallèle aux arêtes du prisme menée par le centre de gravité de cette section droite jusqu'à l'autre base, on avait $V = g.\gamma$, et l'on sait, d'après le n° 720, que cette droite g réunit les centres de gravité des deux bases.

Considérons actuellement un prisme dont les arêtes soient obliques sur les bases A′B′C′D′E′ et A″B″C″D″E″ (*fig.* 395). Désignons par V son volume, menons une section droite ABCDE au-dessus des deux bases, et appelons S, V′, V″ l'aire de cette section et les volumes des deux troncs compris entre cette section et chacune des deux bases primitives. Si l'on observe que les centres de gravité G, G′, G″ de la section droite et des deux bases sont sur une même parallèle aux arêtes, on a

$$V'' = S.GG'', \quad V' = S.GG'$$

et, par soustraction,

$$V'' - V' = S(GG'' - GG'), \quad \text{ou} \quad V = S.G'G''.$$

Scolie.

723. Soit (*fig.* 395) G″K la perpendiculaire abaissée du centre de gravité de l'une des bases sur l'autre; α étant l'angle G″ du triangle rectangle G″KG′, on a

$$G''K = G'G'' \cos\alpha;$$

mais l'angle α est égal à l'angle du plan de la section droite ABCDE et

du plan de la base A'B'C'D'E', dont nous désignerons l'aire par B; on a donc (707)

$$S = B\cos\alpha$$

et, par suite,

$$V = S.G'G'' = B\cos\alpha\,\frac{G''K}{\cos\alpha} = B.G''K.$$

De là, cet autre énoncé :

Le volume d'un tronc de prisme quelconque est égal au produit de l'une des bases par la perpendiculaire abaissée du centre de gravité de l'autre base sur le plan de la première.

724. Nous devons signaler à l'attention du lecteur le mode de démonstration employé au n° 716. Cette méthode, dite *par les solides auxiliaires* et qui consiste à faire intervenir la Géométrie de l'espace dans la solution d'un problème de Géométrie plane, se distingue par le caractère intuitif des démonstrations qu'elle fournit. Les travaux de Desargues, de Monge et de Poncelet, en offrent des exemples nombreux et remarquables.

MÉTHODE FONDÉE SUR LA PROJECTION CENTRALE.

725. Quand deux figures planes sont la perspective (586) l'une de l'autre, certaines propriétés de la première figure conviennent encore à la seconde; on qualifie de *projectives* les propriétés qui se conservent ainsi en projection.

Toutes les propriétés descriptives sont projectives; car, si plusieurs points sont en ligne droite, leurs projections sont en ligne droite, et, quand plusieurs droites concourent en un même point, leurs projections passent par la projection de ce point.

Il n'en est pas de même des relations métriques. Quelques-unes, comme la proportion harmonique, sont projectives; mais la plupart, même les plus simples, ne le sont pas. Ainsi, l'égalité entre les deux segments d'une ligne droite n'est projective que dans le cas très-particulier où il y a parallélisme, soit entre les projetantes, soit entre la droite considérée et sa projection.

Pour démontrer sur une figure donnée une propriété que l'on sait être projective, il suffit de prouver que la propriété a lieu pour l'une quelconque des projections de cette figure. L'application de ce principe évident constitue un moyen de recherche connu sous le nom de *méthode par projection*, et qui est de beaucoup le plus fécond parmi les procédés qui reposent sur l'intervention de la Géométrie de l'espace dans les questions de Géométrie plane.

Toutefois, comme on ne fait ainsi que ramener un problème à un autre, il importe de choisir le centre et le plan de projection, de façon que la nouvelle figure offre des circonstances plus propres à la recherche qu'on a en vue. *Pour obtenir une projection plus simple que la figure proposée, on projette ordinairement celle-ci de telle sorte qu'un de ses points ou une de ses droites passe à l'infini dans la projection.* Il suffit évidemment pour cela que le plan de projection soit parallèle, dans le premier cas à la projetante du point considéré, et dans le second cas au plan projetant de la droite qu'on veut rejeter à l'infini. C'est ainsi que *un quadrilatère complet donne un parallélogramme, quand on projette sur un plan parallèle à celui qui passe par le centre* S *de projection et par l'une de ses trois diagonales;* et même, comme l'un des angles de ce parallélogramme est égal à celui sous lequel on voit du point S la diagonale considérée, on peut, par un choix convenable du centre S, donner au parallélogramme obtenu un angle de telle grandeur qu'on voudra (entre zéro et 180 degrés).

726. Nous allons appliquer la méthode par projection à trois théorèmes, déjà démontrés d'une autre manière (315, 326, 327).

1° *Dans un quadrilatère complet* ABCDEF, *chaque diagonale* AC *est divisée harmoniquement par les deux autres* BD *et* EF (*fig.* 206). En projetant de façon à rejeter la projection de EF à l'infini, on obtient un parallélogramme *abcd* dans lequel la propriété énoncée est évidente; car la droite *ac*, étant rencontrée par *bd* en son milieu et par la troisième diagonale à l'infini, se trouve divisée harmoniquement (333).

2° *Quand deux triangles* ABC, A'B'C' *sont tels que leurs côtés homologues se coupent deux à deux en trois points* α, β, γ, *situés en ligne droite, les droites qui joignent les sommets homologues concourent en un même point* O (*fig.* 211). En projetant la figure de façon que la projection de la droite $\alpha\beta\gamma$ passe à l'infini, on est ramené à démontrer la même propriété pour deux triangles *abc*, *a'b'c'*, ayant leurs côtés homologues parallèles; or, on sait que deux triangles de ce genre sont homothétiques (361).

3° *Quand deux triangles* ABC, A'B'C' *sont tels que les droites qui joignent leurs sommets homologues concourent en un même point* O, *les côtés homologues se coupent deux à deux en trois points* α, β, γ, *situés en ligne droite* (*fig.* 211). En projetant la figure de façon que la droite qui joint les deux points α et β ait sa projection à l'infini, on obtient deux triangles *abc*, *a'b'c'*, qui, comme les premiers, ont leurs sommets homologues situés sur des rayons issus d'un même point *o* (projection de O), mais qui ont en outre deux couples *cb* et *c'b'*, *ca* et *c'a'* de côtés homologues parallèles; il suffit alors de prouver le parallélisme de *ab* et de *a'b'*.

Or, cela résulte de ce que le rapport de oa' à oa est égal à celui de ob' à ob, puisque chacun de ces rapports équivaut à celui de oc' à oc.

727. Ces exemples suffisent pour faire comprendre l'esprit de la méthode, dont toute la portée n'apparaîtra d'ailleurs que lorsque nous traiterons des coniques.

Voici, pour terminer, une règle importante, qui permet de reconnaître à simple vue que certaines relations métriques sont projectives.

Une fraction, dont le numérateur et le dénominateur sont chacun le produit de facteurs exprimant de simples distances AB, CD, ..., *entre les divers points d'une figure plane, est projective, si les mêmes lettres se retrouvent dans les facteurs linéaires qui composent les deux termes, et si à chaque distance appartenant à l'un des termes correspond dans l'autre terme une distance qui soit sur la même droite que la première.*

En effet, soient A, B, C, D, ... les divers points d'une figure plane, et A', B', C', D', ... les points correspondants de sa projection sur un autre plan. Désignons par $a, b, c, d, \ldots$ les longueurs des projetantes SA, SB, SC, SD, ..., et par $p, q, \ldots$ les distances du centre S de projection aux droites AB, CD, ... En égalant deux expressions bien connues de l'aire du triangle SAB, on a

$$AB.p = a.b.\sin ASB, \quad \text{d'où} \quad AB = \frac{a.b}{p}\sin ASB,$$

et l'on aurait de même

$$CD = \frac{c.d}{q}\sin CSD, \ldots.$$

Or, quand on substituera aux facteurs linéaires AB, CD, ... les valeurs ci-dessus, les quantités $a, b, \ldots$ disparaîtront en vertu de la première condition, et il en sera de même des quantités $p, q, \ldots$, en vertu de la deuxième hypothèse. Il ne restera donc qu'une fraction qui se déduira de la proposée en y remplaçant chaque facteur AB, CD, ... par le sinus de l'angle sous lequel on voit du point S chaque segment correspondant AB, CD, ... La valeur de la fraction considérée ne dépend donc que des valeurs des angles des projetantes, et nullement de la position du plan de la figure ABCD...., de sorte que la fraction composée de la même manière avec les segments homologues A'B', C'D', ... de la figure A'B'C'D', ... aura la même valeur.

Cette proposition contient évidemment comme cas particulier celle du n° 320, car l'expression

$$\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB} \quad \text{ou} \quad \frac{CA.DB}{CB.DA}$$

remplit les conditions prescrites dans la règle précédente. On retrouve ainsi la projectivité du rapport anharmonique de quatre points en ligne droite, ainsi que l'expression

$$\frac{\sin CSA}{\sin CSB} : \frac{\sin DSA}{\sin DSB}$$

du rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites SA, SB, SC, SD situées dans un même plan, qui ne dépend que des angles de ces droites, et qui n'exige pas la considération d'une transversale auxiliaire.

Ajoutons que le rapport anharmonique de quatre plans A, B, C, D, passant par une même droite, est susceptible de l'expression analogue

$$\frac{\sin \widehat{CA}}{\sin \widehat{CB}} : \frac{\sin \widehat{DA}}{\sin \widehat{DB}},$$

dans laquelle la notation $\widehat{CA}$ représente l'angle des plans C et A. Cette remarque résulte de ce que le rapport anharmonique d'un faisceau de quatre plans est égal à celui du faisceau des quatre droites suivant lesquelles ces plans sont coupés par un plan perpendiculaire à leur arête commune.

FIGURES HOMOLOGIQUES.

728. A la méthode par projection se rattache directement la théorie des figures homologiques qui est due à Poncelet, et qui se recommande à la fois par le rôle considérable qu'elle joue en Géométrie pure, et par l'heureux parti qu'on peut en tirer en Géométrie descriptive.

On dit que *deux figures situées dans un même plan sont homologiques, quand elles se correspondent point par point et droite par droite, de telle sorte que deux points homologues quelconques soient en ligne droite avec un point fixe, et que deux droites homologues quelconques se coupent sur une droite fixe.* Le point fixe prend le nom de *centre d'homologie*, et la droite fixe celui d'*axe d'homologie*.

Des deux dernières conditions énoncées dans la définition, il suffit que l'une soit satisfaite pour que l'autre soit remplie; ainsi :

Deux figures sont homologiques, si elles se correspondent point par point et droite par droite, de façon que deux points homologues quelconques soient en ligne droite avec un point fixe.

Deux figures sont homologiques, si elles se correspondent point par point et droite par droite, de façon que deux droites homologues quelconques se coupent sur une droite fixe.

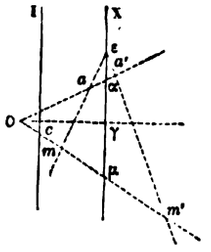
Il suffit, en effet, de prouver que, si β est le point de concours d'un premier couple (AC, A'C') de droites homologues (*fig.* 211), et γ le point de concours d'un second couple (AB, A'B'), le point de concours α d'un troisième couple quelconque (BC, B'C') est situé sur la droite $\beta\gamma$. Or cela résulte du théorème démontré aux n°s 326, etc.

Il suffit, en effet, de prouver que, si O est le point d'intersection des droites AA', BB', qui joignent deux premiers couples (A, A') (B, B') de points homologues, la droite CC' qui unit un troisième couple quelconque (C, C') passe par O. Or cela résulte du théorème démontré aux n°s 327, etc.

C'est en projetant sur un plan quelconque P deux figures homothétiques situées dans un autre plan Q, que Poncelet (*Traité des propriétés projectives*, Section III, Chapitre I) est arrivé à la notion des figures homologiques. Il est évident, en effet, que dans les deux nouvelles figures la droite qui joint deux points homologues quelconques passe par la perspective du centre de similitude des figures primitives, et que deux droites homologues quelconques provenant de la perspective de deux droites parallèles ont leur point de concours (588) sur la ligne de fuite du plan Q.

729. La transformée homologique F' d'une figure F est déterminée (*fig.* 396) dès qu'on donne, outre ce centre O et l'axe X d'homologie, le point a', homologue d'un premier point a de la figure F; car, pour obtenir l'homologue m' d'un point quelconque m de la figure F, il suffit alors de déterminer le point s où la droite am coupe l'axe X d'homologie, et de prendre l'intersection m' du rayon Om avec la droite $a's$ homologue de as.

Fig. 396.



Souvent, le centre ou l'axe d'homologie sont hors des limites de la feuille de dessin, et il faut savoir trouver l'homologue m' d'un point quelconque m de la première figure en n'employant que le centre d'homo-

logie O et deux couples de droites correspondantes, ou bien que l'axe d'homologie et deux couples de points correspondants. Voici la marche qu'on suit.

1° Soient (*fig.* 397) O le centre d'homologie, et $(ap, a'p')$, $(aq, a'q')$ deux couples de droites homologues. A l'aide de deux rayons quelconques Obb', Occ', menés par O, on déterminera un troisième couple $(bc, b'c')$ de droites homologues; le point g commun à am et à bc aura pour homologue le point g' commun à $b'c'$ et au rayon Og, et $a'g'$ homologue de ag rencontrera Om au point cherché m'.

2° Soient (*fig.* 398) X l'axe d'homologie, et (a, a') (b, b') deux couples de points correspondants. En joignant au point a' le point α où am coupe l'axe d'homologie, on aura l'homologue de la droite am; on obtiendra de même l'homologue $b'\beta$ de la droite bm; l'homologue m' du point m sera donc le point commun à $a'\alpha$ et à $b'\beta$.

Fig. 397.

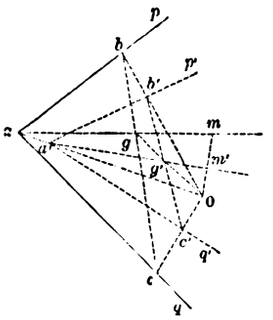
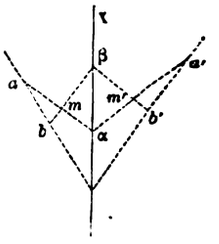


Fig. 398.



Nous devons faire remarquer que toutes ces constructions n'exigent que l'emploi de la règle.

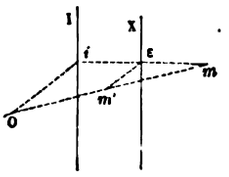
730. Il est évident : 1° que toute droite passant par le centre d'homologie se correspond à elle-même; 2° que le centre d'homologie coïncide avec son homologue, et qu'il partage cette propriété avec chacun des points de l'axe d'homologie.

Puisque deux droites homologues coupent l'axe d'homologie au même point, à la droite de l'infini de la première figure F doit correspondre dans la seconde figure F' une droite J' parallèle à l'axe d'homologie; et de même, à la droite de l'infini de la figure F' répond dans la figure F une droite I parallèle à l'axe X; la droite I prend le nom de *droite limite* de la figure F, et la droite J' celui de *droite limite* de la figure F'.

Rien de plus simple que de construire la figure F' quand on connaît la

figure F, sa droite limite I ainsi que le centre O et l'axe X d'homologie; m étant (*fig.* 399) un point quelconque de F, on mènera par m une

Fig. 399.



droite quelconque im; on joindra le centre O au point i où cette droite coupe I, et par le point ε où cette même droite coupe X on mènera la parallèle à Oi; cette parallèle, qui est évidemment l'homologue de la droite εmi, rencontrera le rayon Om au point demandé m'.

On lit immédiatement sur la figure la relation

$$\frac{Om'}{i\varepsilon} = \frac{Om}{im} = \frac{m'm}{\varepsilon m},$$

d'où l'on déduit les deux formules

$$Om' = i\varepsilon \frac{mO}{mi}, \qquad m'm = Om \frac{m\varepsilon}{mi},$$

qui nous seront utiles plus tard. La seconde de ces formules a été donnée, en 1704, par le géomètre belge Le Poivre qui, comme de la Hire et Newton, avait étudié quelques cas particuliers de la transformation homologique, bien avant que Poncelet eût créé la théorie complète de ces figures.

731. *Quand deux figures sont homologiques :* 1° *le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite, a, b, c, d, est égal au rapport anharmonique des quatre points homologues a', b', c', d'*; car ces rapports sont égaux l'un et l'autre à celui du faisceau Oaa', Obb', Occ', Odd'; 2° *le rapport anharmonique d'un faisceau* SA, SB, SC, SD *de quatre droites est égal au rapport anharmonique du faisceau formé par les quatre droites homologues* S'A', S'B', S'C', S'D'; car les rayons homologues des deux faisceaux se croisant sur l'axe d'homologie, les rapports anharmoniques considérés sont égaux à celui de la section commune faite par l'axe d'homologie.

732. Considérons deux figures homologiques; soient (*fig.* 396) O le centre et X l'axe d'homologie, (a, a') et (m, m') deux couples de points

homologues, μ et α les points où les rayons Omm' et Oaa' coupent l'axe X, et ε le point de concours de am et de $a'm'$. Le faisceau (εO, εa, εX, εm) étant coupé par les deux transversales Omm', Oaa', on a

$$\frac{mO}{m\mu} : \frac{m'O}{m'\mu} = \frac{aO}{a\mu} : \frac{a'O}{a'\mu}.$$

Le rapport anharmonique $(O\mu mm')$ *a donc une valeur constante*; on donne à cette constante, que nous désignerons par λ, le nom de *coefficient d'homologie*.

La réciproque de cette proposition est vraie, et elle conduit à une nouvelle définition des figures homologiques :

Étant donnés dans un plan un point fixe O *et une droite fixe* X (*fig.* 396), *si sur chaque rayon* $O\mu$ *on prend deux points m et m' tels que le rapport anharmonique* $(O\mu mm')$ *ait une valeur constante* λ, *les points m et m' décrivent deux figures homologiques.*

En effet, par la définition même, deux points homologues quelconques m et m' sont en ligne droite avec le point fixe O; il suffit donc de prouver que, si le point m décrit une droite $a\varepsilon$, le point m' décrit à son tour une droite coupant l'axe X au même point ε que la première. Ou menons par le point O une droite quelconque, et désignons par α, ε, α les points où elle rencontre les droites εm, εX, $\varepsilon m'$; le faisceau (εO, εm, εX, $\varepsilon m'$) étant coupé par les deux transversales $O\mu$, $O\alpha$, les rapports anharmoniques $(O\mu mm')$ $(O\alpha aa')$ seront égaux; le second aura donc comme le premier la valeur λ; donc le point a', qui est situé sur $\varepsilon m'$, sera la position que prend m' quand m vient en a.

La constante λ *est égale au rapport des distances de la droite limite* I *au centre et à l'axe d'homologie.* Car, en désignant par c et γ les projections orthogonales du centre O sur les droites I et X, et appliquant le théorème précédent au système formé par les quatre points O, γ, c et ∞, le dernier étant à l'infini, on a

$$\frac{cO}{c\gamma} : \frac{\infty' O}{\infty' \gamma} = \lambda, \quad \text{ou} \quad \frac{cO}{c\gamma} = \lambda.$$

On voit de même que le rapport des distances de la droite limite I' au centre et à l'axe d'homologie est égal à $\frac{1}{\lambda}$.

Quand la constante λ est égale à -1, les deux droites limites coïncident avec la droite unique qui est équidistante du centre et de l'axe d'homologie; ce genre particulier d'homologie prend le nom d'*homologie harmonique*.

Quand l'axe d'homologie est à l'infini, le rapport anharmonique $(O\mu mm')$ se réduit à $\frac{mO}{m'O}$, et la relation

$$\frac{mO}{m'O} = \lambda$$

montre que l'*homologie* devient *homothétie;* le point O est le centre de similitude, et λ est le rapport de similitude.

Enfin, si c'est au contraire le centre d'homologie qui est à l'infini, le rapport anharmonique $(O\mu mm')$ se réduit à $\frac{m'\mu}{m\mu}$, et la relation

$$\frac{m'\mu}{m\mu} = \lambda$$

montre que la seconde figure résulte de la première en *dilatant* dans un rapport constant les *ordonnées* abaissées de ses divers points sur l'axe fixe X dans une direction donnée; quelques géomètres donnent à ce genre d'homologie, qui se présente fréquemment, le nom d'*affinité*.

733. Nous terminerons par un théorème très important tant au point de vue théorique qu'au point de vue des applications; d'une part, il montre la concordance entre l'homologie et la perspective; d'autre part, il intervient fort utilement, en géométrie descriptive, pour la solution du problème des rabattements et des questions relatives aux sections planes des prismes et des pyramides, des cônes et des cylindres.

Quand deux figures planes F *et* F' *sont en perspective, leurs projections sur un plan quelconque* H, *à l'aide d'un centre de projection quelconque* ω, *sont deux figures homologiques; le centre d'homologie est la projection o du point de vue* V, *et l'axe d'homologie est la projection* ll_1 *de l'intersection* LL_1 *des plans* P *et* P' *des deux figures.*

La démonstration est presque intuitive :

En effet : d'abord, à chaque point m de la figure f répond évidemment un point unique m' de la figure f', et la droite mm' passe par o puisque les points correspondants M et M' des figures F et F' sont en ligne droite avec V. En second lieu, à une droite quelconque d de la figure f répond évidemment une droite et une seule d' de la figure f', et le point de concours de d et de d' est sur ll_1 puisque les droites correspondantes D et D' des figures F et F' se croisent sur LL_1.

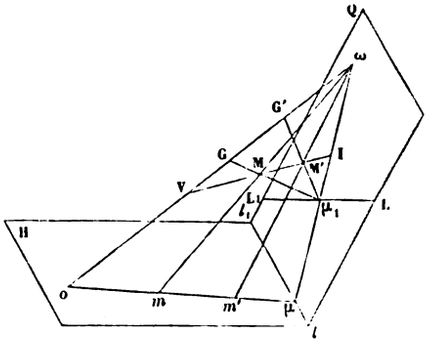
La réciproque exige plus d'attention :

Deux figures homologiques f *et* f' *peuvent, d'une infinité de manières, être considérées comme la projection sur leur plan* H *de deux figures planes* F *et* F' *qui sont en perspective* (*fig.* 400).

513
R851
QA
445
R62

En effet, soit ω un point pris à volonté dans l'espace, et *o* le centre d'homologie de *f* et de *f'*; dans le plan Q déterminé par ω et par l'axe d'homologie ll_1 des figures *f* et *f'*, choisissons arbitrairement une droite LL_1; imaginons par cette droite deux plans P et P' et appelons G et G' les points où ces plans coupent la droite ω*o*. Enfin, désignons respectivement par F et F' les figures qu'on obtient en projetant, du point ω comme centre, les figures *f* et *f'*, la première sur le plan P, la seconde sur le plan P'. Tout se réduit à démontrer que les figures F et F' sont

Fig. 400.



en perspective; en d'autres termes, si M et M' sont les points de F et F situés sur les projetantes ω*m*, ω*m'* de deux points homologues quelconques *m* et *m'* de *f* et de *f'*, il suffit de prouver que la droite MM' passe par un point fixe. Or, soit μ le point où *mm'* coupe ll_1, μ_1 le point où ωμ coupe LL_1 et I et V les points où MM' rencontre ωμ et ω*o*. Le rapport anharmonique de la division μ*omm'* est constant et égal au rapport d'homologie des figures *f* et *f'*; mais ce rapport anharmonique est égal à celui de la division IVMM' et, par suite, égal aussi à celui de la division ωVGG' qu'on obtient en projetant la précédente du point μ_1 sur ωo. D'ailleurs, les points ω, G et G' sont fixes; donc il en est de même du point V. C.Q.F.D.

Un cas particulier intéressant est celui où F et F' sont deux positions d'une même figure qui tourne autour d'une droite de son plan; dans ce cas, F et F' sont, en effet, en perspective, le point de vue V étant à l'infini dans la direction perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre formé par les plans de F et de F'. Enfin, si l'on choisit alors pour plan de projection le plan de la figure F', *f'* ne différera pas de F'; ce qui montre que *la projection f d'une figure* F *et son rabattement* F' *sont homologiques, et inversement.*

LIVRE VII.

LES CORPS RONDS.

§ I. — CYLINDRE DE RÉVOLUTION.

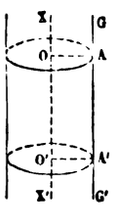
DÉFINITIONS.

734. On nomme *surface cylindrique de révolution* la surface engendrée par une droite GG′ qui tourne autour d'une droite fixe XX′ à laquelle elle est parallèle et invariablement liée (*fig.* 401).

La droite fixe XX′ reçoit le nom d'*axe* de la surface, et la droite mobile GG′ celui de *génératrice* ou *d'arête*.

735. Tout point A de la droite GG′ décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe et dont le centre est sur l'axe; car, pendant la rotation, la perpendiculaire AO abaissée du point A sur XX′ reste perpendiculaire à cet axe et conserve toujours la même longueur.

Fig. 401.



On appelle *section droite* toute section faite par un plan perpendiculaire à l'axe. Il résulte des considérations précédentes que *les diverses sections droites d'une même surface cylindrique sont des circonférences égales :* le rayon commun de

ces cercles, c'est-à-dire la distance des deux parallèles XX' et GG', est le *rayon de la surface cylindrique*, et l'on voit que *le lieu des points de l'espace situés à une distance donnée d'une droite fixe est la surface cylindrique de révolution qui a cette droite pour axe et la distance donnée pour rayon.*

736. Considérons une droite fixe XX', un plan P parallèle à cette droite, et désignons par R la distance de la droite au plan, ou, ce qui revient au même, la distance de la droite à sa projection AA' sur le plan (*fig.* 402). Le lieu des points du plan P, situés à une distance donnée δ de la droite XX', se compose de deux droites BB' et CC' parallèles à XX', placées de part et d'autre de AA', et à une distance de cette droite égale au côté AB de l'angle droit d'un triangle rectangle OAB, dont l'hypoténuse OB est égale à δ, et l'autre côté OA de l'angle droit égal à R. Il en est ainsi tant que δ est plus grand que R; lorsque δ devient égal ou inférieur à R, le lieu se réduit à la droite AA' ou cesse d'exister.

D'après cela (735), un plan parallèle à l'axe d'une surface cylindrique de révolution renferme deux génératrices de cette surface, ou une seule, ou n'a aucun point commun avec la surface, suivant que la distance du plan à l'axe est inférieure, égale ou supérieure au rayon de la surface.

Fig. 402.

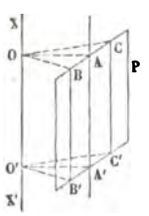
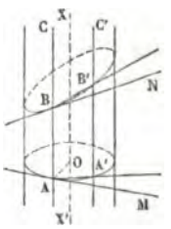


Fig. 403.



737. Arrêtons-nous un moment sur le cas où le plan et la surface n'ont en commun qu'une génératrice AC (*fig.* 403).

Un tel plan peut être considéré comme la position limite d'un plan variable qui, passant par la génératrice fixe AC et par une génératrice voisine A'C', tourne autour de AC jusqu'à

ce que A'C' vienne, en restant sur la surface cylindrique, se confondre avec AC. Cela étant, soit BB' une courbe quelconque tracée sur la surface cylindrique; la sécante BB', qui unit les points B et B' où la courbe rencontre les génératrices AC et A'C', reste constamment dans le plan variable ACA'C'; d'ailleurs, cette sécante devient la tangente BN à la courbe BB', lorsque la génératrice mobile A'C' vient se confondre avec AC, c'est-à-dire lorsque le plan variable ACA'C' atteint sa position limite; donc ce plan limite contient la tangente BN. Ainsi, le plan limite considéré renferme les tangentes à toutes les courbes que l'on peut tracer sur la surface, aux points où ces courbes rencontrent la génératrice AC; on lui donne le nom de *plan tangent suivant la génératrice* AC.

La génératrice AC, et la tangente à une courbe quelconque tracée sur la surface au point où cette courbe rencontre AC, suffisent pour déterminer le plan tangent suivant cette génératrice. Si l'on choisit en particulier la tangente AM à la section droite AA', on voit que *le plan tangent est perpendiculaire au plan déterminé par l'axe et par la génératrice de contact;* en effet, le plan tangent renferme la droite AM qui, étant à angle droit sur AO et sur AC, est perpendiculaire à leur plan CAOX.

738. On appelle *cylindre de révolution* le corps compris entre une surface cylindrique et deux plans perpendiculaires à l'axe de cette surface, ou, en d'autres termes, la figure engendrée par la rotation d'un rectangle A A'O'O autour d'un de ses côtés OO' (*fig.* 404).

Fig. 404.

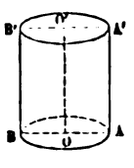
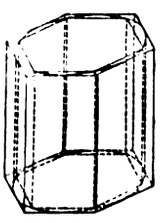
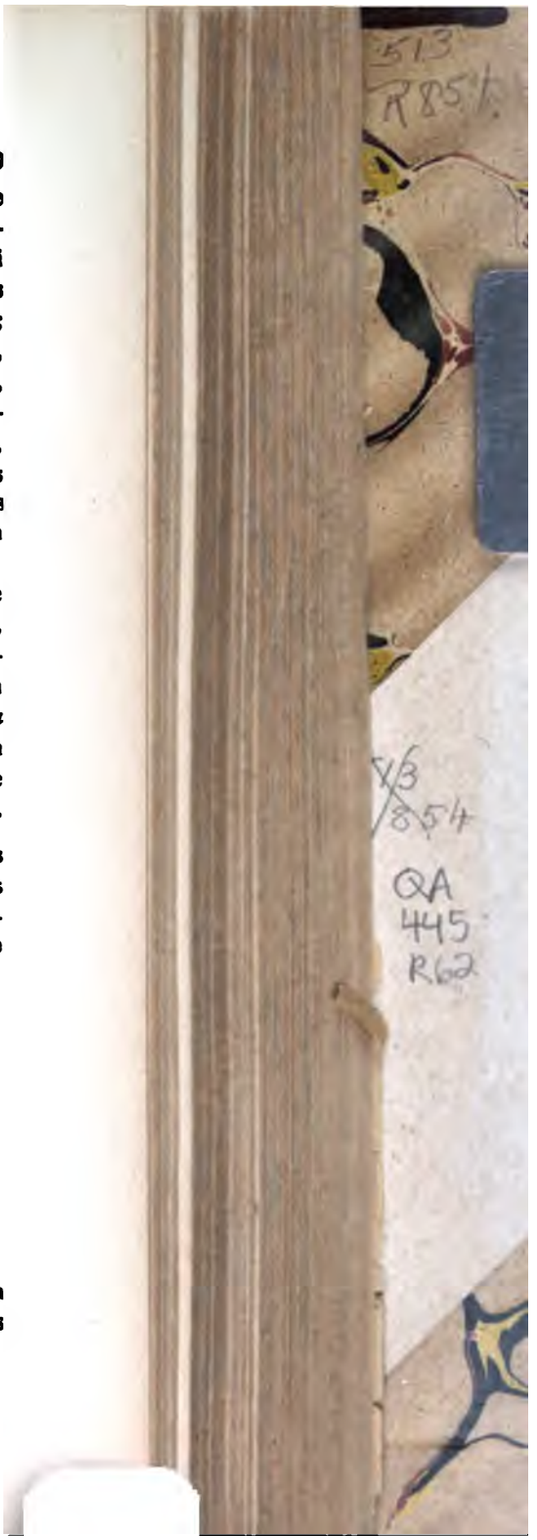


Fig. 405.



La surface cylindrique engendrée par le côté AA' est la *surface latérale* du cylindre; les cercles décrits par les côtés


513
R85
QA
445
R62

OA et O'A' en sont les *bases*, et la droite OO' en est la *hauteur*.

739. En construisant un prisme droit, de même hauteur que le cylindre, et ayant pour base un polygone inscrit ou circonscrit au cercle de base du cylindre, on obtient un ***prisme inscrit ou circonscrit*** au cylindre (*fig.* 405). Le plan de chaque face latérale du prisme circonscrit est tangent au cylindre (737). Si le polygone inscrit ou circonscrit au cercle de base est régulier, le prisme inscrit ou circonscrit au cylindre est régulier.

Considérons un cylindre de révolution et un prisme régulier inscrit. L'aire latérale du prisme s'obtient en multipliant le périmètre de sa base par sa hauteur (609). Or, quand on fait croître indéfiniment le nombre des côtés du polygone de base, le périmètre de ce polygone tend vers une limite fixe et indépendante de la loi suivant laquelle ses côtés tendent vers zéro; d'ailleurs, la hauteur du prisme reste constamment égale à la hauteur du cylindre. Donc l'aire latérale du prisme inscrit tend vers une limite fixe indépendante de la loi suivant laquelle les côtés de sa base tendent vers zéro : *c'est cette limite que l'on appelle l'aire latérale du cylindre.*

Considérons en second lieu un cylindre de révolution et deux prismes réguliers de bases semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit au cylindre (*fig.* 405). Le volume du cylindre est compris entre les volumes des deux prismes. Or, ces deux prismes ont même hauteur, et le rapport des aires de leurs bases a pour limite l'unité (447), lorsque le nombre commun de leurs côtés croît indéfiniment; par suite, le rapport des volumes des deux prismes tend vers l'unité, et il en est de même *a fortiori* du rapport du volume du cylindre au volume de l'un quelconque de ces prismes. Donc *le volume d'un cylindre de révolution est la limite commune des volumes des prismes réguliers de bases semblables, inscrit et circonscrit, dont on fait croître indéfiniment le nombre des faces.*

Il importe de remarquer que ce dernier énoncé est un véritable *théorème*, tandis que l'énoncé de l'alinéa précédent relatif à l'aire n'est qu'une *définition*.

740. Deux cylindres de révolution sont dits ***semblables***, lorsqu'ils sont engendrés par des rectangles semblables, c'est-à-dire lorsque leurs hauteurs sont entre elles comme les rayons de leurs bases.

THÉORÈME.

741. *L'aire latérale d'un cylindre de révolution a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par sa hauteur.*

L'aire latérale du cylindre est la limite des aires latérales des prismes réguliers inscrits dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient S, C, H l'aire latérale, la circonférence de base et la hauteur du cylindre considéré; soient s et p l'aire latérale et le périmètre de la base d'un prisme régulier inscrit. On a (609)

$$s = p.\,\mathrm{H}.$$

Lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base du prisme, s tend vers S et p vers C; on a donc, à la limite,

$$\mathrm{S} = \mathrm{C.H}.$$

Corollaires.

742. Si R est le rayon du cylindre, on a $\mathrm{C} = 2\pi\mathrm{R}$ et, par suite,

$$\mathrm{S} = 2\pi\,\mathrm{RH}.$$

En ajoutant à cette aire latérale les aires des deux bases ou le double $2\pi\mathrm{R}^2$ de l'aire de l'une d'elles, on obtient, pour l'aire totale T du cylindre,

$$\mathrm{T} = 2\pi\,\mathrm{RH} + 2\pi\,\mathrm{R}^2 = 2\pi\,\mathrm{R}\,(\mathrm{R} + \mathrm{H}).$$

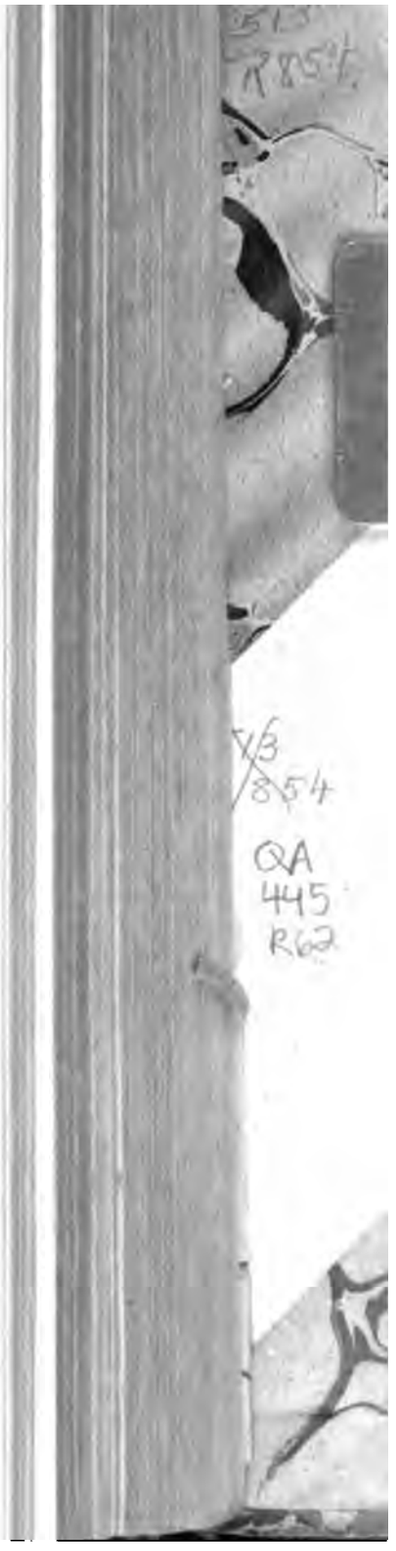
743. Soient S, S′ les aires latérales; T, T′ les aires totales; R, R′ les rayons et H, H′ les hauteurs de deux cylindres de révolution semblables. On aura (740)

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}'} = \frac{\mathrm{R} + \mathrm{H}}{\mathrm{R}' + \mathrm{H}'}$$

et, par suite,

$$\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}'} = \frac{\mathrm{RH}}{\mathrm{R}'\mathrm{H}'} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}\cdot\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}'} = \frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{H}'^2} = \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{R}'^2},$$

$$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}'} = \frac{\mathrm{R}\,(\mathrm{R} + \mathrm{H})}{\mathrm{R}'\,(\mathrm{R}' + \mathrm{H}')} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}\cdot\frac{\mathrm{R} + \mathrm{H}}{\mathrm{R}' + \mathrm{H}'} = \frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{H}'^2} = \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{R}'^2}.$$


513
R85t
7/3
854
QA
445
R62

Donc, *les aires latérales ou totales de deux cylindres de révolution semblables sont entre elles comme les carrés des rayons ou comme les carrés des hauteurs.*

SCOLIE.

744. Considérons un cylindre de révolution et un prisme régulier inscrit ABCDEFA'B'C'D'E'F' (*fig.* 406); par une rotation autour de l'arête BB', amenons la face ABB'A' dans le prolongement de la face BCC'B'; puis, par une rotation autour de CC', amenons les deux faces déjà réunies dans le prolongement de la face suivante CDD'C', et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les faces latérales du prisme soient réunies sur le plan de la dernière d'entre elles AFF'A'. Dans son mouvement autour

Fig. 406.

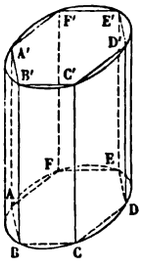
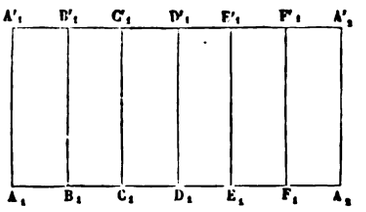


Fig. 407.



de l'arête BB', le côté AB reste perpendiculaire à cette arête; il se place donc sur le prolongement de CB; de même la droite ABC, formée par la réunion de AB et de BC, vient se placer sur le prolongement de DC, ... On obtient donc finalement sur le dernier plan un rectangle $A_1A_2A'_2A'_1$ (*fig.* 407) dont la hauteur est celle du prisme droit et dont la base est égale au périmètre de la base du prisme. Ce rectangle est le *développement* de l'aire latérale du prisme.

Si le nombre des faces du prisme régulier inscrit dans le cylindre croît indéfiniment, le rectangle $A_1A_2A'_2A'_1$ conserve la même hauteur, et la longueur de sa base A_1A_2 tend vers la circonférence de la base du cylindre. Le rectangle limite, qui a une hauteur égale à celle du cylindre et une base égale à la circonférence de la base du cylindre, est dit le *développement* de l'aire latérale de ce cylindre.

THÉORÈME.

745. *Le volume d'un cylindre de révolution a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Le volume du cylindre est la limite des volumes des prismes réguliers inscrits, dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient V, B, H le volume du cylindre, l'aire de sa base et sa hauteur; soient v et b le volume et l'aire de la base d'un prisme régulier inscrit au cylindre; on a (626)

$$v = b.H.$$

Mais lorsque le nombre des faces du prisme croît indéfiniment, v tend vers V et b vers B; on a donc, à la limite,

$$V = B.H.$$

COROLLAIRES.

746. Si R est le rayon du cylindre considéré, on a $B = \pi R^2$ et par suite

$$V = \pi R^2.H.$$

747. Soient V, V′ les volumes, R, R′ les rayons, H, H′ les hauteurs de deux cylindres de révolution semblables; on aura (740)

$$\frac{R}{R'} = \frac{H}{H'}$$

et, par suite,

$$\frac{V}{V'} = \frac{R^2H}{R'^2H'} = \left(\frac{R}{R'}\right)^3 \cdot \frac{H}{H'} = \frac{R^3}{R'^3} = \frac{H^3}{H'^3}.$$

Donc, *les volumes de deux cylindres de révolution semblables sont entre eux comme les cubes des rayons ou comme les cubes des hauteurs.*

748. EXEMPLE.

Pour mesurer les liquides, on emploie des vases ayant la forme de cylindres de révolution dont la hauteur est double du diamètre : calculer d'après cela les dimensions du litre.

La capacité du cylindre dont on demande la hauteur H est 1 décimètre cube; en prenant le décimètre pour unité de longueur, et en remarquant que le rayon du cylindre est $\frac{H}{4}$, on a la relation

$$\pi\left(\frac{H}{4}\right)^2 \cdot H = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\pi H^3}{16} = 1 ;$$

on en déduit

$$H = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}} = 1^{dm},720.$$

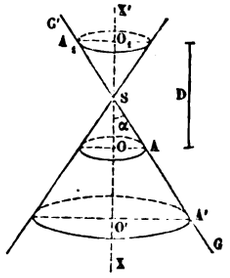
Le litre est donc un cylindre dont la hauteur a 172 millimètres, et dont le rayon a par suite 43 millimètres.

§ II. — CONE DE RÉVOLUTION.

DÉFINITIONS.

749. On appelle *surface conique de révolution* la surface engendrée par une droite GSG′ tournant autour d'une droite fixe XSX′ qu'elle rencontre en un point S, et à laquelle elle est invariablement liée (*fig.* 408).

Fig. 408.



La droite fixe XX′ reçoit le nom d'*axe* de la surface, et la droite mobile GG′ celui de *génératrice* ou d'*arête*. Le point S, qu'on nomme *sommet*, divise la surface conique en deux parties indéfinies qu'on appelle *nappes*.

Le lieu géométrique des droites qui, passant par un point donné S, font un angle donné α avec une droite donnée D, est une surface conique de révolution ayant le point S pour sommet et pour axe la parallèle menée à D par le point S.

Un point quelconque A de la droite GG′ décrit une circonférence dont le centre est sur l'axe, et dont le plan est perpendiculaire à l'axe (735). Par suite, toutes les sections faites par des plans perpendiculaires à l'axe sont des circonférences

dont le lieu des centres est l'axe lui-même. Quant aux rayons OA, O′A′ de ces cercles, la similitude des triangles SOA, SO′A′ prouve qu'ils sont proportionnels aux distances SO, SO′ de leurs plans au sommet, ou encore aux portions correspondantes SA, SA′ de la génératrice GSG′. Leurs aires sont donc proportionnelles aux carrés des mêmes lignes.

750 Considérons une droite fixe XSX′, un plan P passant par un point S de cette droite, et désignons par α l'angle de la droite et du plan, c'est-à-dire l'angle aigu de la droite SX avec sa projection SA sur ce plan (*fig.* 409). Par le point S, on peut mener dans le plan P (533) deux droites SB, SC, faisant avec SX un angle aigu donné ω. Ces deux droites sont symétriques par rapport à AA′. Il en est ainsi tant que ω est supérieur à α; lorsque ω devient égal ou inférieur à α, les deux droites se réduisent à la droite unique SA ou cessent d'exister.

D'après cela, un plan passant par le sommet d'une surface conique de révolution renferme deux génératrices de cette surface, ou une seule, ou enfin n'a de commun avec la surface que le sommet, suivant que l'inclinaison du plan sur l'axe est inférieure, égale ou supérieure à l'angle aigu de la génératrice avec l'axe, c'est-à-dire au *demi-angle au sommet* de la surface conique.

Fig. 409.

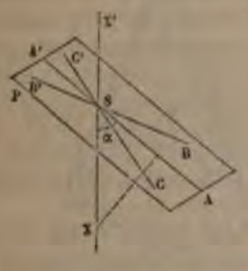
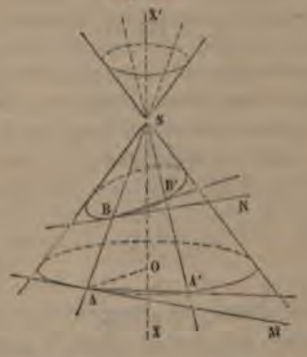


Fig. 410.



Dans le cas où le plan donné n'a de commun avec la surface qu'une seule génératrice SA (*fig.* 410), on peut le consi-

dérer comme la position limite d'un plan variable qui, passant par la génératrice fixe SA et par une génératrice voisine SA', tourne autour de SA jusqu'à ce que SA' vienne se confondre avec SA. On voit dès lors, par un raisonnement identique à celui qu'on a fait pour le cylindre (737), que ce plan renferme les tangentes AM, BN,... à toutes les courbes AA', BB',.... que l'on peut tracer sur la surface, aux points A, B, .., où la génératrice SA rencontre ces courbes. On donne à ce plan le nom de *plan tangent suivant la génératrice* SA.

La génératrice SA et la tangente à une courbe quelconque tracée sur la surface, au point où cette courbe rencontre SA, suffisent pour déterminer le plan tangent suivant cette génératrice. Si l'on choisit en particulier la tangente AM à une section AA' perpendiculaire à l'axe, on voit, comme pour le cylindre, que *le plan tangent est perpendiculaire au plan déterminé par l'axe et la génératrice de contact.*

751. On nomme *cône de révolution* le corps engendré par la rotation d'un triangle rectangle SOA autour de l'un des côtés SO de l'angle droit SOA (*fig.* 411).

La surface conique engendrée par l'hypoténuse SA est la *surface latérale* du cône; le cercle décrit par le côté OA est la *base*, la droite SO est la *hauteur*, et l'hypoténuse SA est le *côté* ou l'*apothème* de ce cône.

Fig. 411.

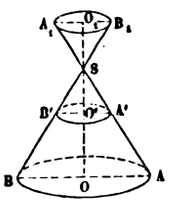
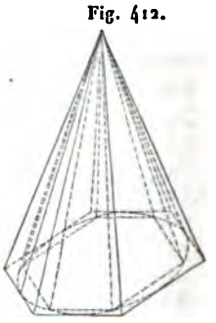


Fig. 412.



752. Si l'on coupe une surface conique de révolution (*fig.* 411) par deux plans AB, A'B', perpendiculaires à l'axe

et situés d'un même côté du sommet S, on obtient un volume terminé par une portion de la surface conique, et par les deux cercles AB, A′B′. Ce corps, que l'on nomme *tronc de cône de révolution à bases parallèles*, est la différence des deux cônes SAB, SA′B′. On peut encore le considérer comme engendré par la rotation du trapèze rectangle AOO′A′ autour du côté OO′. La droite OO′ est la *hauteur* du tronc; les cercles AB, A′B′ en sont les bases et AA′ en est le *côté* ou l'*apothème*.

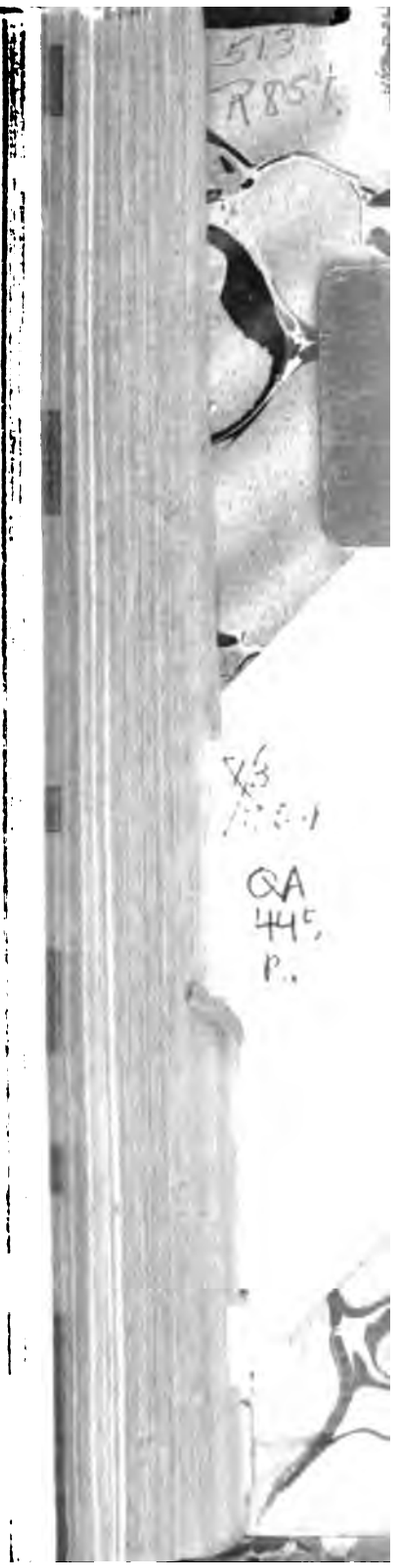
En coupant une surface conique de révolution par deux plans AB, A_1B_1, perpendiculaires à l'axe, mais situés de part et d'autre du sommet S (*fig.* 411), on obtient un corps qui est la somme des deux cônes SAB, SA_1B_1. Il convient de donner encore à ce corps le nom de *tronc de cône;* mais, pour le distinguer du tronc de cône proprement dit, que nous avons défini dans l'alinéa précédent, nous l'appellerons *tronc de cône de seconde espèce* (650).

753. En construisant une pyramide de même sommet que le cône, et ayant pour base un polygone inscrit ou circonscrit au cercle de base du cône, on obtient une pyramide inscrite ou circonscrite au cône (*fig.* 412). Le plan de chaque face latérale de la pyramide circonscrite est tangent au cône. Si le polygone de base est régulier, la pyramide inscrite ou circonscrite est régulière.

On appelle *aire latérale d'un cône* la limite de l'aire latérale d'une pyramide régulière inscrite dont le nombre des faces croît indéfiniment. On légitime cette *définition* en montrant que la limite considérée existe et est indépendante de la loi suivant laquelle les côtés de la base de la pyramide tendent vers zéro. Le raisonnement est analogue à celui qu'on a employé pour le cylindre (739); seulement, tandis que la hauteur du prisme inscrit au cylindre reste fixe, l'apothème de la pyramide régulière inscrite au cône est variable et tend vers l'apothème du cône.

On *démontre*, absolument comme dans le cas du cylindre, que *le volume d'un cône de révolution est la limite commune des volumes des pyramides régulières de bases semblables, inscrite et circonscrite, dont on fait croître indéfiniment le nombre des faces.*

754. Deux cônes de révolution sont dits *semblables* lorsqu'ils sont engendrés par des triangles rectangles semblables, c'est-à-dire lorsque leurs hauteurs sont entre elles comme les rayons des bases.



THÉORÈME.

755. *L'aire latérale d'un cône de révolution a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par la moitié de son apothème.*

L'aire latérale du cône est la limite des aires latérales des pyramides régulières inscrites dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient S, C, A l'aire latérale, la circonférence de base et l'apothème du cône considéré, et s, p, a l'aire latérale, le périmètre de la base et l'apothème d'une pyramide régulière inscrite. On a (640)

$$s = p \cdot \frac{1}{2} a.$$

Lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base de la pyramide, s tend vers S, p vers C, a vers A; on a donc, à la limite,

$$S = C. \frac{1}{2} A.$$

COROLLAIRE.

756. Si R est le rayon de la base du cône, on a $C = 2\pi R$, et par suite

$$S = \pi RA.$$

En ajoutant la base πR^2, on a, pour l'aire totale,

$$T = \pi RA + \pi R^2 = \pi R(A + R).$$

757. En raisonnant comme au n° 743, on reconnaît que *les aires latérales ou totales de deux cônes de révolution semblables sont entre elles comme les carrés des rayons ou des apothèmes ou des hauteurs.*

758. Considérons un cône de révolution et une pyramide régulière inscrite SABCDEF (*fig.* 413); par une rotation autour de l'arête SB, amenons la face SAB dans le prolongement de la face SBC; puis, par une rotation autour de SC, amenons les deux faces déjà réunies dans le prolongement de la face suivante SCD; et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les faces latérales de la pyramide soient réunies dans le plan de la dernière

d'entre elles FSA. On obtiendra ainsi un secteur polygonal régulier $S_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ (*fig.* 414), ayant pour rayon l'arête de la pyramide

Fig. 413.

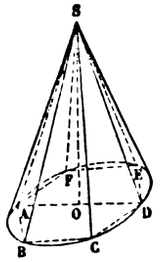
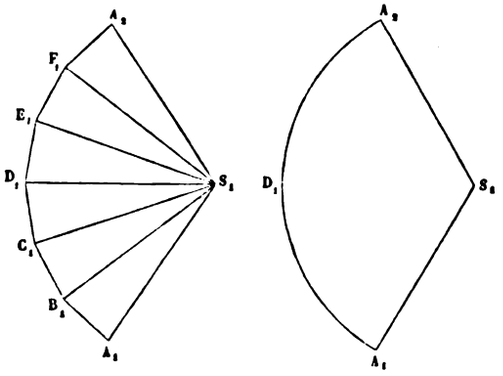


Fig. 414.



régulière, c'est-à-dire l'apothème du cône, et pour base une ligne brisée régulière $A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ égale au périmètre de la base de la pyramide.

Si le nombre des faces de la pyramide régulière inscrite dans le cône croît indéfiniment, le secteur $S_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ conserve le même rayon, et la base dégénère en un arc de cercle ayant une longueur égale à celle de la circonférence du cône. Le secteur circulaire $S_1A_1D_1A_2$ obtenu est dit le *développement* de l'aire latérale du cône. Il est aisé de calculer le nombre n de degrés contenus dans l'angle $A_1S_1A_2$ de ce secteur circulaire. A étant l'apothème du cône et R le rayon de sa base, on a

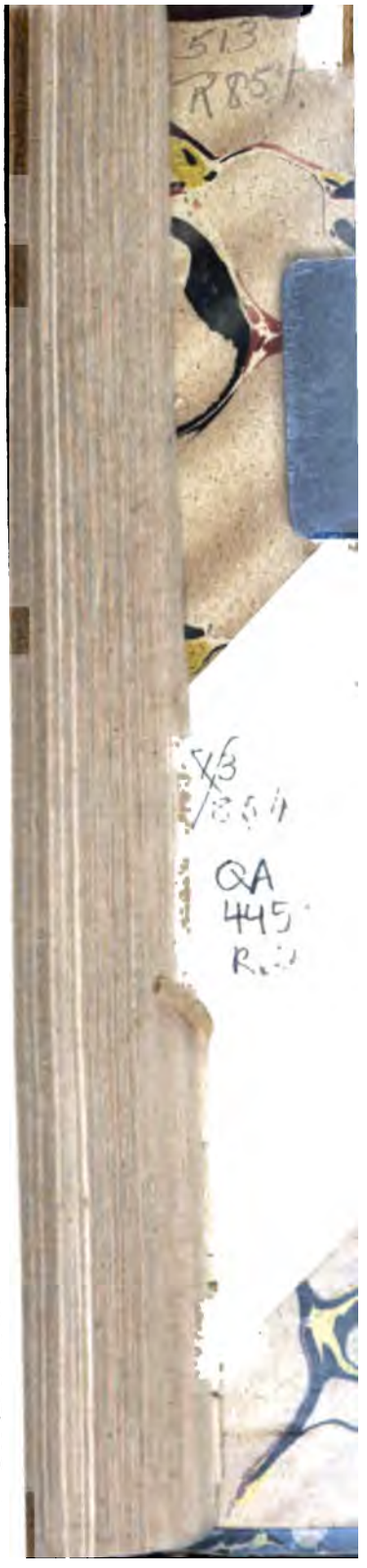
$$\frac{n}{360} = \frac{\text{arc } A_1A_2}{2\pi . S_1A_1} = \frac{2\pi R}{2\pi A}, \quad \text{d'où} \quad n = 360° \frac{R}{A}.$$

Pour $A = 2R$, on a $n = 180°$, de sorte que le développement est un demi-cercle. Le cône correspondant est dit *équilatéral*; sa section par un plan passant par l'axe SO est un triangle équilatéral SAD.

THÉORÈME.

759. ***L'aire latérale d'un tronc de cône de révolution à bases parallèles a pour mesure le produit de la demi somme des circonférences de ses bases par son apothème.***

L'aire latérale du tronc de cône ADD'A' (*fig.* 415) est la différence des aires latérales des cônes SAD, SA'D'. Cela posé, in-


513
R85
QA
445

scrivons dans le cône SAD une pyramide régulière SABCDEF; le plan A'D' de la base supérieure du tronc de cône décompose cette pyramide en deux parties qui sont, l'une, SA'B'C'D'E'F', une pyramide régulière inscrite dans le cône SA'D', l'autre, ABCDEFA'B'C'D'E'F', un tronc de pyramide régulier inscrit dans le tronc de cône ADD'A'. Or les aires latérales des cônes SAD, SA'D' étant les limites des aires latérales des pyramides SABCDEF, SA'B'C'D'E'F', lorsque le nombre commun de leurs faces croît indéfiniment, l'aire latérale du tronc de cône sera égale à la limite de l'aire latérale du tronc de pyramide régulier inscrit. Soient s, a, p, p' l'aire latérale, l'apothème, et les périmètres des bases du tronc de pyramide; soient de même S, A, C, C' l'aire latérale, l'apothème et les circonférences des bases du tronc de cône; on aura (641)

$$s = \frac{1}{2}(p + p')\,a.$$

Mais, à la limite, lorsque les côtés du polygone ABCDEF tendent vers zéro, s tend vers S, p vers C, p' vers C', a vers A, et l'on a

$$S = \frac{1}{2}(C + C')A.$$

Fig. 415.

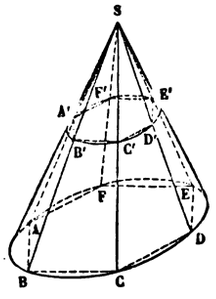
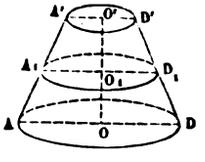


Fig. 416.



COROLLAIRE.

760. Si R et R' sont les rayons des bases du tronc, on a $C = 2\pi R$, $C' = 2\pi R'$, et par suite

$$S = \pi(R + R')A.$$

761. Par le milieu A_1 du côté AA′ (*fig.* 416), menons un plan parallèle aux bases du tronc de cône; le rayon A_1O_1 de la section circulaire déterminée par ce plan est parallèle (495) aux rayons AO, A′O′, des bases et, par suite (433), égal à la demi-somme de ces rayons. Donc la circonférence A_1D_1 est la moyenne arithmétique des circonférences de base, et l'on peut dire que *l'aire latérale d'un tronc de cône de révolution a pour mesure le produit de l'apothème par la circonférence équidistante des deux bases.*

Ce dernier énoncé s'applique aussi au cylindre et au cône ; car la circonférence équidistante des bases est égale, dans le cylindre, à celle de la base, et, dans le cône, à la moitié de celle de la base.

THÉORÈME.

762. *Le volume d'un cône de révolution a pour mesure le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.*

Le volume du cône est la limite des volumes des pyramides régulières inscrites dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient V, B, H le volume du cône, l'aire de sa base et sa hauteur ; soient v et b le volume et l'aire de la base d'une pyramide régulière inscrite dans ce cône. On a (643)

$$v = \frac{1}{3} b\,\mathrm{H}.$$

Mais, lorsque le nombre des faces de la pyramide croît indéfiniment, v tend vers V et b vers B ; on a donc, à la limite,

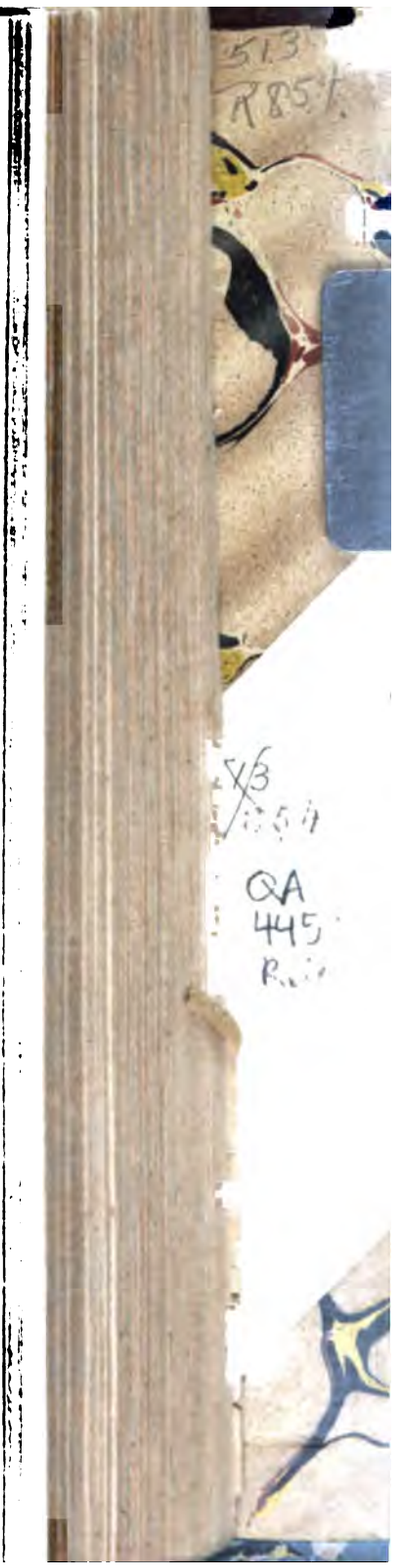
$$\mathrm{V} = \frac{1}{3}\mathrm{BH}.$$

Corollaires.

763. Si R est le rayon de la base du cône, on a $\mathrm{B} = \pi \mathrm{R}^2$ et, par suite,

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3}\pi \mathrm{R}^2\mathrm{H}.$$

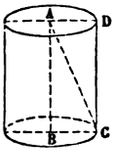
On voit, comme au n° 747, que *les volumes de deux cônes*



de révolution semblables sont dans le rapport des cubes des hauteurs ou des rayons des bases.

764. Lorsqu'un rectangle ABCD tourne autour de l'un de ses côtés AB (*fig.* 417), le triangle ABC engendre un cône

Fig. 417.



dont le volume est le tiers (745, 762) de celui du cylindre engendré par le rectangle ABCD. Par suite, le volume engendré en même temps par le triangle ADC est les deux tiers du même cylindre. Cette remarque nous sera utile plus tard.

THÉORÈME.

765. *Le volume d'un tronc de cône de révolution à bases parallèles est égal à la somme des volumes de trois cônes ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour bases, le premier la base inférieure, le deuxième la base supérieure, et le troisième la moyenne proportionnelle entre les deux bases du tronc.*

Considérons, comme au n° 759, un tronc de pyramide régulier inscrit dans le tronc de cône. Les volumes des deux pyramides dont ce tronc de pyramide est la différence ayant respectivement pour limites les volumes des deux cônes dont le tronc de cône proposé est la différence, on aura le volume de ce tronc de cône en prenant la limite du volume du tronc de pyramide. D'après cela, soient V, b, B, H le volume, les bases et la hauteur du tronc de cône, v_1, b_1, B_1 le volume et les bases du tronc de pyramide inscrit; on aura (648)

$$v_1 = \frac{H}{3}(B_1 + b_1 + \sqrt{B_1 b_1}).$$

Mais, lorsque le nombre des faces du tronc de pyramide croît

indéfiniment, v_1 tend vers V, b_1 vers b, B_1 vers B; et l'on a, à la limite, la formule

$$V = \frac{H}{3}(B + b + \sqrt{Bb}),$$

dont l'énoncé ci-dessus n'est que la traduction en langage ordinaire.

COROLLAIRES.

766. Si R est le rayon de la base inférieure B, et r le rayon de la base supérieure b, on a $B = \pi R^2$, $b = \pi r^2$, et par suite

$$(1) \qquad V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

767. Le raisonnement qui précède s'applique au tronc de *seconde espèce;* il faut seulement substituer le mot *somme* au mot *différence* et remarquer que, le tronc de pyramide inscrit correspondant étant de seconde espèce, le radical qui figure dans l'expression de v_1 doit avoir le signe — (650). On obtient ainsi, pour le volume du tronc de cône de seconde espèce, la formule

$$V = \frac{H}{3}(B + b - \sqrt{Bb}) = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 - Rr).$$

768. Parfois, dans la pratique, notamment pour le *cubage des troncs d'arbres* non équarris, les bases diffèrent assez peu pour qu'on puisse assimiler sans inconvénient le cône tronqué à un cylindre ayant pour hauteur la hauteur du tronc et pour base la section faite dans le tronc à égale distance des deux bases. L'erreur commise est d'ailleurs facile à évaluer; en retranchant le volume cylindrique

$$(2) \qquad v = \pi H \left(\frac{R + r}{2}\right)^2$$

du cône tronqué dont le volume est donné par la formule (1), on trouve

$$V - v = \frac{1}{3}\pi H \left(\frac{R - r}{2}\right)^2.$$

L'erreur commise est donc égale au volume d'un cône ayant

pour hauteur la hauteur du tronc et pour rayon de sa base la demi-différence des rayons des bases du tronc.

Quand on veut appliquer la formule (2) au cubage d'un tronc d'arbre, il convient de la préparer de la manière suivante : soit C la longueur de la circonférence moyenne que l'on évalue au moyen d'un cordon métrique; le rayon de cette circonférence sera $\frac{C}{2\pi}$ et, par suite, le volume cherché

$$v = \frac{\pi HC^2}{4\pi^2} = \frac{HC^2}{4\pi}.$$

Ainsi, supposons qu'on ait trouvé $1^m,80$ pour la circonférence moyenne et $6^m,50$ pour la hauteur, on aura pour le volume

$$\frac{6,5 \times (1,8)^2}{4\pi} = \frac{6,5 \times (0,9)^2}{\pi} = 1^{mc},676.$$

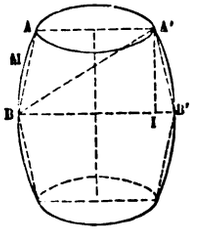
769. La question du *jaugeage des tonneaux* se rattache à la mesure du tronc de cône.

En considérant le tonneau (*fig.* 418) comme la somme de deux troncs de cône identiques opposés par leur grande base, on aurait la formule

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr),$$

dans laquelle H est la hauteur totale du double tronc, r le rayon

Fig. 418.



du *fond* AA', et R le rayon de la grande base BB' à laquelle on donne le nom de *bouge*. Mais cette formule donne évi-

demment un résultat trop faible. En introduisant, suivant l'usage, les diamètres Δ et δ au lieu des rayons R et r, et ayant égard à l'identité $\Delta^2 + \delta^2 = 2\Delta\delta + (\Delta - \delta)^2$, on peut mettre la formule précédente sous la forme $V = \frac{\pi}{4} H\Delta\delta + \frac{\pi}{12} H(\Delta - \delta)^2$. Or, le dernier terme est négligeable; car, son rapport

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\Delta - \delta}{\sqrt{\Delta\delta}}\right)^2$$

au précédent, ne dépasse guère un demi-centième dans les conditions ordinaires, ce qui correspond à une erreur d'un demi-litre par hectolitre.

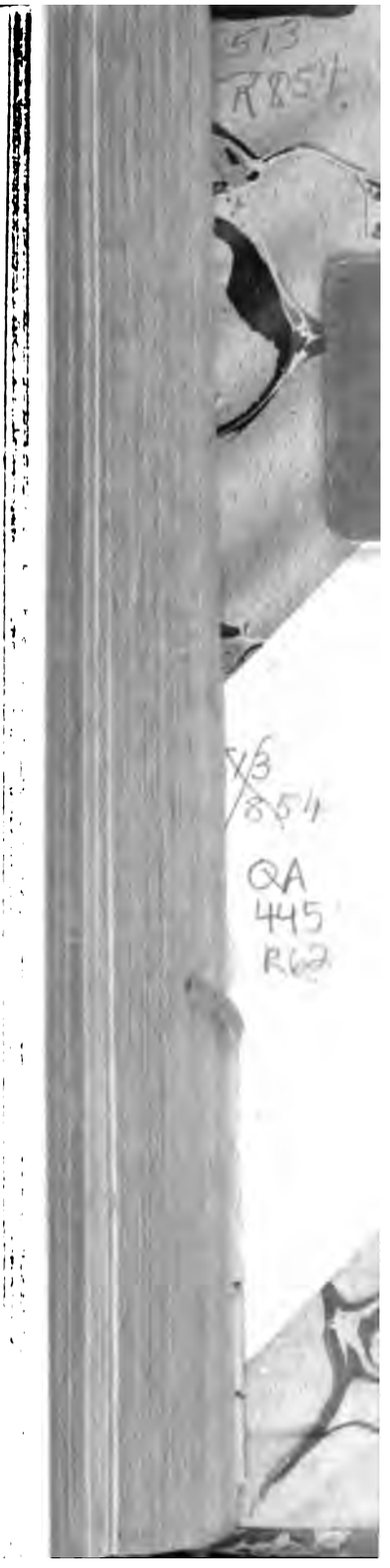
Mais alors la formule réduite $V = \frac{\pi}{4} H\Delta\delta$ est *a fortiori* un peu trop faible. Aussi, par compensation, les tonneliers remplacent-ils le coefficient $\frac{\pi}{4} = 0{,}785$ par 0,8; ce qui conduit à la formule très simple $V = (0{,}8) H\Delta\delta$, qui donne le volume, en mètres cubes, lorsque H, Δ, δ sont évalués en prenant le mètre pour unité. Pour avoir le volume en hectolitres, il suffit de multiplier par 10; c'est ce que l'on fait habituellement, et on parvient ainsi à la formule définitive

$$V = 8 H\Delta\delta, \tag{1}$$

qui est généralement employée dans le Midi de la France, et dont de nombreuses expériences ont permis de constater la suffisante exactitude. Pour $H = 0^m,756$, $\Delta = 0^m,69$, $\delta = 0^m,61$, cette formule donne $V = 254^{lit}$.

Appliquée aux *foudres* ou grands tonneaux de 100 à 200 hectolitres, la formule (1) donne un résultat trop fort, à cause de la forme concave que l'on donne, dans ce cas, aux fonds pour augmenter leur résistance. L'expérience montre qu'il convient alors de diminuer de 4 pour 100, dans les conditions ordinaires, l'évaluation fournie par la formule (1), en entendant par H la distance des deux fonds prise à la partie inférieure, c'est-à-dire au bas de la porte.

Observons enfin que l'on peut trouver des formules plus exactes, mais en augmentant leur complication et en faisant intervenir un plus grand nombre de mesures.

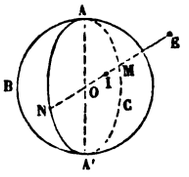

513
R85t.
513
854
QA
445
R62

§ III. — PREMIÈRES NOTIONS SUR LA SPHÈRE.

DÉFINITIONS.

770. On appelle *surface sphérique* la surface engendrée par la rotation d'une demi-circonférence ABA′ autour du diamètre AA′ qui la termine (*fig.* 419).

Fig. 419.



Dans ce mouvement, tout point de cette demi-circonférence décrit un cercle dont le centre est situé sur l'axe de rotation AA′ et dont le plan est perpendiculaire à cet axe.

La *sphère* est le corps limité par une surface sphérique. On confond souvent dans le discours les mots *sphère* et *surface sphérique*, de même qu'en Géométrie plane on dit parfois *cercle* pour *circonférence de cercle*.

771. Considérons la sphère engendrée par la rotation du demi-cercle ABA′ autour du diamètre AA′ et un point quelconque de l'espace. Quand le demi-cercle générateur vient se placer suivant ACA′ dans le plan déterminé par AA′ et par le point considéré, il peut se faire que ce point soit comme E à l'extérieur du cercle ACA′, ou comme I à l'intérieur, ou enfin comme M sur la circonférence de ce cercle. Dans le premier cas, le point E est *extérieur* à la sphère, et sa distance au centre O du cercle ACA′ est plus grande que le rayon R de ce cercle; dans le second cas, le point I est *intérieur* à la sphère et la distance OI est moindre que R; enfin, dans le troisième cas, le point M est sur la surface sphérique et la distance OM est égale à R.

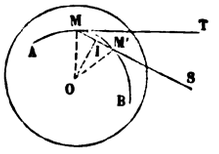
La *surface sphérique* peut donc être encore définie le *lieu géométrique des points équidistants d'un point fixe.*

Ce point fixe O est dit le *centre* de la sphère. On nomme *rayon* toute droite, telle que OA ou OM, menée du centre O à la surface; *tous les rayons d'une même sphère sont égaux.* On nomme *diamètre* toute droite, telle que MN, passant par le centre et limitée à la surface sphérique; *tous les diamètres d'une même sphère sont égaux*, car chacun d'eux est la somme de deux rayons.

Deux sphères de même rayon sont égales.

772. La définition donnée au n° 111 pour la tangente aux courbes planes s'étend aux courbes de l'espace. Il est aisé de voir, d'après cela, que *la tangente* MT *à une courbe quelconque* AMB *tracée sur la sphère est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* OM *mené au point de contact.* En effet (*fig.* 420),

Fig. 420.



prenons sur la courbe AMB un point M′ voisin du point M, menons la sécante MM′S et joignons le centre O au milieu I de la corde MM′. Le triangle MOM′ étant isocèle, la droite OI est perpendiculaire sur MM′. Or, lorsque la sécante MM′S tourne autour du point M de manière à devenir à la limite la tangente MT, le point I milieu de MM′ se réunit au point M en même temps que le point M′. L'angle OMT, position limite de l'angle droit OIS, est donc lui-même un angle droit.

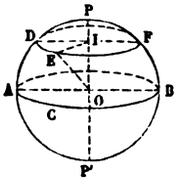
THÉORÈME.

773. *Toute section plane de la sphère est un cercle.*

En effet, les points de la section sont, puisqu'ils appartiennent à la sphère, situés à la même distance du centre de cette

sphère; or on sait (91, 524) que le lieu des points d'un plan équidistants d'un point fixe est une circonférence de cercle.

Fig. 421.



COROLLAIRES.

774. Si le point fixe O, qui est ici le centre de la sphère (*fig.* 421), est situé dans le plan sécant, ce point est le centre même de la section ACB, dont le rayon ne diffère pas de celui de la sphère.

Si le point fixe O est extérieur au plan sécant, le centre I de la section DEF est la projection du centre O de la sphère sur le plan sécant (524). Quant au rayon IE = r de la section, c'est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle OIE dont l'hypoténuse OE est le rayon R de la sphère et dont l'autre côté de l'angle droit OI est la distance d du centre de la sphère au plan sécant. Ce rayon r résulte donc de la formule

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

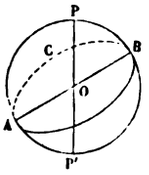
On est ainsi conduit à diviser les sections planes de la sphère en deux classes : les *grands cercles*, dont les plans passent par le centre de la sphère et qui sont tous égaux entre eux, puisqu'ils ont tous pour rayon le rayon de la sphère; et les *petits cercles*, dont les plans ne contiennent pas le centre de la sphère, et dont les rayons, inférieurs à celui de la sphère, décroissent à mesure que leurs plans s'éloignent du centre de la sphère.

Deux petits cercles également éloignés du centre de la sphère sont égaux, et, de deux petits cercles inégalement éloignés du centre de la sphère, le plus grand est celui qui est le plus voisin de ce centre.

Ajoutons qu'il faut *trois points* de la surface sphérique pour

déterminer un petit cercle (116, 492), tandis que *deux points* suffisent pour déterminer un grand cercle, attendu que le centre est connu; toutefois, dans ce dernier cas, les deux points donnés ne doivent pas être en ligne droite avec le centre de la sphère, sans quoi le plan du grand cercle, assujetti seulement à passer par un diamètre, pourrait occuper une infinité de positions (492).

Fig. 422.



775. *Tout grand cercle divise la surface sphérique et la sphère en deux parties égales.* Car si, après avoir séparé les deux parties, on les applique sur la base commune en tournant leur convexité dans le même sens, les deux surfaces coïncideront, sans quoi tous les points de la surface sphérique ne seraient pas à la même distance du centre.

776. *Deux grands cercles* APBP', ABC (*fig.* 422) *se divisent mutuellement en deux parties égales;* car le centre O de la sphère, appartenant à la fois aux plans de ces deux cercles, est situé sur leur intersection commune, qui est alors un diamètre.

777. *Une droite ne peut couper la surface sphérique en plus de deux points.* Car cette droite ne peut avoir plus de deux points communs avec la circonférence de grand cercle, située dans le plan déterminé par cette droite et le centre de la sphère.

778. *La sphère est de révolution autour d'un diamètre quelconque* AB. Car la circonférence ACB déterminée par un plan quelconque passant par AB, ayant même centre O et même rayon OA que la sphère, engendrera évidemment cette surface en tournant autour de AB (*fig.* 422).

779. On nomme *pôles* d'un cercle de la sphère les extrémités du diamètre de la sphère qui est perpendiculaire au plan du cercle.

Deux cercles DFE, ACB (*fig.* 423), dont les plans sont parallèles, ont les mêmes pôles P et P'.

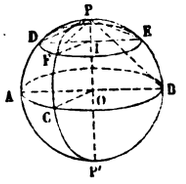
Le centre I d'un cercle quelconque DE, ses pôles P et P', et le centre O de la sphère sont sur une même perpendiculaire au plan de ce cercle.

Tout grand cercle PFCP' passant par les pôles P et P' d'un cercle DFE a son plan perpendiculaire au plan de ce cercle, puisqu'il contient la droite PP' qui est perpendiculaire à ce dernier plan.

THÉORÈME.

780. *Tous les points de la circonférence d'un cercle* DFE *de la sphère sont à égale distance de chacun des pôles* P *et* P' *de ce cercle.*

Fig. 423.



En effet, la droite PI, qui joint le pôle P au centre I du cercle DFE, étant perpendiculaire au plan DFE, les droites PD, PF, PE, ... sont des obliques qui s'écartent également du pied I de la perpendiculaire et qui, par suite, sont égales.

On voit encore que les arcs de grand cercle PD, PF, PE, ... sont égaux comme sous-tendus par des cordes égales.

Enfin, dans le cas où le cercle considéré DFE devient un grand cercle ACB, la même propriété subsiste; mais les angles droits POA, POC, POB, ... ayant leurs sommets au centre des grands cercles PAP', PCP', PBP', ..., les arcs PA, PC, PB, ... sont tous égaux au quart d'une circonférence de grand cercle.

Scolie.

781. Des deux pôles P et P' d'un petit cercle DFE, nous ne considérerons désormais, à moins d'avertissement contraire,

que le pôle P qui est le plus rapproché du plan de ce cercle. Nous donnerons à la distance rectiligne PD, qui sépare le pôle P d'un point quelconque D du cercle DFE, le nom de *distance polaire* de ce cercle, et à la longueur de l'arc de grand cercle PD, qui va du pôle à un point quelconque D du cercle DFE, le nom de *rayon sphérique* de ce cercle.

Le rayon sphérique d'un grand cercle est égal au quart de la circonférence de ce cercle ou à un quadrant, et sa distance polaire est égale à la corde de cet arc, c'est-à-dire au côté du carré inscrit dans un grand cercle.

782. Le théorème précédent permet de tracer des circonférences sur une sphère solide comme on les trace sur un plan. On emploie à cet effet un *compas à branches courbes*, afin de ne pas être gêné par la convexité de la sphère. On donne au compas une ouverture (distance des deux pointes) égale à la distance polaire voulue, et l'on place la pointe sèche au point choisi pour pôle; l'autre pointe décrit alors le cercle demandé.

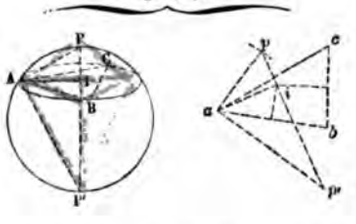
Pour décrire un grand cercle, il faut avoir sa distance polaire, c'est-à-dire la corde d'un arc égal au quart d'un grand cercle; ce qui exige la connaissance du rayon de la sphère.

PROBLÈME.

783. *Trouver le rayon d'une sphère solide* (*fig.* 424).

D'un point P de la surface sphérique comme pôle, avec une

Fig. 424.



ouverture de compas arbitraire, on décrit un cercle ABC. On relève avec le compas les trois distances rectilignes AB, BC,

CA, et l'on construit sur le papier un triangle *abc* ayant pour côtés ces trois longueurs. On détermine le centre *i* du cercle circonscrit au triangle *abc*, et la droite *ai* est égale au rayon AI du cercle ABC. Par suite, si du point *a* comme centre, avec une ouverture de compas égale à celle qui a servi à décrire le cercle ABC sur la sphère, on décrit un petit arc de cercle jusqu'à la rencontre *p* de la perpendiculaire *pip'* élevée en *i* sur *ai*, on forme un triangle *api* égal à API, et il ne reste plus qu'à élever la perpendiculaire *ap'* sur *ap* pour avoir en *pp'* le diamètre PP' de la sphère.

Pour obtenir des résultats précis lorsqu'on n'a à sa disposition qu'une portion de sphère, il faut : choisir le point P à peu près au milieu de la portion de surface dont on dispose, prendre une distance polaire PA aussi grande que possible, et, enfin, dans tous les cas, choisir les points A, B, C, sur le cercle ABC, de telle sorte que le triangle ABC soit à peu près équilatéral.

Scolie.

784. On emploie souvent, pour déterminer le rayon d'une sphère solide, un instrument spécial, qui est décrit dans les *Traités de Physique* et qu'on nomme *sphéromètre*. Cet instrument fait connaître le rayon $AI = r$ du cercle ABC, et la flèche $PI = h$. La construction graphique plane reste la même; seulement, au lieu de déterminer le point *p* à l'aide d'un arc de cercle décrit du point *a*, on prend $ip = h$. Mais, dans ce cas, on préfère le calcul à la construction graphique; R étant le rayon inconnu de la sphère, le triangle rectangle PAP' donne

$$\overline{AI}^2 = IP.IP' \quad \text{ou} \quad r^2 = h(2R - h),$$

d'où l'on déduit

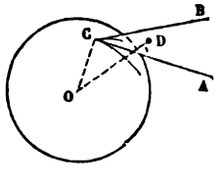
$$R = \frac{1}{2}\left(h + \frac{r^2}{h}\right).$$

THÉORÈME.

785. *Tout plan* ACB *perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon* OC *est tangent à la sphère et*, réciproquement, *tout plan* ACB

tangent à la sphère est perpendiculaire à l'extrémité du rayon OC *mené au point de contact* C (*fig.* 425).

Fig. 425.



On dit qu'un plan ACB est *tangent* à la sphère lorsqu'il n'a avec cette surface qu'un point commun C, qu'on nomme *point de contact*.

Cela posé, soit ACB un plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon OC. D étant un point quelconque de ce plan, autre que C, OD est oblique à ce plan, et l'on a OD > OC, de sorte que le point D est extérieur à la sphère. Le plan ACB, n'ayant d'après cela que le point C commun avec la surface sphérique, est tangent à cette surface.

Inversement, si ACB est un plan tangent à la sphère au point C, tout point D de ce plan, autre que C, est extérieur à la sphère, et l'on a OD > OC; donc OC, étant la plus courte distance du centre O au plan ACB, est perpendiculaire sur ce plan.

COROLLAIRES.

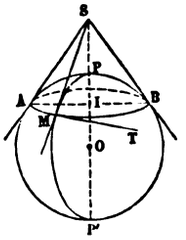
786. *Par un point pris sur la surface sphérique, on peut toujours mener un plan tangent à cette surface, et l'on ne peut en mener qu'un* (516).

787. Le plan tangent à la sphère en un point C contient les tangentes en ce point à toutes les courbes qu'on peut tracer par ce point sur la surface sphérique (772, 521).

788. Considérons une sphère O et un point extérieur S (*fig.* 426). Par la droite OS, menons un plan quelconque qui déterminera dans la sphère un grand cercle PAP', et menons par S une tangente SA à ce cercle. Pendant que le demi-cercle PAP', en tournant autour de l'axe SO, engendre la sphère, la

tangente SA engendre un cône de révolution qui a en commun avec la sphère le cercle AB décrit par le point A. De

Fig. 426.



plus, en tout point M de ce cercle, le cône et la sphère ont le même plan tangent; car la génératrice SM et la tangente MT au cercle AB, qui déterminent le plan tangent au cône (730), sont situées l'une et l'autre (787) dans le plan tangent à la sphère. On dit d'après cela que *le cône est circonscrit à la sphère* et que *la sphère est inscrite au cône* le long du cercle commun AB.

On voit encore par là que, *par un point extérieur* S, *on peut mener une infinité de plans tangents à une sphère* O, et que *toutes les tangentes* SA, SM, SB,... *à la sphère, issues du même point* S, *sont égales.*

Si le point S s'éloigne indéfiniment sur la droite PP', le cône dégénère en un *cylindre circonscrit*, et le lieu des points de contact de la sphère et de ce cylindre de révolution devient le grand cercle perpendiculaire à la direction PP' des génératrices du cylindre.

THÉORÈME.

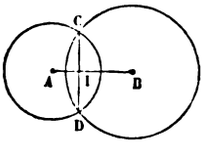
789. *L'intersection de deux sphères* A *et* B *est une circonférence de cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne des centres* AB *des deux sphères et dont le centre est sur cette ligne* (*fig.* 427).

Car cette intersection n'est autre que la circonférence engendrée par la rotation autour de AB du point C commun aux deux circonférences suivant lesquelles les deux sphères sont coupées par un plan quelconque passant par AB.

Scolie.

790. Lorsque deux sphères n'ont qu'un point commun, on dit qu'elles sont tangentes en ce point, qu'on nomme *point de contact;* le point de contact est situé sur la ligne des centres, et en ce point les sphères ont le même plan tangent (120).

Fig. 427.

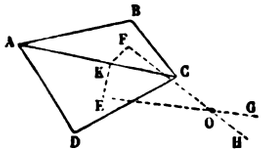


Les positions relatives de deux sphères sont au nombre de cinq (122), et les relations correspondantes entre la distance des centres et les rayons sont celles qui ont lieu pour les circonférences de grand cercle déterminées dans les sphères données par un plan quelconque passant par la droite des centres.

THÉORÈME.

791. *Par quatre points* A, B, C, D, *non situés dans un même plan, on peut faire passer une surface sphérique, mais une seule* (*fig.* 428).

Fig. 428.



Il s'agit de prouver qu'il existe un point, et un seul, situé à la même distance des quatre points A, B, C, D.

Or, tout point équidistant de A, B, C, D doit se trouver sur la perpendiculaire FH élevée au plan ABC par le centre F du cercle circonscrit au triangle ABC, puisque cette perpendiculaire est le lieu des points équidistants de A, B, C (524); il doit aussi appartenir à la perpendiculaire EG élevée au plan ACD par le centre E du cercle circonscrit au triangle ACD. Comme

deux droites FH, EG ne peuvent avoir qu'un point commun, on voit d'abord qu'il ne saurait jamais exister qu'un seul point équidistant de A, B, C, D. En second lieu, un tel point existe toujours si, conformément à l'hypothèse, les points A, B, C, D ne sont pas situés dans un même plan. En effet, le plan perpendiculaire sur le milieu K de AC, étant le lieu des points équidistants de A et de C, doit contenir EG et FH; d'ailleurs, les deux droites KF et KE, suivant lesquelles il rencontre les plans ABC et ADC, se coupent, puisque les plans ABC et ADC sont distincts; donc les deux droites EG et FH, étant situées dans un même plan EKF, et étant, dans ce plan, perpendiculaires à deux droites KF et KE qui se coupent, ont un point commun O qui est le centre de la sphère demandée.

Corollaires.

792. Deux sphères, qui ont quatre points communs non situés dans un même plan, coïncident.

793. Les perpendiculaires élevées aux quatre faces d'un tétraèdre par le centre du cercle circonscrit à chacune de ces faces se coupent en un même point.

§ IV. — PROPRIÉTÉS DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

Définitions.

794. On nomme *angle de deux courbes* passant par un même point de l'espace l'angle de leurs tangentes en ce point. *L'angle de deux courbes tracées sur la sphère est* donc *égal à l'angle des plans menés respectivement par le centre de la sphère et par les tangentes à ces courbes au point commun;* car, ces tangentes étant perpendiculaires au rayon qui aboutit au point commun (772), leur angle mesure le dièdre des deux plans considérés. En particulier, *l'angle de deux arcs de grand cercle est égal à l'angle des plans de ces arcs.*

Théorème.

795. *L'angle* APB *de deux arcs de grand cercle* PAP', PBP' *a pour mesure, soit l'arc de grand cercle* AB *décrit de son som-*

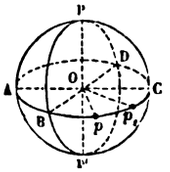
met P *comme pôle et compris entre ses côtés, soit le plus petit arc de grand cercle* pp_1, *qui unit les pôles de ses côtés* (*fig.* 429).

En effet :

1° Les arcs PA, PB étant des quadrants, les angles POA, POB sont droits, et l'angle AOB est l'angle plan qui mesure l'angle dièdre formé par les plans des deux grands cercles. Mais (794) cet angle dièdre est égal à l'angle APB des deux arcs de grands cercles, et l'angle au centre AOB a pour mesure l'arc AB; donc l'arc AB est aussi la mesure de l'angle APB.

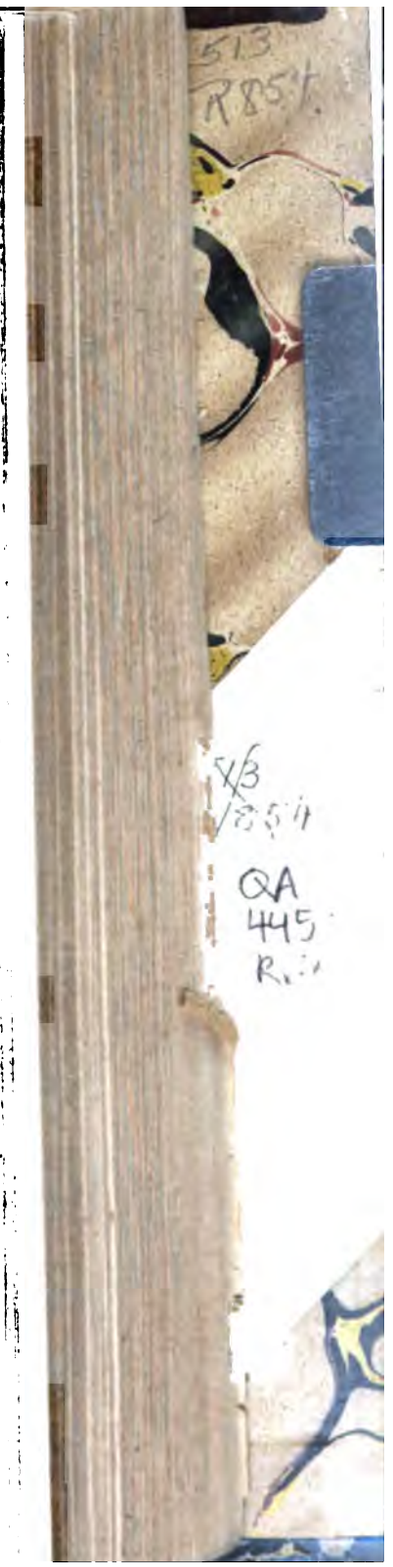
2° Prenons sur la circonférence ABC, à partir des points A et B, *dans le même sens*, deux arcs Ap et Bp_1, égaux à un quadrant; l'arc pp_1 est évidemment égal à l'arc AB, et, pour justifier le second énoncé du théorème, il suffit de prouver que p et p_1 sont les pôles des cercles PAP′, PBP′. Or, la droite Op, perpendiculaire à OA, puisque l'arc Ap est un quadrant,

Fig. 429.



et perpendiculaire à OP, puisqu'elle est dans le plan ABC, est perpendiculaire au plan du grand cercle PAP′; p est donc le pôle de ce grand cercle. De même, p_1 est le pôle du grand cercle PBP′.

Nous avons dit que nous portions les arcs Ap et Bp_1 dans le même sens, à partir de leurs origines respectives A et B; si on les portait l'un dans un sens et l'autre en sens contraire, l'arc pp_1 serait le supplément de l'angle des deux grands cercles. Il y a donc une précaution à prendre dans l'application du second énoncé. Il faut considérer, pour l'un des grands cercles PAP′, le pôle p qui est du même côté que le demi-cercle PBP′ et, pour l'autre grand cercle PBP′, le pôle p_1 qui n'est pas du même côté que le demi-cercle PAP′.


513
R85t
QA
445

COROLLAIRES.

796. Le lieu géométrique des pôles des grands cercles inclinés d'un angle donné sur un grand cercle donné se compose de deux cercles dont les pôles se confondent avec ceux du grand cercle donné. Le rayon sphérique de ces cercles est égal à l'arc de grand cercle qui mesure l'angle donné.

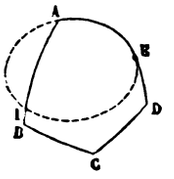
797. Pour que deux grands cercles se coupent à angle droit, il faut et il suffit que chacun d'eux renferme le pôle de l'autre.

798. Deux grands cercles APC, BPD (*fig.* 429) forment en se coupant au point P quatre angles APB, BPC, CPD, DPA; les angles adjacents APB, BPC sont supplémentaires, les angles opposés par le sommet APB, CPD sont égaux.

DÉFINITIONS.

799. On appelle *polygone sphérique* la portion de surface sphérique ABCDE comprise entre plusieurs arcs de grand cercle. Ces arcs AB, BC, CD, DE, EA sont les *côtés* du polygone; les angles ABC, BCD,... qu'ils forment, et les sommets B, C,... de ces angles sont les *angles* et les *sommets* du polygone (*fig.* 430).

Fig. 430.



Un polygone sphérique est dit *convexe* lorsque chaque côté prolongé laisse tout le polygone dans le même hémisphère.

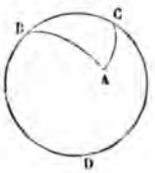
Chaque côté d'un polygone sphérique convexe est moindre qu'une demi-circonférence de grand cercle. Car, si le côté AB, par exemple, était plus grand qu'une demi-circonférence, on pourrait prendre sur AB, entre A et B, un point I tel, que AI

fût égal à une demi-circonférence; dès lors, le grand cercle auquel appartient le côté AE passerait par le point I (776), et le polygone ne serait pas tout entier dans l'un des deux hémisphères déterminés par ce grand cercle AE.

Un polygone sphérique convexe ne peut être rencontré en plus de deux points par un arc de grand cercle (26).

800. Le polygone sphérique le plus simple est le *triangle sphérique;* c'est la portion ABC de la surface de la sphère comprise entre trois arcs de grand cercle AB, BC, CA, *qui sont chacun moindres qu'une demi-circonférence.* D'après cela, un triangle sphérique est toujours convexe (*fig.* 431).

Fig. 431.



On pourrait admettre des côtés qui surpasseraient la demi-circonférence, et appeler encore triangle sphérique la figure formée par des arcs tels que AB, AC, BDC, dont le dernier est supérieur à une demi-circonférence. Mais d'abord cela serait incommode, parce que ces nouvelles figures présenteraient des angles, tels que A, qui surpasse deux angles droits ; et ensuite cela est inutile, car la connaissance des éléments du triangle sphérique proprement dit ABC entraîne celle de tous les éléments de la figure formée par les arcs AB, AC, BDC.

Un triangle sphérique est *isocèle, équilatéral, rectangle,* dans les mêmes circonstances qu'un triangle rectiligne.

801. En joignant les sommets d'un triangle sphérique ABC (*fig.* 432) au centre O de la sphère, on forme un angle trièdre OABC, dont les faces AOB, BOC,... ont la même mesure (127) que les côtés correspondants AB, BC, ... du triangle sphérique, et dont les angles dièdres OA, OB, ... ont la même mesure (794) que les angles A, B, ... de ce triangle. La même

remarque s'étend à un polygone sphérique ABCD (*fig.* 433) et à l'angle polyèdre correspondant OABCD.

D'après cela, *à chaque propriété des angles trièdres ou polyèdres répond une propriété analogue des triangles ou polygones sphériques;* et, pour énoncer cette propriété, il suffit de remplacer respectivement les mots *face* et *angle dièdre* par les mots *côté* et *angle*.

Fig. 432.

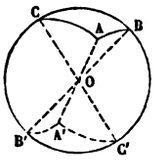
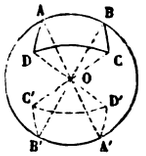


Fig. 433.



C'est même cette marche que l'on suit pour établir les premières propriétés des figures sphériques. Mais plus tard, et pour des propriétés moins simples, il est ordinairement préférable de faire l'inverse, c'est-à-dire d'établir directement les propriétés des figures sphériques pour en déduire les propriétés des angles polyèdres correspondants. On raisonne en effet sur une surface, et en particulier sur la sphère, presque aussi aisément que sur un plan, tandis qu'il faut un certain effort pour se représenter une figure de l'espace un peu compliquée. L'étude de l'Astronomie ne laisse à cet égard aucun doute, et la conception de la sphère céleste est un des plus heureux artifices géométriques qu'on ait imaginés.

802. Si l'on prolonge les arêtes de l'angle polyèdre OABCD (*fig.* 433) au delà du sommet O, on forme un angle polyèdre symétrique OA'B'C'D', qui détermine sur la surface de la sphère un polygone A'B'C'D'. Les deux polygones ABCD, A'B'C'D', dont les sommets sont ainsi diamétralement opposés deux à deux, sont appelés *polygones sphériques symétriques*. Les considérations développées au n° 566 conduisent aux propriétés suivantes :

1° *Deux polygones symétriques ont leurs angles et leurs côtés égaux deux à deux ;* 2° *ces polygones ne sont pas en gé-*

néral superposables, attendu que les parties respectivement égales sont disposées dans un ordre inverse ; 3° *pour qu'un triangle sphérique soit superposable à son symétrique* (*fig.* 432), *il faut et il suffit qu'il ait deux angles égaux, et dans un tel triangle les côtés opposés aux angles égaux sont égaux ;* en d'autres termes, ce triangle est *isocèle.*

THÉORÈME.

803. *Dans tout polygone sphérique, un côté quelconque est moindre que la somme de tous les autres.*

En effet, soit ABCD le polygone proposé (*fig.* 433). Dans l'angle polyèdre correspondant OABCD, on a (567)

$$\text{AOB} < \text{BOC} + \text{COD} + \text{DOA}.$$

Donc (127)

$$\text{arc AB} < \text{arc BC} + \text{arc CD} + \text{arc DA}.$$

Scolies.

804. *Dans tout triangle sphérique* ABC (*fig.* 434), *à un plus grand angle est opposé un plus grand côté.*

Fig. 434.

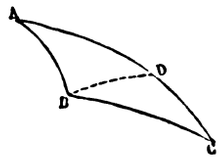
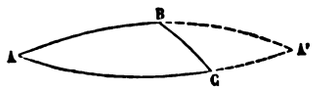


Fig. 435.



Cela résulte de la propriété analogue de l'angle trièdre (568). On peut aussi le démontrer comme il suit. Soit l'angle ABC plus grand que l'angle C; on pourra mener dans l'angle ABC un arc de grand cercle BD qui fasse avec BC un angle DBC égal à l'angle C. Le triangle BDC ayant deux angles égaux DBC, DCB sera isoscèle (802), et l'on aura BD = DC. Or le triangle ABD donne (803)

$$\text{AB} < \text{AD} + \text{BD}$$

et, en remplaçant le côté BD par son égal DC,

$$\text{AB} < \text{AD} + \text{DC} \quad \text{ou} \quad \text{AB} < \text{AC}.$$

513
R85t
QA
445
P..

En rapprochant ce théorème de celui qui a été démontré au n° 802 (3°), on voit que : réciproquement, *si un triangle sphérique est isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux, et si un triangle sphérique a deux côtés inégaux, au plus grand côté est opposé le plus grand angle.*

805. De ce qu'un triangle sphérique isocèle est superposable à son symétrique, il résulte que, *dans tout triangle sphérique isocèle, l'arc de grand cercle qui joint le sommet au milieu de la base est perpendiculaire sur cette base et divise l'angle au sommet en deux parties égales.*

806. Enfin les propriétés du triangle rectiligne, démontrées aux n°s 40 et 41, s'appliquent au triangle sphérique et s'énoncent de même ; il suffit de remplacer le mot *droite* par les mots *arc de grand cercle.*

THÉORÈME.

807. *Dans tout polygone sphérique convexe, la somme des côtés est moindre qu'une circonférence.*

Car la somme des faces de l'angle polyèdre correspondant est moindre que quatre angles droits (570).

La démonstration directe est d'ailleurs facile. Considérons d'abord un triangle sphérique ABC (*fig.* 435), et prolongeons les côtés AB et AC jusqu'à leur rencontre A' ; les deux arcs ABA', ACA' sont des demi-circonférences de grand cercle (776) et, comme dans le triangle BCA' le côté BC est moindre que BA' + CA', la somme AB + AC + BC des côtés du triangle ABC est inférieure à ABA' + ACA', c'est-à-dire à une circonférence de grand cercle.

En opérant d'une manière analogue sur un polygone, c'est-à-dire en remplaçant un côté par les prolongements des deux qui lui sont adjacents, on voit que, si la proposition est vraie pour un polygone convexe, elle subsiste pour le polygone convexe qui a un côté de plus ; donc elle est générale.

THÉORÈME.

808. ***Si un triangle sphérique*** **A′B′C′** ***est le triangle polaire d'un triangle sphérique donné*** **ABC,** ***réciproquement*** **ABC** ***sera le triangle polaire de*** **A′B′C′.**

Pour bien comprendre la définition du triangle polaire et l'objet du présent théorème, il convient de faire une remarque.

Soient EIF un grand cercle (*fig.* 436), P l'un de ces pôles, et M un point quelconque de la sphère. Si P et M sont d'un même côté du grand cercle EF, le plus petit arc de grand cercle qui va de P en M est moindre qu'un quadrant PI. Si P et M sont de part et d'autre du grand cercle EF, le plus petit arc de grand cercle allant de P en M est supérieur à un quadrant.

Fig. 436.

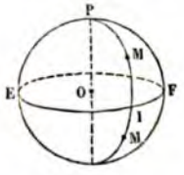
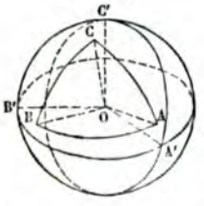


Fig. 437.



Cela posé, on nomme *triangle polaire* d'un triangle sphérique ABC un nouveau triangle A′B′C′ (*fig.* 437) dont les sommets sont définis de la manière suivante : A′ est celui des deux pôles du grand cercle BC qui est, par rapport à ce grand cercle, du même côté que le sommet opposé A; de même B′ est le pôle de AC qui est situé par rapport à AC du même côté que B, et C′ est le pôle de AB qui est placé par rapport à AB du même côté que C.

Il s'agit de démontrer que, réciproquement, le triangle ABC est le triangle polaire de A′B′C′. A cet effet, considérons l'un quelconque de ses sommets, C par exemple; A′ étant le pôle de BC, l'arc de grand cercle qui joindrait C et A′ est un quadrant; de même l'arc de grand cercle CB′ est un quadrant, puisque B′ est le pôle de AC. Donc, le point C (780) est le

pôle de A'B'. De plus, puisque C' est le pôle de AB qui se trouve par rapport à AB du même côté que C, le plus petit arc du grand cercle allant de C en C' est moindre qu'un quadrant ; par suite, C est le pôle de A'B' qui se trouve par rapport à A'B' du même côté que C'.

SCOLIE.

809. D'après cela, le triangle polaire A'B'C' d'un triangle donné ABC peut être considéré comme obtenu en décrivant des sommets A, B, C, pris successivement pour pôles, trois circonférences de grand cercle. Ces trois circonférences divisent la surface de la sphère (*fig.* 437) en huit triangles, dont l'un A'B'C' est le triangle polaire de ABC. C'est celui qui est tel, que les sommets A et A' soient d'un même côté par rapport à BC, les sommets B et B' d'un même côté par rapport à AC, et les sommets C et C' d'un même côté par rapport à AB.

Les deux trièdres OABC, OA'B'C', qui répondent à deux triangles polaires ABC, A'B'C', sont supplémentaires (572). En effet, d'après la construction du point C', on voit que l'arête OC', par exemple, est perpendiculaire (779) au plan AOB et située par rapport à ce plan du même côté que OC : on raisonnerait de même pour les autres arêtes OB' et OA'. Chaque angle de l'un des triangles ABC, A'B'C', doit donc (573) être le supplément du côté opposé de l'autre triangle. Mais cette propriété, en vertu de laquelle deux triangles polaires sont aussi appelés *triangles supplémentaires*, mérite d'être démontrée directement; c'est là l'objet du théorème qui suit.

THÉORÈME.

810. *Si* ABC, A'B'C' *sont deux triangles polaires, chaque angle de l'un de ces triangles a pour mesure une demi-circonférence de grand cercle, moins le côté opposé dans l'autre triangle* (*fig.* 438).

En effet, considérons, par exemple, l'angle A et prolongeons, s'il le faut, les côtés AB et AC jusqu'à la rencontre de l'arc B'C'; puisque A est le pôle de B'C', l'angle A a pour mesure l'arc DE (795); mais on a évidemment

$$DE = B'E + DC' - B'C'.$$

D'ailleurs B'E et DC' sont des quadrants, puisque B' est le pôle de AC et C' le pôle de AB; on a donc

$$DE = \tfrac{1}{2}\text{ circ. de grand cercle} - B'C'.$$

On procéderait de la même manière pour les angles B et C.

Fig. 438.

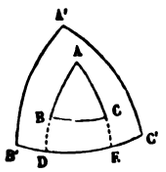


Fig. 439.

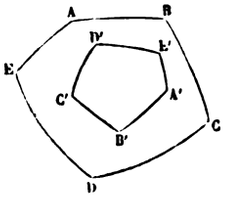
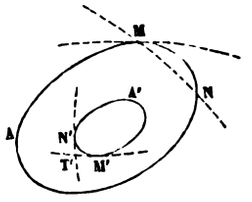


Fig. 440.



Les triangles ABC et A'B'C' résultant l'un de l'autre par la même construction (808), la propriété que nous venons de démontrer pour les angles A, B, C du premier triangle convient aux angles A', B', C' du second. On prouverait d'ailleurs directement que l'angle A', par exemple, a pour mesure le supplément de BC, en prolongeant BC jusqu'à la rencontre de A'B' et de A'C'.

Scolie.

811. Les propriétés des triangles polaires s'étendent aux polygones et aux courbes sphériques.

Soit (*fig.* 439) un polygone sphérique convexe ABCDE; prenons, des deux pôles de l'arc de grand cercle EA, celui A' qui, par rapport à EA, est dans le même hémisphère que le polygone ABCDE; prenons d'une manière analogue les pôles B', C', D', E' des côtés AB, BC, CD, DE. Le polygone A'B'C'D'E' sera le polygone *polaire* du proposé, et l'on démontrera, comme aux n°s 808 et 810 : 1° que, *si un polygone sphérique* A'B'C'D'E' *est le polygone polaire d'un polygone donné* ABCDE, *réciproquement* ABCDE *est le polygone polaire de* A'B'C'D'E'; 2° que, *dans deux polygones polaires, tout angle de l'un est le supplément du côté de l'autre dont le sommet de l'angle considéré est le pôle.*

812. On appelle *arc de grand cercle tangent en un point* M *d'une courbe sphérique* AMN (*fig.* 440) la limite des positions que prend la

513
R85t.
QA
445
R62

grand cercle mené par le point M et un point voisin N, lorsque ce second point N de la courbe tend vers le premier. Une courbe sphérique est *convexe* si le grand cercle tangent en l'un quelconque de ses points laisse la courbe tout entière dans un seul hémisphère (799). Une courbe sphérique convexe ne saurait être rencontrée par un grand cercle en plus de deux points; et, des deux *arcs* de grand cercle qui joignent deux points quelconques de la courbe, le plus petit, c'est-à-dire celui qui est moindre qu'une demi-circonférence, est à l'*intérieur* de la courbe.

Cela posé, soit A'M' (*fig.* 440) une courbe sphérique convexe; en un point quelconque M' de cette courbe, menons le grand cercle tangent et prenons le pôle M de ce cercle qui est dans le même hémisphère que la courbe A'M'; le lieu des points M est la *courbe polaire* AM de A'M'. Inversement, la courbe A'M' est la courbe polaire de AM; en d'autres termes, le point M' est le pôle de l'arc de grand cercle tangent en M à la courbe AM; car si N est le pôle de l'arc de grand cercle N'T' tangent à la courbe A'M' en un point N' voisin de M', le point T' sera le pôle (780) de l'arc sécant MN, et, quand ce dernier arc deviendra tangent en M, le point T' se confondra avec M'. Ainsi les points M et M' des deux courbes se correspondent deux à deux, de telle sorte que le point M soit le pôle de l'arc de grand cercle tangent en M' et que le point M' soit le pôle de l'arc de grand cercle tangent en M.

Deux figures sphériques polaires sont des figures corrélatives : à tout point de l'une répond un arc de grand cercle dans l'autre, de telle sorte que, si trois points de la première sont sur un même grand cercle, les trois arcs de grand cercle correspondants de la seconde passent par un même point, pôle de ce grand cercle. Tout théorème en engendre immédiatement un autre; et c'est même cette corrélation des figures sphériques qui a suggéré l'idée du principe général de *dualité*.

COROLLAIRES.

813. *Dans tout triangle sphérique :* 1° *la somme des angles est comprise entre deux et six angles droits;* 2° *le plus petit angle augmenté de deux droits surpasse la somme des deux autres angles.*

La démonstration est la même que pour les angles trièdres (575), et les propriétés énoncées peuvent être elles-mêmes considérées comme une conséquence des propriétés correspondantes des trièdres.

Il résulte de là qu'un triangle sphérique peut avoir un, deux ou trois angles droits. Quand le triangle est *birectangle*, le sommet de l'angle qui n'est pas droit est le pôle du côté

opposé, et les côtés qui comprennent cet angle sont des quadrants. Dans le triangle sphérique *trirectangle*, tous les côtés sont des quadrants; le triangle trirectangle est le *huitième* de la sphère sur laquelle il est tracé : on le voit immédiatement en prolongeant les arcs de grand cercle qui forment les côtés du triangle.

THÉORÈME.

814. *Deux triangles sphériques tracés sur la même sphère ou sur des sphères égales sont égaux dans toutes leurs parties :* 1° *lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun;* 2° *lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun;* 3° *lorsqu'ils ont les côtés égaux chacun à chacun;* 4° *lorsqu'ils ont les angles égaux chacun à chacun. — Dans tous les cas, ils sont égaux ou symétriques, suivant que la disposition des éléments donnés est la même ou est inverse.*

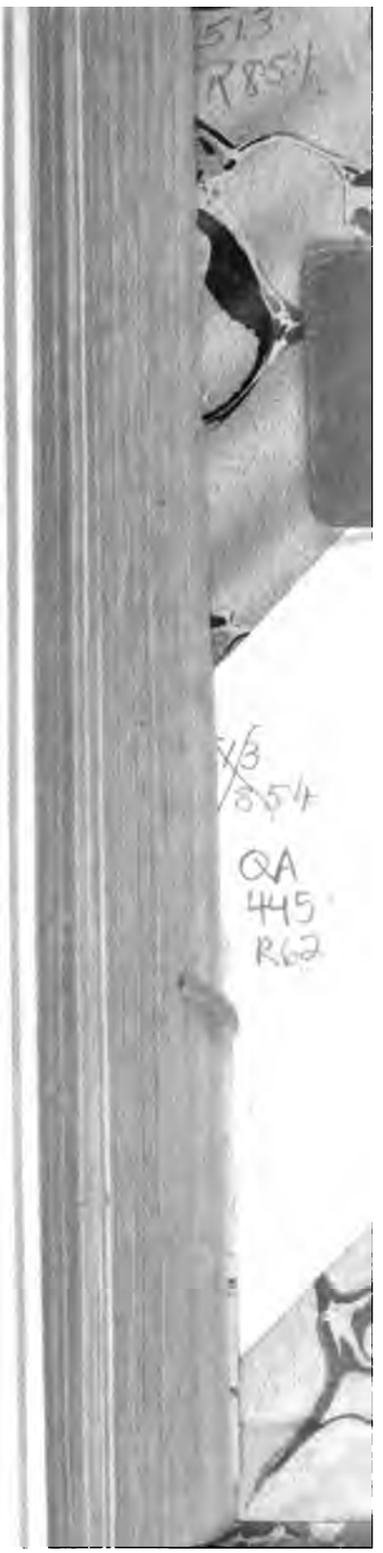
Ce théorème est une conséquence des propriétés analogues (577, 578) des angles trièdres. On peut aussi le démontrer directement.

Supposons d'abord que la disposition des éléments soit la même dans les deux triangles, on démontrera l'égalité pour les trois premiers cas en raisonnant comme au n° 32 de la Géométrie plane. Quant au quatrième cas, il résulte du troisième par la considération du triangle polaire (810). Remarquons, en outre, que les deux premiers cas sont aussi corrélatifs l'un de l'autre.

Si la disposition des éléments donnés est inverse, le premier triangle et le symétrique du second présenteront la même disposition : ils seront donc égaux en vertu des données; par suite, les triangles proposés seront symétriques.

Scolie.

815. Un trièdre, dont le sommet est placé au centre de deux sphères concentriques, détermine évidemment sur ces sphères deux triangles sphériques dont les angles sont respectivement égaux et les côtés proportionnels (296). Deux triangles sphériques de cette nature sont dits *semblables*.


513
R85t
QA
445
R62

THÉORÈME.

816. ***Le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface de la sphère est l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui joint ces deux points.***

1° Il faut, avant tout, définir *la longueur d'un arc de courbe gauche*, c'est-à-dire dont tous les points ne sont pas situés dans un même plan. Cette longueur se définit comme celle d'un arc de courbe plane. *C'est la limite du périmètre d'une ligne brisée qui est inscrite dans cet arc et dont les côtés tendent vers zéro.*

Nous allons prouver que cette limite existe et qu'elle est unique, c'est-à-dire indépendante de la loi suivant laquelle on fait tendre vers zéro les divers côtés de la ligne brisée.

Soient (*fig.* 441) AB un arc de courbe gauche, *ab* sa projection orthogonale sur un plan quelconque P, M un point quelconque de AB et *m* la projection de ce point. Dans un plan pris à volonté, menons une droite indéfinie x_1y_1 (*fig.* 442) et prenons sur cette droite, à partir d'un point a_1, une longueur a_1m_1 égale à la longueur de l'arc *am*; puis, au point m_1, élevons sur x_1y_1 la perpendiculaire m_1M_1 égale à la projetante Mm. A tout point M de la courbe AB répondra ainsi un point M_1 et, lorsque le point M décrira l'arc AB, le point M_1 décrira un arc de courbe plane A_1B_1, dont nous désignerons la longueur par *l*.

Fig. 441.

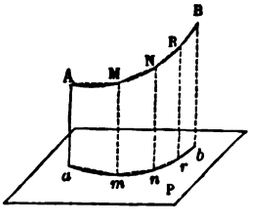
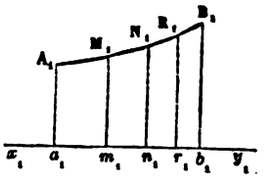


Fig. 442.



Cela posé, soient AMNRB une ligne brisée quelconque inscrite dans l'arc AB et *amnrb*, $A_1M_1N_1R_1B_1$ les lignes brisées correspondantes inscrites dans la projection *ab* et dans la ligne plane A_1B_1. La valeur du rapport

$$\frac{AM + MN + NR + RB}{A_1M_1 + M_1N_1 + N_1R_1 + R_1B_1} \qquad (1)$$

est compriso entre les valeurs de deux des rapports

$$(2)\qquad \frac{AM}{A_1M_1},\ \frac{MN}{M_1N_1},\ \frac{NR}{N_1R_1},\ \frac{RB}{R_1B_1}.$$

Par suite, si l'on peut prouver que chacun de ces rapports a l'unité pour limite, il en sera de même du rapport (1); et, comme le dénominateur de ce rapport a pour limite la quantité bien définie l, quelle que soit la loi suivant laquelle les côtés de la ligne brisée AMNRB tendent vers zéro (291), son numérateur aura aussi l pour limite, quelle que soit cette loi.

Prenons donc l'un quelconque des rapports (2), $\frac{MN}{M_1N_1}$ par exemple. Désignons par δ la différence $Nn - Mm$, ou son égale $N_1n_1 - M_1m_1$. Le carré du rapport considéré aura pour expression

$$\frac{\overline{mn}^2 + \delta^2}{\overline{m_1n_1}^2 + \delta^2}.$$

La valeur de ce carré est donc comprise entre

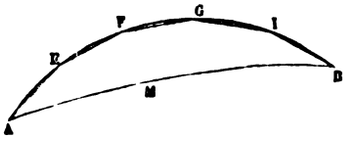
$$\left(\frac{mn}{m_1n_1}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{\delta^2}{\delta^2} \text{ ou } 1.$$

Mais, m_1n_1 étant la longueur de l'arc de courbe plane dont mn est la corde, le rapport $\frac{mn}{m_1n_1}$ a l'unité pour limite (292) quand m_1n_1 tend vers zéro. La limite de $\frac{MN}{M_1N_1}$ est donc égale à 1.

2° *La longueur d'un arc de courbe sphérique est égale à la limite du périmètre d'une ligne brisée sphérique qui est inscrite dans cet arc et dont les côtés tendent vers zéro.*

En effet, soient AGB (*fig.* 443) un arc de courbe quelconque

Fig. 443.



tracé sur la sphère, et AEFGIB une ligne brisée sphérique inscrite dans cet arc, c'est-à-dire une ligne formée de portions d'arcs de grands cercles, ayant ses extrémités en A et en B et ses sommets intermédiaires situés sur l'arc de courbe AGB.

513
R85t.
QA
445
R62

Si les arcs de grands cercles, dont la longueur de la ligne brisée sphérique est la somme, tendent séparément vers zéro, suivant une loi d'ailleurs quelconque, le rapport de chacun de ces arcs à sa corde aura l'unité pour limite. Il en sera donc de même du rapport de la longueur de la ligne brisée à la somme des cordes. Et, comme (1°) la somme des cordes a pour limite la longueur de l'arc de courbe AGB, on voit que la longueur de la ligne brisée sphérique inscrite dans l'arc de courbe quelconque AGB a aussi pour limite la longueur de cet arc.

3° Il est maintenant très-facile de trouver le plus court chemin entre deux points A et B sur la surface de la sphère (*fig.* 443).

Soient AMB l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui unit les points A et B, et AGB une courbe sphérique quelconque tracée entre ces deux points. AEFGIB étant une portion de polygone sphérique inscrite dans cette courbe, on aura (803)

$$\text{AMB} < \text{AE} + \text{EF} + \text{FG} + \text{GI} + \text{IB}.$$

Or, si l'on fait tendre vers zéro les côtés du polygone inscrit, le second membre a pour limite (2°) la longueur de l'arc de courbe AGB. Donc l'arc de grand cercle AMB est moindre que toute autre courbe sphérique allant de A en B : c'est le plus court chemin du point A au point B sur la sphère.

D'après cela, on appelle *distance sphérique* de deux points A et B d'une sphère la longueur de l'arc de grand cercle moindre qu'une demi-circonférence qui unit ces deux points.

THÉORÈME.

817. *Pour qu'un grand cercle soit perpendiculaire à un petit cercle* AMB, *il faut et il suffit que le grand cercle passe par les pôles* P *et* P' *du petit cercle* (*fig.* 426).

En d'autres termes, si l'on désigne par O le centre de la sphère et, respectivement, par MS et par MT les tangentes au grand cercle et au petit cercle au point commun M, pour que l'angle SMT soit droit, il faut et il suffit que les plans OMS, MPP' coïncident.

En effet, le plan MPP' est perpendiculaire à MT, puisqu'il contient deux

droites OM et PP′ qui sont à angle droit sur MT. Donc, si l'angle SMT est droit, MS est dans le plan MPP′ qui, par suite, coïncide avec le plan OMS. Inversement, si les plans OMS, MPP′ coïncident, la droite MS contenue dans le plan MPP′ est à angle droit sur la perpendiculaire MT à ce plan.

COROLLAIRES.

818. *Par un point* O *de la sphère, on peut mener un grand cercle perpendiculaire à un cercle donné* AB *et l'on ne peut en mener qu'un :* c'est le grand cercle OPI′P′I qui passe par le point O et par les pôles P et P′ du cercle AB (*fig.* 444).

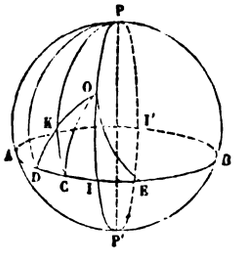
Il y aurait toutefois indétermination si le point O coïncidait avec l'un des pôles P et P′.

En laissant de côté ce cas singulier, on voit que, du point O, on peut mener deux *arcs* de grand cercle, OI et OPI′, normaux à un cercle donné AB.

THÉORÈME.

819. *Si, d'un point* O *d'une sphère, on mène, sur un cercle* AB, *le plus petit*, OI, *des deux arcs de grand cercle normaux et plusieurs arcs de grand cercle obliques* OC, OD, OE (*fig.* 444) :

Fig. 444.



1° *L'arc perpendiculaire* OI *est moindre que tout arc oblique* OC;

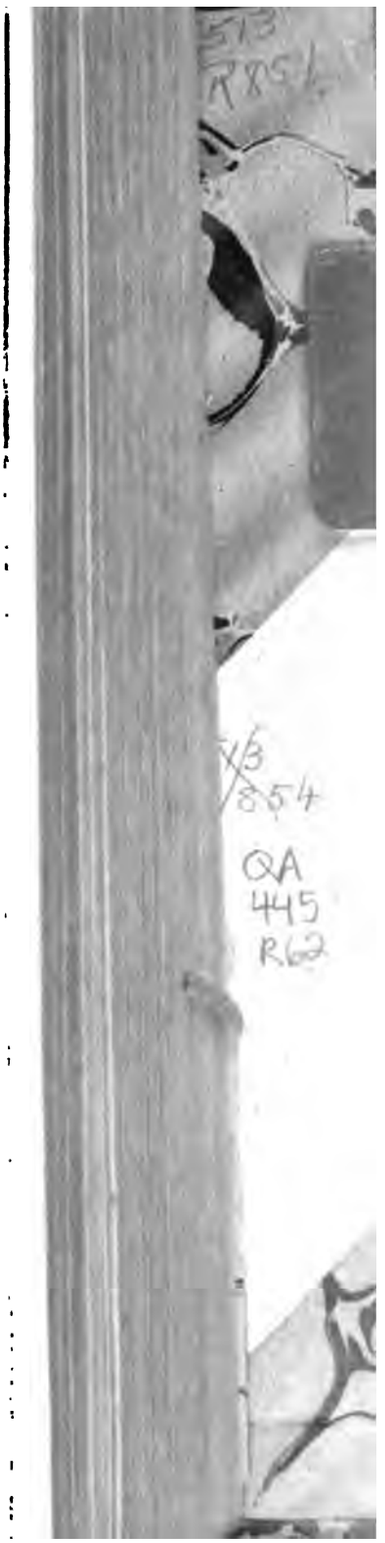
2° *Deux arcs obliques,* OC *et* OE, *dont les pieds* C *et* E *sont équidistants du pied* I *de l'arc normal, sont égaux;*

3° *De deux arcs obliques,* OC *et* OD, *ou* OE *et* OD, *celui dont le pied s'écarte le plus du pied* I *de l'arc normal est le plus long.*

En effet, le cercle AB divise la sphère en deux calottes dont l'une contient le point O; soit P le pôle de AB qui est situé dans cette calotte : menons les arcs de grand cercle PC, PD, et désignons par K l'intersection des arcs OD et PC.

1° Dans le triangle sphérique POC, on a

$$PC - PO < OC,$$


513
R85
X3
854
QA
445
R62

c'est-à-dire

$$PI - PO \quad \text{ou} \quad OI < OC.$$

2° Les points C et E étant symétriques par rapport au plan du grand cercle PIP', les cordes OC et OE sont symétriques par rapport au même plan et, par suite, égales entre elles; donc les arcs de même rayon, OC et OE, qu'elles sous-tendent, sont égaux.

3° Les triangles sphériques OKC, PKD donnent

$$OC < OK + KC, \quad PD < PK + KD,$$

d'où, en ajoutant,

$$OC + PD < OD + PC$$

et, enfin, à cause de $PD = PC$,

$$OC < OD.$$

COROLLAIRES.

820. Si le point C décrit le cercle AB en partant du point I, l'arc de grand cercle OC, d'abord égal à OI, croît, devient égal à OPI', puis décroît jusqu'à la valeur primitive OI. Parmi les chemins qui conduisent du point O au cercle AB, le plus court est donc le plus petit, OI, des deux arcs normaux qu'on peut mener du point O au cercle AB. Aussi, donne-t-on à la longueur de cet arc OI le nom de *distance sphérique* du point O au cercle AB.

Les réciproques des propositions précédentes sont vraies (7).

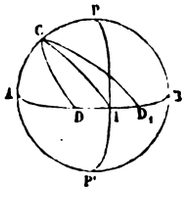
Le lieu géométrique des points de la sphère équidistants de deux points de cette surface est le grand cercle perpendiculaire sur le milieu de l'arc de grand cercle qui unit les deux points (49).

Deux triangles sphériques rectangles sont égaux ou symétriques : 1° lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle oblique égal ; 2° lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté égal (50).

L'arc de grand cercle bissecteur de l'angle de deux grands cercles est le lieu des points de la sphère équidistants des deux côtés de cet angle (53).

Les raisonnements sont les mêmes qu'en Géométrie plane.

Fig. 445.



821. Voici encore deux remarques importantes :

1° *Dans tout triangle sphérique rectangle, le nombre des côtés supérieurs*

rieurs à un quadrant est pair. En effet, soient (*fig.* 445) trois grands cercles APB, AIB, PIP', perpendiculaires deux à deux; sur AP, prenons un arc AC moindre qu'un quadrant et joignons par un arc de grand cercle CD le point C à un point quelconque D de AIB. Dans le triangle rectangle CAD, le côté AC est aigu, et l'on voit que tant que AD reste aigu, c'est-à-dire moindre que le quadrant AI, CD reste inférieur à CI, c'est-à-dire à un quadrant; si AD devient obtus comme AD_1, l'arc CD_1 est supérieur à CI, c'est-à-dire à un quadrant. Le triangle ACD a donc ses trois côtés aigus, ou un aigu et deux obtus. On prouverait pareillement que le triangle rectangle CDB, dont le côté BPC est obtus, possède toujours deux côtés obtus et un aigu, car, BD étant obtus, CD est aigu, et, BD_1 étant aigu, CD_1 est obtus.

2° *Dans tout triangle sphérique rectangle, tout angle oblique est de même espèce que le côté opposé.* En effet, l'angle ACI étant droit, l'angle ACD est aigu et l'angle ACD_1 est obtus; or AD est aigu et AD_1 est obtus.

THÉORÈME.

822. *L'arc de grand cercle, tangent à un petit cercle, est perpendiculaire à l'extrémité du rayon sphérique qui aboutit au point de contact.*

Car le rayon sphérique, étant un grand cercle passant par le pôle du petit cercle, est perpendiculaire (817) à ce petit cercle et, par suite, au grand cercle tangent.

Scolie.

823. Les propositions suivantes se démontrent comme en Géométrie plane.

Lorsque deux petits cercles d'une sphère se coupent, l'arc de grand cercle qui passe par leurs pôles est perpendiculaire sur le milieu de l'arc de grand cercle qui passe par leurs deux points d'intersection.

Lorsque deux petits cercles d'une sphère sont tangents, leur point de contact est situé sur le grand cercle qui passe par leurs pôles, et l'arc de grand cercle mené par le point de contact à angle droit sur celui qui unit les pôles est tangent à chacun des deux petits cercles.

On dit qu'un *point* de la sphère est *intérieur* ou *extérieur à un petit cercle,* suivant qu'il est situé dans la plus petite ou dans la plus grande des deux calottes que ce cercle détermine sur la sphère. Sa distance sphérique (816) au pôle du petit cercle est, dans le premier cas, inférieure et, dans le second, supérieure au rayon sphérique (781) de ce cercle.

Étant donnés deux petits cercles d'une sphère, on dit : 1° que les deux cercles sont *extérieurs,* lorsque tout point de chacun d'eux est extérieur à l'autre; 2° que le premier est *intérieur* au second, lorsque tout point

du premier est intérieur au second, et alors tout point du second est extérieur au premier.

Cela posé, soient R et r les rayons sphériques de deux petits cercles, et D la distance sphérique de leurs pôles. Le quart d'un grand cercle étant pris pour unité, R et r sont moindres que 1 et D est inférieur à 2. ***Si les cercles sont extérieurs***, on a $D > R + r$; *si les cercles sont tangents extérieurement*, on a $D = R + r$; *si les cercles se coupent*, on a à la fois $R + r > D > R - r$; *si le cercle r touche intérieurement le cercle* R, on a $D = R - r$; enfin, *si le cercle r est intérieur au cercle* R, on a $D < R - r$. Les réciproques sont vraies.

THÉORÈME.

824. *Le lieu des sommets des triangles sphériques, qui ont une base commune* DE *et dans lesquels la différence entre l'angle au sommet et la somme des angles à la base est constante en valeur absolue, se compose de deux petits cercles passant par les points* D *et* E *et symétriques par rapport au plan* DEA *du grand cercle* DE.

En effet, C étant un point pris arbitrairement sur la sphère et P étant le pôle du cercle circonscrit au triangle sphérique CDE, désignons respectivement par γ, δ, ε les valeurs des angles à la base dans les triangles isocèles PCD, PDE, PEC. Si le pôle P est à l'intérieur du triangle DEC (comme dans la *fig.* 446), on a

$$D + E - C = (\delta + \gamma) + (\delta + \varepsilon) - (\gamma + \varepsilon) = 2\delta;$$

si P est extérieur au triangle DEC, mais situé du même côté que C par rapport au grand cercle DE, on a

$$D + E - C = (\delta + \gamma) + (\delta - \varepsilon) - (\gamma - \varepsilon) = 2\delta,$$

ou

$$D + E - C = (\delta - \gamma) + (\delta + \varepsilon) - (\varepsilon - \gamma) = 2\delta;$$

enfin, si P et C sont de part et d'autre du grand cercle DE, on a

$$D + E - C = (\gamma - \delta) + (\varepsilon - \delta) - (\gamma + \varepsilon) = -2\delta.$$

Il résulte de là que, si le point C se déplace de façon que la différence $(D + E) - C$ reste constante en valeur absolue, l'angle δ et, par suite, le triangle isocèle DPE restent invariables de grandeur; en sorte que le point P ne peut avoir que deux positions, qui sont symétriques par rapport au plan DEA. Le lieu du sommet C se compose donc du cercle décrit du point P comme pôle avec PD pour rayon et du cercle symétrique par rapport au plan DEA.

Lorsque la différence $(D + E) - C$ est donnée à la fois *en grandeur et en signe*, il faut prendre seulement sur chacun de ces deux cercles l'arc qui est situé par rapport au plan DEA du même côté que son pôle si la différence est positive, et au contraire l'autre arc si la différence est négative.

Quand la différence (D + E) — C est nulle, δ est aussi nul; les deux points P coïncident avec le milieu de DE, et le lieu est le cercle décrit sur DE comme diamètre dans un plan perpendiculaire au plan DEA.

Ce théorème est l'analogue de celui du n° 134 de la *Géométrie plane*. En effet, lorsque, dans un triangle rectiligne CDE, on donne l'angle C, on donne par cela même la différence D + E — C.

PROBLÈME.

825. *Tracer sur la sphère un grand cercle passant par deux points donnés* A *et* B (*fig.* 447).

L'inconnue de la question est le pôle du cercle demandé. Or la distance de ce pôle P à chacun des points A et B est égale à la corde du quadrant (780); on l'obtiendra donc en décrivant successivement deux arcs de cercles, des points A et B comme pôles, avec une distance polaire égale à la corde du quadrant.

Fig. 446.

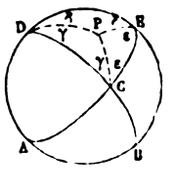


Fig. 447.

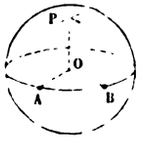
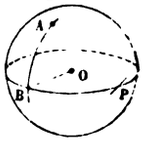


Fig. 448.



PROBLÈME.

826. *Mener par un point donné* A *sur la sphère un arc de grand cercle perpendiculaire à un grand cercle donné* BP (*fig.* 448).

L'inconnue de la question est le pôle du cercle demandé. Or ce pôle P doit se trouver sur le cercle BP (797), et être à une distance du point A égale à la corde du quadrant. On l'obtiendra donc en décrivant, du point A comme pôle, avec une distance polaire égale à la corde du quadrant, un arc de cercle qui rencontre en P le cercle donné BP.

PROBLÈME.

827. *Mener un arc de grand cercle perpendiculaire sur un arc de grand cercle donné* AB, *en son milieu ;* ou, *diviser un arc de grand cercle* AB *en deux parties égales* (*fig.* 449).

Il suffit de décrire des points A et B comme pôles, avec la même ouver-

ture de compas, deux arcs qui se coupent en C et D; puis, de faire passer un grand cercle par C et D.

Remarquons que ce grand cercle CD divise aussi en deux parties égales tous les arcs de petit cercle dont les extrémités sont A et B.

Fig. 449.

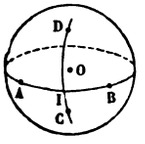
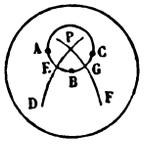


Fig. 450.



PROBLÈME.

828. *Trouver le pôle d'un petit cercle passant par trois points donnés* A, B, C, *sur la sphère* (*fig.* 450).

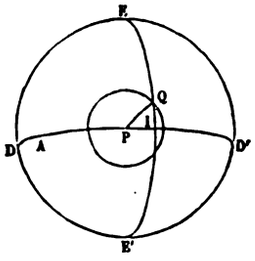
Ce pôle P, étant équidistant de A, B, C, est à l'intersection des arcs de grand cercle élevés perpendiculairement sur les milieux des arcs de grand cercle AB et BC (827).

Le pôle P une fois connu, on tracera le petit cercle avec une ouverture de compas égale à PA.

PROBLÈME.

829. *Par un point* A *donné sur la sphère, mener un grand cercle faisant un angle donné avec un grand cercle donné* DED' (*fig.* 451).

Fig. 451.



Soit P celui des deux pôles du grand cercle donné qui se trouve dans le même hémisphère que le point A, et soit α l'arc de grand cercle qui mesure l'angle donné, lequel peut toujours être supposé aigu.

Le pôle Q du cercle inconnu doit se trouver sur le grand cercle EE' dont A est le pôle, puisque le grand cercle demandé passe par A. Le pôle Q

doit aussi appartenir au petit cercle décrit du point P comme pôle avec un rayon sphérique égal à α, puisque ce petit cercle est le lieu des pôles des grands cercles qui coupent, sous l'angle donné, le grand cercle DED′ (796).

On décrira donc deux cercles, l'un du point A comme pôle avec une ouverture de compas égale à la corde du quadrant, l'autre du point P comme pôle avec une ouverture de compas égale à la corde de l'arc α. Tout point commun Q à ces deux cercles sera le pôle d'un grand cercle satisfaisant à la question proposée.

Pour que le problème soit possible, c'est-à-dire pour que les cercles auxiliaires se coupent, il faut et il suffit, puisque l'angle donné est aigu, que l'on ait

$$PQ > PI \quad \text{ou} \quad \alpha > \delta,$$

en désignant par δ la distance sphérique AD du point donné A au grand cercle donné DED′.

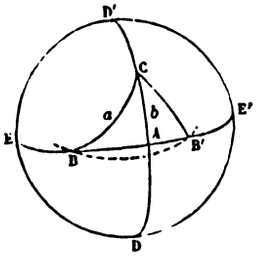
Lorsque le point A est sur le grand cercle donné DED′, le grand cercle EE′ passe par P, et il suffit, pour avoir le point Q, de porter sur le grand cercle EPE′, à partir de P, une ouverture de compas égale à la corde de l'arc α.

PROBLÈME.

830. *Construire un triangle sphérique rectangle, connaissant : 1° un côté de l'angle droit et l'hypoténuse ; 2° un angle et le côté opposé.*

1° Après avoir tracé (*fig.* 452) deux grands cercles perpendiculaires l'un à l'autre, c'est-à-dire deux grands cercles DAD′, EAE′, tels que le

Fig. 452.



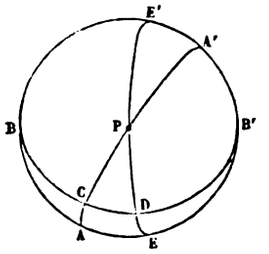
pôle de l'un soit sur l'autre, on portera sur l'un d'eux DD′, à partir du point commun A, un arc AC égal au côté donné b ; puis, du point C comme pôle, avec un rayon sphérique égal à l'hypoténuse donnée a, on décrira un cercle BB′ qui coupera le grand cercle EE′ en deux points symétriques par rapport à DCD′ ; en menant les arcs de grands cercles CB, CB′, on aura

deux triangles sphériques symétriques BAC, B'AC, qui répondent à la question proposée.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le nombre a qui mesure l'hypoténuse soit compris entre les nombres b et $2 - b$ qui mesurent les distances sphériques minimum et maximum du point C au grand cercle EE'.

2° On commencera par tracer deux grands cercles BAB', BCB' (*fig.* 453)

Fig. 453.



faisant entre eux l'angle donné B; soit P le pôle du premier et EPE' le grand cercle qui est perpendiculaire à la fois sur BAB' et BCB'; le problème se réduit à mener un grand cercle, perpendiculaire à BAB', c'est-à-dire passant par P, et tel que la partie CA, interceptée dans le fuseau BEB'D, soit égale au côté donné b. Or PC sera égal alors à $1 - b$. On décrira donc du point P, avec un rayon sphérique égal à $1 - b$, un cercle qui coupera BDB' en deux points; C étant l'un quelconque de ces points, le triangle BCA satisfera à la question, ainsi que le triangle B'CA.

La condition de possibilité consiste dans l'inégalité

$$PC > PD \quad \text{ou} \quad 1 - b > 1 - B,$$

c'est-à-dire

$$b < B.$$

Nous avons supposé l'angle B aigu; s'il était obtus, on aurait

$$PC = b - 1, \quad PD = B - 1,$$

et la condition de possibilité serait $b > B$.

PROBLÈME.

831. *Construire un triangle sphérique, connaissant trois quelconques de ses six éléments* (angles ou côtés).

Ce problème offre six cas distincts; on peut donner : 1° les trois côtés

ou les trois angles; 2° deux côtés et l'angle compris, ou un côté et les deux angles adjacents; 3° deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, ou deux angles et le côté opposé à l'un d'eux.

Dans cette énumération, nous avons réuni chaque fois les deux cas corrélatifs, c'est-à-dire qui se ramènent l'un à l'autre par la considération du triangle polaire. Il n'y a donc que trois cas à traiter directement.

1° *On donne les trois côtés a, b, c.*

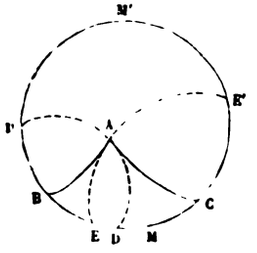
Supposons, pour fixer les idées, $a > b > c$.

Pour que le problème soit possible, il faut (803, 807) que l'on ait à la fois

$$a < b + c, \quad a + b + c < 4.$$

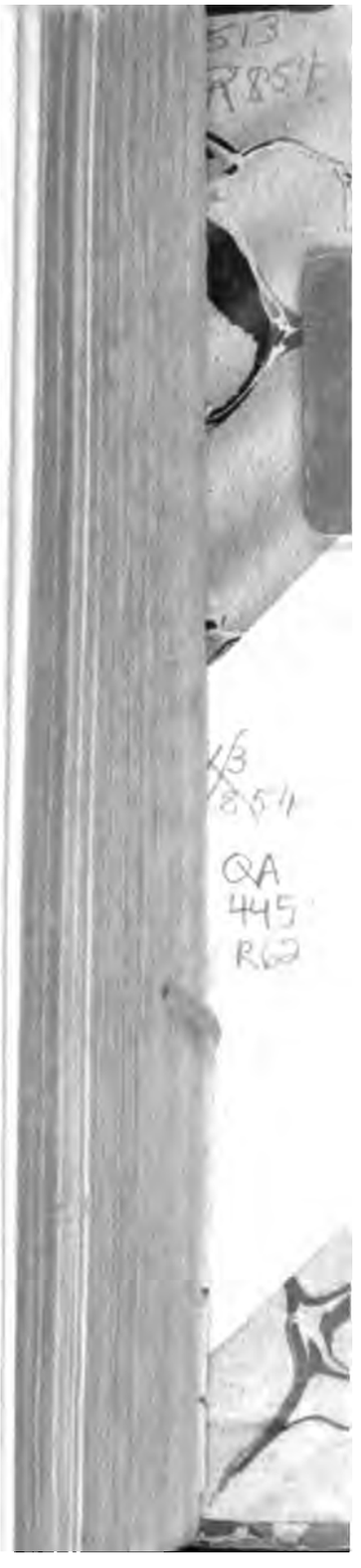
Ces conditions sont suffisantes. En effet, sur un grand cercle MM' de la sphère, prenons un arc BMC égal à a (*fig.* 454); du point B comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde de l'arc c, décrivons un

Fig. 454.



arc de cercle DD' et, du point C comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde de l'arc b, décrivons un second arc de cercle EE'. Puisque l'arc BC est plus grand que chacun des arcs BD et CE, les points D et E sont situés dans la portion BMC du grand cercle MM' et, comme BC est moindre que la somme BD + CE, les arcs BD et CE empiètent l'un sur l'autre : le point E tombe donc entre B et D. D'ailleurs, la somme BD' + BC + CE' étant moindre qu'une circonférence de grand cercle, le point E' est situé sur l'arc CM'D' entre C et D'. Il résulte de là que le point E et le point E' sont, le premier intérieur, le second extérieur à la calotte qui, déterminée par le cercle DD', a pour pôle B. L'arc EE', qui, par rapport à cette calotte, unit un point intérieur à un point extérieur, doit donc couper la base DD' de cette calotte en un certain point A, lequel est le troisième sommet du triangle demandé ABC.

Les cercles DD' et EE' se coupent en un second point A', sommet d'un second triangle A'BC, symétrique du premier.


513
R85t
QA
445
R62

Ainsi, *pour qu'on puisse construire un triangle sphérique avec trois côtés donnés, il faut et il suffit que le plus grand côté soit moindre que la somme des deux autres et que la somme des côtés soit inférieure à une circonférence de grand cercle.*

Dans les applications, il peut se faire que l'une de ces conditions soit remplie d'elle-même; il ne reste plus alors qu'à considérer l'autre. Par exemple, au n° 823, lorsqu'on cherche les conditions pour que deux petits cercles se coupent, on n'a pas à faire intervenir la relation

$$D + R + r < 4,$$

parce que, d'après la manière dont D, R et r sont définis, cette relation est satisfaite d'elle-même.

Souvent, on ignore l'ordre relatif de grandeur des côtés donnés. Dans ce cas, on exprime que le plus grand côté est inférieur à la somme des deux autres, en écrivant que chaque côté est moindre que la somme des deux autres.

Pour qu'on puisse construire un triangle sphérique avec trois angles donnés, il faut et il suffit que le plus petit angle augmenté de deux droits soit plus grand que la somme des deux autres et que la somme des trois angles soit supérieure à deux angles droits, car, en prenant les suppléments de ces angles comme côtés, on peut construire le triangle supplémentaire, d'où l'on déduit ensuite le triangle demandé par le tracé indiqué au n° 809.

2° *On donne deux côtés a et b et l'angle compris* C.

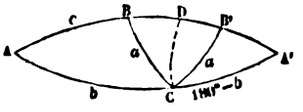
Même solution qu'en *Géométrie plane* (145).

3° *On donne deux côtés a et b et l'angle* A *opposé au côté a* (*fig.* 455).

Construisons sur la sphère deux grands cercles formant un angle égal à A (829). Prenons, à partir du sommet, sur l'un des côtés de cet angle, un arc AC égal à b, et du point C comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde de a, décrivons un arc de cercle; B étant l'intersection de ce cercle avec le second côté de l'angle, le triangle ABC sera le triangle demandé.

La discussion de ce problème exige quelque attention.

Fig. 455.



« Achevons le fuseau A, et du point C abaissons l'arc CD perpendicu-» laire sur l'autre côté de l'angle. Dans le triangle sphérique rectangle

» ACD, l'arc perpendiculaire CD sera aigu ou obtus suivant que l'angle » donné A sera lui-même aigu ou obtus (821, 2°). Si l'arc CD est aigu, » il sera le plus court de tous les arcs qu'on pourrait mener du point C » dans le fuseau aux divers points de l'arc ABA', et les arcs obliques aug- » menteront en s'éloignant du pied de l'arc perpendiculaire; si l'arc CD » est obtus, il sera au contraire le plus grand des arcs menés du point C, » et les arcs obliques augmenteront en se rapprochant du pied de la per- » pendiculaire (819, 820).

» Cela posé, *pour que le triangle proposé soit possible, il faudra d'abord* » *que le côté opposé a soit au moins égal à l'arc perpendiculaire, si* » *l'angle donné* A *est aigu; ou plus petit, si l'angle donné* A *est obtus.* » Cette première condition de possibilité est évidemment satisfaite lorsque » l'angle donné A et le côté opposé *a* aussi donné sont de nature différente.

» Je dis maintenant que :

» A *et a étant de nature différente, le problème, s'il est possible, n'a* » *qu'une solution;*

» A *et a étant de même nature, le problème, s'il est possible, a une ou* » *deux solutions.*

» En effet, soient A *aigu et a obtus*, par exemple. Si l'on peut tracer » dans le fuseau, par le point C, une oblique CB égale au côté *a*, elle ne » pourra se trouver évidemment que du côté de celle des obliques ex- » trêmes *b* ou $180° - b$ qui sera de même nature que *a*; ainsi le problème » ne peut avoir qu'une solution. *Cette solution existera* pour $a <$ celui » des arcs *b* ou $180° - b$ de même nature; *le triangle sera impossible* » pour *a* au moins égal à celui des arcs *b* ou $180° - b$ de même nature.

» Si l'on supposait A *obtus et a aigu*, on arriverait aux mêmes conclu- » sions; seulement il faudrait renverser les signes, parce que l'arc per- » pendiculaire CD serait obtus.

» Soient A *et a aigus*. L'arc perpendiculaire CD étant alors aussi aigu, » on voit qu'il pourra exister dans le fuseau une oblique CB' égale à *a* du » côté de celui des arcs *b* ou $180° - b$ qui sera aigu, et, *a fortiori*, qu'il en » existera alors une autre CB du côté de celui des deux arcs *b* ou $180° - b$ » qui sera obtus. Ainsi le problème pourra avoir deux solutions. *Ces* » *deux solutions existeront* pour $a <$ celui des arcs *b* ou $180° - b$ de » même nature; *une de ces deux solutions ne sera plus possible* pour *a* au » moins égal à celui des arcs *b* ou $180° - b$ de même nature. *Le triangle* » *sera impossible* pour $a <$ l'arc perpendiculaire CD.

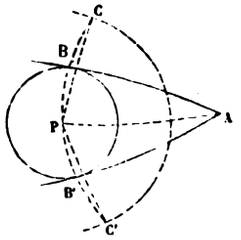
» Si l'on supposait A et *a obtus*, on arriverait aux mêmes conclusions; » seulement il faudrait renverser les signes, parce que l'arc perpendicu- » laire CD serait obtus ([1]). »

([1]) LENTHÉRIC, *Nouvelles Annales*, t. II, 1re série.

PROBLÈME.

832. *Par un point donné, mener un arc de grand cercle tangent à un petit cercle donné* (*fig.* 456).

Fig. 456.



Si le point donné est sur le cercle, il suffit d'élever par ce point un arc de grand cercle perpendiculaire au rayon sphérique correspondant (832).

Supposons, en second lieu, que le point donné A soit extérieur au petit cercle donné, c'est-à-dire soit situé dans la plus grande des deux calottes sphériques séparées par ce petit cercle. Considérons le problème comme résolu; nommons P le pôle du petit cercle donné, B le point de contact de l'arc BA, et prolongeons le rayon sphérique PB d'une quantité BC = PB. Le point C se trouve d'abord sur un cercle décrit du point P comme pôle avec une ouverture de compas égale à la corde d'un arc de grand cercle double du rayon sphérique r du petit cercle. Il se trouve en outre sur un second cercle décrit du point A comme pôle avec une ouverture de compas égale à la corde de l'arc PA = D; car, BA étant perpendiculaire sur le milieu de PBC, le point A est équidistant de P et de C.

Le point C une fois obtenu à l'aide de ces deux cercles auxiliaires, on mènera l'arc de grand cercle PC qui coupera le petit cercle en B, et, en joignant B et A par un arc de grand cercle, on aura l'arc tangent demandé.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le triangle APC, dont on a les trois côtés, existe, c'est-à-dire qu'on ait (831)

$$D < D + 2r, \quad 2r < D + D, \quad D + D + 2r < 4.$$

La première condition est toujours remplie, et les deux autres équivalent à

$$r < D < 2 - r;$$

elles expriment que le point A doit être situé hors de la calotte sphérique PB, et hors de la calotte symétrique.

Les cercles auxiliaires se coupent en deux points C et C′; de là deux solutions AB et AB′.

La construction précédente s'applique au problème correspondant de Géométrie plane; mais elle exige plus de place que celle du n° 157.

Observons enfin que, lorsque deux cercles de la sphère ont deux points communs, les symétriques de ces points par rapport au centre de la sphère appartiennent évidemment à la fois aux deux cercles symétriques des premiers. Si les deux points considérés se confondent, c'est-à-dire si les deux cercles proposés se touchent, les deux cercles symétriques se touchent au point symétrique du premier point de contact. Enfin, si l'un des cercles est un grand cercle, comme il est à lui-même son symétrique, on voit que *tout grand cercle tangent à un petit cercle est aussi tangent au petit cercle symétrique du premier par rapport au centre de la sphère*. Ainsi, dans le problème qui nous occupe, les grands cercles trouvés AB et AB′ touchent non-seulement le cercle donné PB, mais encore son symétrique.

PROBLÈME.

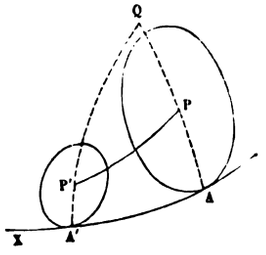
833. *Décrire un grand cercle tangent à deux petits cercles donnés.*

Soient P et P′ les pôles (781) des deux petits cercles, R et R′ leurs rayons sphériques, D la distance sphérique (816) des deux pôles P et P′. Nous supposerons, pour fixer les idées, $R > R'$.

Le grand cercle cherché X peut laisser les deux cercles R et R′ dans un même hémisphère ou dans des hémisphères opposés.

Dans le premier cas (*fig.* 457), nous prendrons pour inconnue le pôle Q

Fig. 457.



du grand cercle X, qui est dans le même hémisphère que les cercles R et R′. Si A et A′ sont les points où le cercle X touche respectivement les cercles R et R′, le pôle Q est à la fois sur les grands cercles PA et PA′; il est donc le troisième sommet d'un triangle sphérique QPP′, dont on connaît deux sommets P et P′ et les trois côtés

$$PP' = D, \quad PQ = QA - AP = 1 - R, \quad P'Q = QA' - A'P' = 1 - R'.$$

Les conditions de possibilité sont (831)

$$\begin{aligned} D &< 1 - R + 1 - R' \quad \text{ou} \quad 2 - D > R + R', \\ 1 - R' &< D + 1 - R \quad \text{ou} \quad D > R - R', \\ 1 - R &< D + 1 - R' \quad \text{ou} \quad D > R' - R, \\ D + 1 - R + 1 - R' &< 4 \quad \text{ou} \quad D < 2 + R + R'. \end{aligned}$$

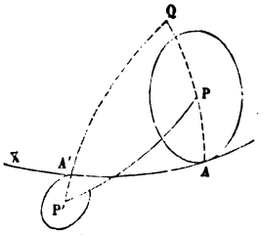
Supprimant les deux dernières relations qui sont satisfaites d'elles-mêmes, puisque l'on a $D < 2$ et $R' < R$, il ne reste plus que les conditions

$$D > R - R' \quad \text{et} \quad 2 - D > R + R'.$$

Les principes du n° 823, applicables ici puisque D est moindre que 2 et que $1 - R$ et $1 - R'$ sont moindres que 1, les auraient fournies immédiatement; ils permettent d'ailleurs d'interpréter géométriquement ces deux conditions. La première exprime que la calotte R' n'est pas contenue dans la calotte R. Quant à la seconde, comme $2 - D$ est la distance sphérique de P au symétrique de P', elle signifie que la calotte R et la calotte symétrique de la calotte R' sont extérieures l'une à l'autre.

Dans le second cas (*fig.* 458), on voit, d'une manière analogue, que

Fig. 458.



le pôle Q du grand cercle X qui se trouve dans le même hémisphère que le cercle R est le troisième sommet d'un triangle sphérique QPP', dont on a les deux sommets P et P' et les longueurs D, $1 - R$, $1 + R'$, des trois côtés. Les conditions de possibilité sont

$$D > R + R' \quad \text{et} \quad 2 - D > R - R'.$$

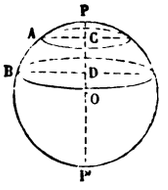
Elles expriment que les calottes R et R' sont extérieures l'une à l'autre et que la calotte R ne contient pas la calotte symétrique de la calotte R'.

§ V. — AIRE DE LA SPHÈRE.

DÉFINITIONS.

834. On appelle *zone* la portion de la surface sphérique comprise entre deux cercles dont les plans sont parallèles. Ces cercles sont les *bases* de la zone et la distance de leurs plans est sa *hauteur*. Ainsi, tandis que la demi-circonférence PABP′ engendre une sphère en tournant autour du diamètre PP′ (*fig.* 459), l'arc AB décrit une zone dont les bases sont les

Fig. 459.



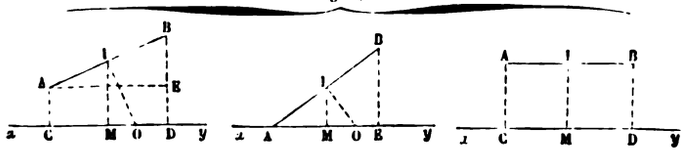
cercles AC et BD décrits par les points A et B, et dont la hauteur est la projection CD de l'arc AB sur l'axe PP′.

Si l'un des plans est tangent à la sphère, l'un des cercles considérés se réduit à un point, et la zone, qui n'a plus alors qu'une base, devient une *calotte sphérique*. Ainsi l'arc PA, en tournant autour de PP′, engendre une calotte sphérique dont le cercle AC est la base et dont PC est la hauteur.

THÉORÈME.

835. *Lorsqu'une droite* AB *tourne autour d'un axe xy situé dans son plan, l'aire qu'elle engendre a pour mesure le produit de la projection* CD *de cette droite sur l'axe par la circonférence dont le rayon est la perpendiculaire* IO, *élevée au milieu* I *de la droite* AB *jusqu'à la rencontre de l'axe xy* (*fig.* 460).

Fig. 460.



Nous supposerons que la droite AB est située tout entière

d'un même côté de l'axe xy. Quelles que soient alors les positions relatives de AB et de xy, l'aire engendré par AB a pour mesure (761)

$$2\pi.\mathrm{IM}.\mathrm{AB}, \tag{1}$$

IM étant la perpendiculaire abaissée du point I sur xy.

Si la droite AB est parallèle à xy, le théorème proposé est tout démontré; sinon, il faut transformer l'expression (1). A cet effet, menons AE parallèle à xy jusqu'à la rencontre de la projetante BD; les triangles AEB, IMO sont semblables comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires, et l'on a

$$\frac{\mathrm{IM}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{AB}}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{IM}.\mathrm{AB} = \mathrm{IO}.\mathrm{AE}.$$

L'expression (1) peut donc être remplacée par

$$2\pi.\mathrm{IO}.\mathrm{AE} \quad \text{ou} \quad 2\pi.\mathrm{IO}.\mathrm{CD},$$

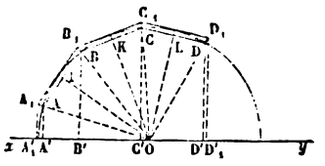
ce qui démontre la proposition énoncée.

Dans le cas où le point A est situé sur l'axe xy, le raisonnement subsiste; seulement la droite AE se confond avec l'axe.

THÉORÈME.

836. *L'aire engendrée par une ligne brisée régulière* ABCD, *tournant autour d'un diamètre xy qui ne la traverse pas, a pour mesure le produit de la circonférence inscrite dans la ligne brisée par la projection* A'D' *de cette ligne sur l'axe xy* (*fig.* 461).

Fig. 461.



Soient O le centre et OI = OK = OL l'apothème de la ligne brisée régulière ABCD; si l'on désigne par aire AB l'aire en-

gendrée par la rotation de AB autour de xy, on a, d'après le théorème précédent,

$$\text{aire AB} = \text{A'B'}.\text{circ.OI},$$

et de même

$$\text{aire AC} = \text{B'C'}.\text{circ.OI},$$
$$\text{aire CD} = \text{C'D'}.\text{circ.OI},$$

d'où, en ajoutant,

$$\text{aire ABCD} = (\text{A'B'} + \text{B'C'} + \text{C'D'}).\text{circ.OI} = \text{circ.OI}.\text{A'D'}.$$

COROLLAIRES.

837. Considérons un arc de cercle AD et une ligne brisée régulière inscrite ABCD; tandis que l'arc AD tourne autour du diamètre xOy, la ligne brisée engendre une aire qui tend vers une limite indépendante de la loi suivant laquelle ses côtés tendent vers zéro. En effet, dans le produit A'D'.circ.OI qui mesure cette aire, le premier facteur A'D' est invariable et le second circ.OI a toujours pour limite circ.OA. C'est cette limite de l'aire engendrée par la ligne brisée régulière inscrite qu'on appelle *aire de la zone* décrite par l'arc AD.

On voit sans peine que la ligne brisée $A_1B_1C_1D_1$ circonscrite au même arc et semblable à la ligne inscrite ABCD engendre une aire qui tend vers la même limite. En effet, on a

$$\frac{\text{aire A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1}{\text{aire ABCD}} = \frac{\text{A}'_1\text{D}'_1.\text{circ.OA}}{\text{A'D'}.\text{circ.OI}}.$$

Or le rapport $\frac{\text{circ.OA}}{\text{circ.OI}} = \frac{\text{OA}}{\text{OI}}$ tend vers l'unité lorsque le nombre des côtés de la ligne brisée ABCD croît indéfiniment, et il en est de même du rapport $\frac{\text{A}'_1\text{D}'_1}{\text{A'D'}}$ qui, en vertu de la similitude des polygones A'ABCDD', $\text{A}'_1\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1\text{D}'_1$, est aussi égal à $\frac{\text{OA}}{\text{OI}}$.

THÉORÈME.

838. *L'aire d'une zone sphérique a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle.*

Par définition, l'aire de la zone est la limite vers laquelle tend l'aire engendrée par une ligne brisée régulière inscrite dans l'arc générateur de la zone, lorsque le nombre des côtés de cette ligne brisée croît indéfiniment. D'après cela, soient S

QA
445
R62

l'aire de la zone, H sa hauteur, et R le rayon de l'arc générateur, c'est-à-dire le rayon de la sphère à laquelle la zone appartient; soient de même s l'aire engendrée par une ligne brisée régulière inscrite dans l'arc générateur, et a l'apothème de cette ligne brisée. On a (836), puisque la projection de la ligne brisée sur l'axe est aussi égale à H,

$$s = \mathrm{H}.\,2\pi a.$$

Mais, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée, H reste invariable, s tend vers S, et a vers R. On a donc, à la limite,

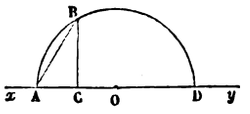
$$\mathrm{S} = \mathrm{H}.\,2\pi\mathrm{R}.$$

COROLLAIRES.

839. Dans des sphères égales, deux zones sont entre elles comme leurs hauteurs et, par suite, deux zones de même hauteur sont équivalentes.

840. Considérons la calotte sphérique engendrée par l'arc AB tournant autour du diamètre AD (*fig.* 462). En vertu du théo-

Fig. 462.



rème précédent, l'aire de cette calotte a pour mesure

$$2\pi.\mathrm{AO}.\mathrm{AC} = \pi.\mathrm{AD}.\mathrm{AC} \quad \text{ou (223)} \quad \pi.\overline{\mathrm{AB}}^2.$$

Donc, *une calotte sphérique quelconque équivaut au cercle dont le rayon est égal à la corde de l'arc générateur de la calotte.*

THÉORÈME.

841. *L'aire de la sphère a pour mesure le produit de son diamètre par la circonférence d'un grand cercle.*

Car cette aire peut être considérée comme celle d'une zone dont la hauteur est égale au diamètre de la sphère. D'ailleurs, le raisonnement fait pour la zone s'applique textuellement à ce cas particulier.

COROLLAIRES.

842. S étant l'aire d'une sphère de rayon R ou de diamètre D, on a

$$S = 2R \cdot 2\pi R = 4\pi R^2 = \pi D^2.$$

L'aire de la sphère est donc *égale à quatre grands cercles.* On peut dire encore qu'elle équivaut à l'aire d'un cercle dont le rayon serait égal au diamètre de la sphère.

Les aires des deux sphères sont entre elles comme les carrés des rayons ou des diamètres.

843. Voici deux applications numériques :

1° *Trouver, à moins d'un myriamètre carré, la surface du globe terrestre.*

On sait, par la définition du mètre, que la circonférence d'un grand cercle du globe renferme 40 millions de mètres ou 4000 myriamètres; son diamètre est donc égal à $\frac{4000}{\pi}$ et, par suite (842), l'aire du globe est

$$\pi\left(\frac{4000}{\pi}\right)^2 = \frac{16\,000\,000}{\pi} = 5\,092\,958^{\text{Mmq}},$$

à 1 myriamètre carré près.

2° *L'aire d'une sphère est* 1 *mètre carré : quel est son rayon?* La formule

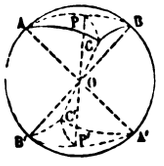
$$4\pi R^2 = 1 \quad \text{donne} \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0^{\text{m}},282,$$

à 1 millimètre près.

THÉORÈME.

844. *Deux triangles sphériques symétriques* ABC, A'B'C' *sont équivalents* (*fig.* 463).

Fig. 463.

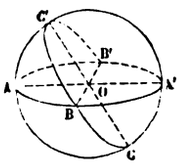


Prenons le pôle P du petit cercle qui passerait par les points

A, B, C, et menons les arcs de grand cercle PA, PB, PC, qui sont égaux entre eux (780). Traçons le diamètre POP′ et les arcs de grand cercle P′A′, P′B′, P′C′. L'égalité des angles POA, P′OA′ entraîne celle des arcs PA et P′A′; on voit de même que PB = P′B′, et PC = P′C′ ; par suite, comme PA = PB = PC, il faut qu'on ait P′A′ = P′B′ = P′C′. D'après cela, les triangles PAB, P′A′B′ sont symétriques et isocèles; ils sont donc superposables. De même, les triangles PAC, P′A′C′ sont égaux entre eux, ainsi que les triangles PBC, P′B′C′. Donc, enfin, le triangle ABC, somme de PAB, PAC et PBC, est équivalent au triangle A′B′C′, somme de P′A′B′, P′A′C′ et P′B′C′.

Si le pôle P tombait à l'extérieur du triangle ABC, ce triangle ne serait plus une somme, mais une différence.

Fig. 464.



COROLLAIRE.

845. *Si deux arcs de grand cercle* AC′A′, BC′B′ *se coupent dans un même hémisphère* C′ABA′B′, *la somme des triangles opposés* AC′B, A′C′B′ *est égale au fuseau dont l'angle est* AC′B (*fig.* 464).

On nomme *fuseau* la portion de surface sphérique comprise entre deux demi-grands cercles CAC′, CBC′, qui se terminent à un diamètre commun COC′; l'angle ACB ou AC′B de ces deux arcs est dit l'*angle du fuseau*.

Cela étant, le fuseau compris entre CAC′ et CBC′ se compose du triangle ABC′ et du triangle ABC; et, comme le triangle A′B′C′ est évidemment le symétrique de ABC et que deux triangles symétriques sont équivalents, on voit que le fuseau dont l'angle est C′ est égal à la somme des triangles opposés AC′B, A′C′B′.

THÉORÈME.

846. *Si l'on prend pour unité d'angle l'angle droit et pour unité d'aire l'aire du triangle trirectangle, un fuseau a pour mesure le double du nombre qui mesure son angle.*

On voit immédiatement que, *sur la même sphère ou sur des sphères égales :* 1° *deux fuseaux de même angle sont superposables;* 2° *un fuseau est égal à la somme de deux autres, si son angle est égal à la somme des angles de ces deux autres.*

Il résulte de là (1re Partie, Note I) que *deux fuseaux quelconques d'une même sphère sont entre eux comme leurs angles.*

Cela étant, soient A et A′ les nombres qui mesurent les angles de deux fuseaux d'une même sphère, l'angle droit étant pris pour unité; et soient F et F′ les nombres qui mesurent ces fuseaux, le triangle trirectangle (813) étant pris pour unité d'aire; on aura

$$\frac{F}{F'} = \frac{A}{A'}.$$

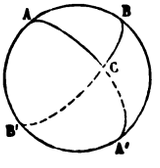
Prenons $A' = 1$; le fuseau correspondant, ayant son angle droit, sera égal au quart de la sphère, c'est-à-dire au double du triangle trirectangle : on aura donc $F' = 2$ et, par suite,

$$\frac{F}{2} = \frac{A}{1}, \quad \text{d'où} \quad F = 2A.$$

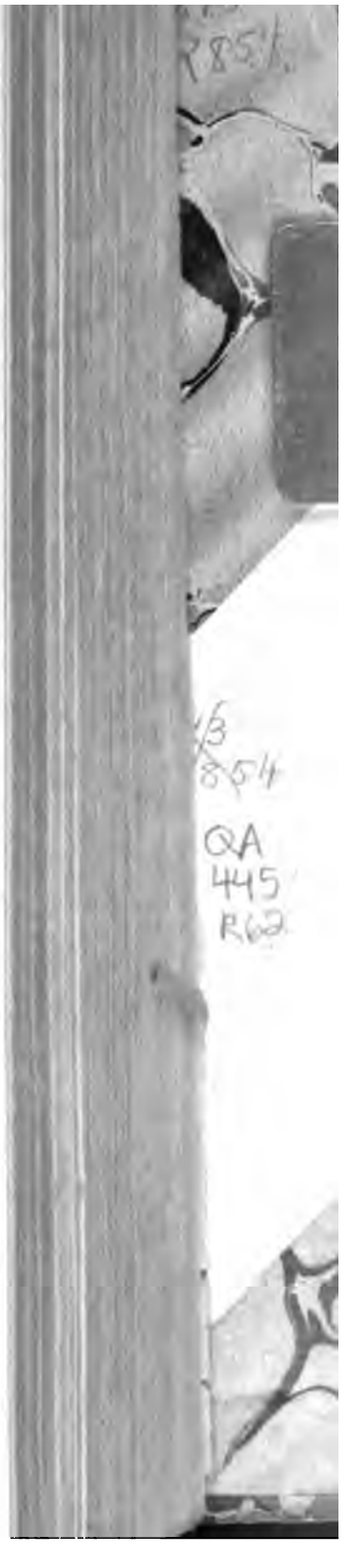
THÉORÈME.

847. *Si l'on prend l'angle droit pour unité d'angle et le triangle trirectangle pour unité d'aire, l'aire d'un triangle sphérique a pour mesure la somme des nombres qui mesurent ses angles, diminuée de 2.*

Fig. 465.



Soit (*fig.* 465) ABC le triangle proposé; achevons le grand


QA
445
R62

cercle AB, et prolongeons les côtés AC, BC, jusqu'aux points A′ et B′ où ils rencontrent ce grand cercle. On aura évidemment

$$ABC + BCA' = \text{fus. A},$$
$$ABC + ACB' = \text{fus. B},$$

et (845)

$$ABC + B'CA' = \text{fus. C}.$$

La somme des premiers membres de ces trois égalités se compose de la demi-sphère et de deux fois l'aire du triangle ABC. Comme, dans le système d'unités adopté, la demi-sphère est mesurée par le nombre 4, si l'on désigne par S, A, B, C les nombres qui mesurent l'aire et les angles du triangle, on aura (846)

$$4 + 2S = 2A + 2B + 2C,$$

d'où

$$S = A + B + C - 2. \qquad (1)$$

Scolies.

848. Soient R le rayon de la sphère évalué en mètres, σ l'aire du triangle en mètres carrés, et α, β, γ les angles de ce triangle évalués en degrés; on aura, en observant que le triangle trirectangle est égal au huitième $\frac{1}{2}\pi R^2$ de la sphère,

$$A = \frac{\alpha}{90^o}, \quad B = \frac{\beta}{90^o}, \quad C = \frac{\gamma}{90^o}, \quad S = \frac{\sigma}{\frac{1}{2}\pi R^2},$$

et, par suite, en vertu de la relation (1),

$$\sigma = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180}{180}\pi R^2. \qquad (2)$$

Voici deux exemples :

1° *Quelle est, sur la sphère dont l'aire est égale à* 1 *mètre carré, l'aire du triangle dont les angles sont de* 61 *degrés,* 109 *degrés,* 127 *degrés?*

Le rapport de ce triangle au triangle trirectangle est, d'après la formule (1),

$$\frac{61 + 109 + 127 - 180}{90} = \frac{117}{90} = 1,3;$$

et, comme le triangle trirectangle est ici le huitième du mètre carré, l'aire du triangle donné est

$$\frac{1}{8} \times 1,3 = 0^{mq},1625.$$

2° *Quelle est, sur la sphère dont le rayon est* $2^{m},4$, *l'aire du triangle sphérique dont les angles sont de* $51°37'$, $73°11'$, $87°43'$?

La formule (2) donne, en réduisant en minutes,

$$\sigma = \frac{(51 + 73 + 87 - 180)\,60 + 37 + 11 + 43}{180.60}\,\pi(2,4)^2$$
$$= 1,040533 \times \pi = 3^{mq},2689,$$

à 1 centimètre carré près.

849. En analyse, on évalue généralement les angles en parties du rayon (297. 3°); alors l'angle droit répond à $\frac{\pi}{2}$, et, si l'on désigne par A', B', C' les angles du triangle évalués en parties du rayon, on a

$$A = \frac{A'}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2A'}{\pi}, \quad B = \frac{2B'}{\pi}, \quad C = \frac{2C'}{\pi},$$

et, par suite,

$$A + B + C - 2 = \frac{2}{\pi}(A' + B' + C' - \pi).$$

D'ailleurs, le rayon de la sphère étant 1, l'aire du triangle trirectangle est alors mesurée par $\frac{\pi}{2}$, de sorte qu'on a

$$S = \frac{S'}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2S'}{\pi},$$

S' étant le nombre qui mesure l'aire du triangle dans ce nouveau système d'unités. On a donc enfin (847), à cause de la formule (1),

$$S' = A' + B' + C' - \pi.$$

On donne à ce nombre abstrait $A' + B' + C' - \pi$ le nom d'*excès sphérique* du triangle.

QA
445
R62

THÉORÈME.

850. *Si l'on prend l'angle droit pour unité d'angle et le triangle trirectangle pour unité d'aire, l'aire d'un polygone sphérique de n côtés a pour mesure la somme des nombres qui mesurent ses angles, diminuée de* $2(n-2)$.

On arrive à ce résultat en décomposant le polygone en triangles à l'aide d'arcs de grand cercle diagonaux issus d'un même sommet, et en appliquant la formule (1) du n° 847 aux $(n-2)$ triangles ainsi obtenus.

Scolie.

851. Soient, dans le système d'unités adopté, S, A_1, A_2, ..., A_n les mesures de l'aire et des angles d'un polygone sphérique convexe de n côtés; on aura

$$S = (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) - 2(n-2).$$

Désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les nombres qui mesurent les côtés du polygone polaire (811), en prenant pour unité de longueur le quart de la circonférence d'un grand cercle; on aura

$$A_1 = 2 - a_1, \quad A_2 = 2 - a_2, \quad \ldots, \quad A_n = 2 - a_n,$$

et, par suite,

$$S = [2n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)] - 2(n-2) = 4 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n),$$

ou enfin, en désignant par p le périmètre du polygone polaire,

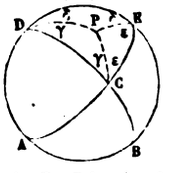
$$S = 4 - p.$$

Ainsi, l'*aire d'un polygone sphérique convexe est égale à* 4 *moins le périmètre du polygone polaire;* cette relation mérite d'être remarquée.

THÉORÈME.

852. *Le lieu géométrique des sommets* C *des triangles sphériques, de même base* AB *et de même aire* S, *se compose de deux arcs de petits cercles symétriques par rapport au plan du grand cercle* AB *et passant par les points* E *et* D *diamétralement opposés aux extrémités de la base* AB (*fig.* 466).

Fig. 466.



En effet, en désignant par A, B, C les angles d'un triangle quelconque

ABC satisfaisant à la question et par D, E, C les angles du triangle correspondant DCE, on a $A = 2 - E$, $B = 2 - D$, et par suite

$$S = (2 - E) + (2 - D) + C - 2,$$

d'où

$$D + E - C = 2 - S;$$

on tombe ainsi sur le lieu étudié au n° 824, dans le cas où la différence $(D + E) - C$ est donnée en grandeur et en signe; ce qui démontre l'énoncé.

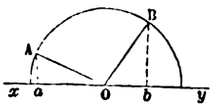
Ce théorème est dû à Lexell (*Acta Petrop.*, 1781).

§ VI. — VOLUME DE LA SPHÈRE.

DÉFINITIONS.

853. Pendant que la demi-circonférence xABy engendre la surface sphérique en tournant autour du diamètre xy, l'arc AB engendre une zone, et les rayons OA et OB engendrent

Fig. 467.



les surfaces latérales de deux cônes de révolution. La portion du volume de la sphère comprise entre les surfaces latérales de ces deux cônes et la zone AB est le *secteur sphérique* correspondant au secteur circulaire AOB. Un secteur sphérique est donc le volume engendré par la rotation d'un secteur circulaire autour d'un axe passant par son sommet, situé dans son plan et extérieur à sa surface; la zone engendrée par l'arc du secteur circulaire est la *base* du secteur sphérique.

854. On appelle *segment sphérique* la portion du volume de la sphère comprise entre deux plans sécants parallèles. Les cercles déterminés par ces plans parallèles sont les *bases* du segment sphérique, et leur distance en est la *hauteur*.

Lorsqu'un des plans parallèles devient tangent à la sphère, le cercle correspondant se réduit à son pôle, et l'on a un segment sphérique à *une base*.

Si l'on ajoute (*fig.* 467) au secteur sphérique AOB les deux

cônes AOa, BOb, on obtient le segment sphérique compris entre les deux plans parallèles déterminés par la rotation des perpendiculaires Aa, Bb, autour de xy. Ce segment sphérique correspond donc à la rotation du trapèze mixtiligne aABb autour du même axe.

THÉOREME.

855. *Lorsqu'un triangle tourne autour d'un axe situé dans son plan et passant par l'un de ses sommets sans traverser sa surface, il engendre un volume qui a pour mesure le produit de l'aire que décrit le côté opposé au sommet fixe, par le tiers de la hauteur relative à ce côté.*

Soit le triangle ABC ayant son sommet A sur l'axe xy et AE pour hauteur relative à ce sommet : nous distinguerons trois cas.

Fig. 468.

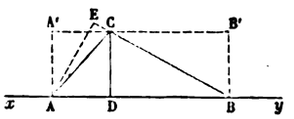
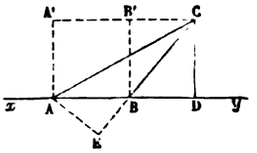


Fig. 469.



1° Supposons l'un des côtés AB du triangle ABC confondu avec l'axe xy. Suivant que la hauteur CD qui correspond au côté AB tombe à l'intérieur (*fig.* 468) ou à l'extérieur (*fig.* 469) du triangle ABC, le volume engendré par ce triangle est la somme ou la différence des cônes engendrés par les triangles rectangles ACD, BCD.

En même temps, le cylindre engendré par la rotation du rectangle AB B'A', qui a même base et même hauteur que le triangle donné ABC, est la somme (*fig.* 468) ou la différence (*fig.* 469) des cylindres engendrés par la rotation des rectangles ADCA', BDCB', dont le rectangle ABB'A' est lui-même la somme ou la différence. D'ailleurs, le cône ACD est le tiers du cylindre ADCA', et le cône BCD, le tiers du cylindre BDCB' (764). Donc, dans l'un et l'autre cas, le volume engendré par le triangle ABC est le tiers du cylindre AB B'A', et l'on a

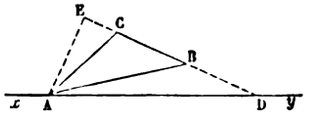
$$\text{vol.ABC} = \frac{1}{3}\pi\overline{\text{CD}}^2 \cdot \text{AB} \quad \text{ou} \quad \text{vol.ABC} = \frac{1}{3}\pi\text{CD}.\text{BC}.\text{AB},$$

puisque les produits CD . AB et BC . AE représentent tous deux le double de l'aire du triangle donné. Or, π . CD . BC exprime (756) l'aire latérale du cône BCD ou l'aire de la surface engendrée par le côté BC dans la rotation du triangle ABC. Par suite,

$$\text{vol. ABC} = \text{aire BC} \cdot \frac{\text{AE}}{3}.$$

2° Supposons (*fig.* 470) que, le côté AB du triangle n'ayant plus que le sommet A sur l'axe xy, le côté BC prolongé vienne rencontrer l'axe au point D.

Fig. 470.



Le triangle ABC étant la différence des triangles ACD, ABD, le volume qu'il engendre est la différence des volumes engendrés par ces triangles. On a donc (1°)

$$\text{vol. ABC} = (\text{aire DC} - \text{aire DB})\frac{\text{AE}}{3} = \text{aire BC} \cdot \frac{\text{AE}}{3}.$$

3° Supposons enfin que le côté AB du triangle n'ayant plus que le sommet A sur l'axe xy, le côté BC soit parallèle à cet axe.

Le volume engendré par le triangle ABC est la somme (*fig.* 471) ou la différence (*fig.* 472) des volumes engendrés par les triangles ABE, ACE. Or, le volume engendré par le

Fig. 471.

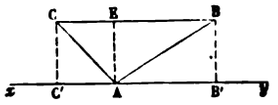
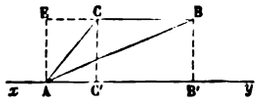


Fig. 472.



triangle ABE est les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle A B' BE, et le volume engendré par le triangle ACE, les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle AC'CE (764).

QA
445
R62

Donc, dans l'un et l'autre cas, le volume engendré par le triangle ABC est les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle B'C'CB, somme (*fig.* 471) ou différence (*fig.* 472) des rectangles AB'BE, AC'CE; et l'on a encore

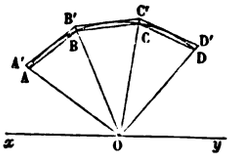
$$\text{vol. ABC} = \frac{2}{3}\pi\overline{\text{AE}}^2 \cdot \text{BC} = \text{aire BC} \cdot \frac{\text{AE}}{3}.$$

2π. AE.BC exprime en effet l'aire latérale du cylindre engendré par le rectangle B'C'CB ou l'aire de la surface décrite par le côté BC du triangle ABC.

THÉORÈME.

856. ***Le volume engendré par un secteur polygonal régulier tournant autour d'un diamètre extérieur à sa surface a pour mesure le produit de l'aire que décrit la ligne brisée qui lui sert de base, par le tiers de l'apothème de cette ligne brisée.***

Fig. 473.



Soit (*fig.* 473) le secteur polygonal régulier (443) OABCD, tournant autour du diamètre xy. Décomposons ce secteur en triangles, en joignant au centre O les sommets de sa base ABCD, et appelons a l'apothème de cette base. Le volume engendré par le secteur sera la somme des volumes engendrés par les triangles qui le constituent. Or (855)

$$\text{vol. AOB} = \text{aire AB} \cdot \frac{a}{3},$$

$$\text{vol. BOC} = \text{aire BC} \cdot \frac{a}{3},$$

$$\text{vol. COD} = \text{aire CD} \cdot \frac{a}{3}.$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, il vient

$$\text{vol. OABCD} = (\text{aire AB} + \text{aire BC} + \text{aire CD}) \cdot \frac{a}{3}$$

ou

$$\text{vol. OABCD} = \text{aire ABCD} . \frac{a}{3} .$$

SCOLIE.

857. Soient (*fig.* 473) AOD un secteur circulaire et OABCD, OA'B'C'D', deux secteurs polygonaux réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit au secteur circulaire. Si l'on désigne par a et a' les apothèmes des deux secteurs polygonaux, le rapport des volumes engendrés par la rotation de ces secteurs autour de l'axe xy est

$$\frac{a}{a'} \cdot \frac{\text{aire ABCD}}{\text{aire A'B'C'D'}} .$$

Mais, lorsqu'on fait tendre vers zéro les côtés de la ligne brisée régulière ABCD, suivant une loi d'ailleurs quelconque, les deux facteurs du produit qu'on vient d'écrire tendent l'un et l'autre vers l'unité (291, 837). Donc le rapport des volumes engendrés par les deux secteurs polygonaux a l'unité pour limite et, par suite, il en est de même, *a fortiori*, du rapport du volume du secteur sphérique engendré par le secteur circulaire AOD au volume décrit par chacun des secteurs polygonaux qui le comprennent. Donc enfin :

Le volume d'un secteur sphérique est la limite commune des volumes engendrés par des secteurs polygonaux réguliers semblables, inscrit et circonscrit au secteur circulaire correspondant, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de leurs bases.

THÉORÈME.

858. *Le volume d'un secteur sphérique a pour mesure le produit de l'aire de la zone qui lui sert de base par le tiers du rayon de la sphère.*

Le volume d'un secteur sphérique est la limite des volumes engendrés par les secteurs polygonaux réguliers inscrits dans le secteur circulaire correspondant, quand on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de leurs bases. D'après cela, soient v le volume engendré par un secteur polygonal régulier inscrit, s l'aire de la surface décrite par sa base, a son apothème; soient de même V le volume du secteur sphérique, S l'aire

QA
445
R62

de la zone qui lui sert de base, R le rayon de la sphère. On a (856)

$$v = s \cdot \frac{a}{3}.$$

Mais, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base du secteur polygonal, v tend vers V, s vers S et a vers R. On a donc, à la limite,

$$V = S \cdot \frac{R}{3}.$$

COROLLAIRES.

859. Dans des sphères égales, deux secteurs sphériques sont entre eux comme les zones qui leur servent de bases, et, par suite, deux secteurs sphériques dont les bases ont même hauteur sont équivalents.

THÉORÈME.

860. *Le volume de la sphère a pour mesure le produit de son aire par le tiers du rayon.*

Car ce volume peut être considéré comme celui d'un secteur sphérique ayant pour secteur circulaire correspondant un demi-cercle ou pour base l'aire de la surface sphérique elle-même. D'ailleurs, le raisonnement fait pour le secteur sphérique s'applique textuellement à ce cas particulier.

COROLLAIRES.

861. V étant le volume d'une sphère de rayon R ou de diamètre D, on a

$$V = 4\pi R^2 \frac{R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

862. *Les volumes de deux sphères sont entre eux comme les cubes des rayons ou des diamètres.*

863. Voici deux applications numériques :

1° *Trouver le volume du globe terrestre.*

L'aire du globe est (843), à moins d'un myriamètre carré,

5092958 myriamètres carrés. Son rayon est d'ailleurs $\frac{20000000^m}{\pi}$ ou 6366 kilomètres, à 1 kilomètre près. Le volume du globe terrestre, égal au produit de son aire par le tiers du rayon, sera donc 1081000000 myriamètres cubes, à un million de myriamètres cubes près.

Si l'on prend le rayon du globe terrestre pour unité, le rayon du Soleil est représenté par 108,5. L'aire et le volume du Soleil sont donc environ 11800 fois et 1280000 fois l'aire et le volume de la Terre (842, 862).

2° *Trouver le rayon de la sphère dont le volume est un mètre cube.*

La formule

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 1 \quad \text{donne} \quad R = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = 0^m,620,$$

à moins d'un millimètre.

SCOLIE.

864. *Les volumes de deux polyèdres circonscrits à la même sphère ou à des sphères égales sont entre eux comme les aires de ces mêmes polyèdres.*

Si l'on décompose, en effet, les polyèdres donnés en pyramides, en prenant pour centre de décomposition le centre de la sphère inscrite, la mesure du volume de chacun d'eux s'obtient en multipliant l'aire de sa surface par le tiers du rayon de la sphère (646).

THÉORÈME.

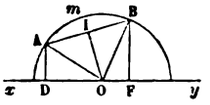
865. *Le volume engendré par un segment circulaire tournant autour d'un diamètre extérieur à sa surface équivaut au sixième du cylindre qui a pour rayon la corde du segment et pour hauteur la projection de cette corde sur l'axe.*

Le segment A*m*B (*fig.* 474) est la différence du secteur circulaire AOB et du triangle isocèle AOB; la portion du volume de la sphère engendrée par la rotation de ce segment sera donc

QA
445
R62

égale à la différence des volumes du secteur sphérique AOB et du triangle tournant AOB.

Fig. 474.



DF étant la projection de AB sur xy et OI la hauteur du triangle AOB, on aura (858, 838, 855, 835)

$$\text{sect. sph. AOB} = \text{zone AB}.\frac{\text{OA}}{3} = \frac{2}{3}\pi\overline{\text{OA}}^2.\text{DF},$$

$$\text{vol. AOB} = \text{aire AB}\frac{\text{OI}}{3} = \frac{2}{3}\pi\overline{\text{OI}}^2.\text{DF}.$$

Par suite,

$$\text{vol. A}m\text{B} = \frac{2}{3}\pi\left(\overline{\text{AO}}^2 - \overline{\text{OI}}^2\right)\text{DF}.$$

Le triangle rectangle OIA donnant

$$\overline{\text{OA}}^2 - \overline{\text{OI}}^2 = \overline{\text{AI}}^2 = \frac{\overline{\text{AB}}^2}{4},$$

il vient, en réduisant,

$$\text{vol. A}m\text{B} = \frac{1}{6}\pi\overline{\text{AB}}^2.\text{DF},$$

ce qui vérifie l'énoncé.

THÉORÈME.

866. *Le volume d'un segment sphérique équivaut au volume d'une sphère ayant pour diamètre la hauteur du segment, augmenté de la demi-somme des volumes de deux cylindres ayant pour hauteur commune celle du segment, et pour bases respectives les bases du segment.*

Le trapèze mixtiligne DAmBF (*fig.* 475) engendre un segment sphérique en tournant autour du diamètre xy (854). Ce segment est donc la somme des volumes engendrés par le segment circulaire AmB et le trapèze rectangulaire DABF. On a d'abord (865)

$$\text{vol. A}m\text{B} = \frac{1}{6}\pi\overline{\text{AB}}^2.\text{DF}.$$

Le trapèze DABF engendrant un tronc de cône de révolution, on a aussi (766)

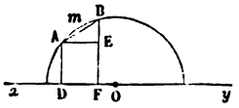
$$\text{vol.DABF} = \frac{1}{3}\pi\,\text{DF}\left(\overline{\text{BF}}^2 + \overline{\text{AD}}^2 + \text{BF.AD}\right).$$

Par suite,

$$\text{vol. DA}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi\,\text{DF}\left(\overline{\text{AB}}^2 + 2\overline{\text{BF}}^2 + 2\overline{\text{AD}}^2 + 2\,\text{BF.AD}\right).$$

D'ailleurs, la corde AB est liée à la hauteur DF et aux rayons

Fig. 475.



BF et AD des bases du segment sphérique par la relation

$$\overline{\text{AB}}^2 = \overline{\text{AE}}^2 + \overline{\text{BE}}^2 = \overline{\text{DF}}^2 + (\text{BF} - \text{AD})^2$$

ou

$$\overline{\text{AB}}^2 = \overline{\text{DF}}^2 + \overline{\text{BF}}^2 + \overline{\text{AD}}^2 - 2\,\text{BF.AD}.$$

En substituant cette valeur de $\overline{\text{AB}}^2$ et en simplifiant, il vient

$$\text{vol. DA}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi\,\text{DF}\left(\overline{\text{DF}}^2 + 3\overline{\text{BF}}^2 + 3\overline{\text{AD}}^2\right),$$

ce qu'on peut écrire

$$\text{vol. DA}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi\,\overline{\text{DF}}^3 + \frac{1}{2}\left(\pi\,\overline{\text{BF}}^2.\text{DF} + \pi\,\overline{\text{AD}}^2.\text{DF}\right)$$

de manière à vérifier l'énoncé (861, 746).

Si le segment considéré n'a qu'une base, c'est-à-dire si (*fig.* 476) le point D vient occuper l'une des extrémités du diamètre *xy*, on a simplement

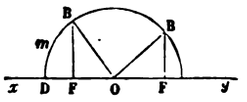
$$\text{vol. D}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi\,\overline{\text{DF}}^3 + \frac{1}{2}\pi\,\overline{\text{BF}}^2.\text{DF}.$$

513
R85t
QA
445
R62

SCOLIE.

867. Quand le segment sphérique n'a qu'une base (*fig.* 476), on peut exprimer son volume V en fonction de sa hauteur

Fig. 476.



$DF = h$ et du rayon R de la sphère. On a d'abord, d'après la formule précédente,

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi \overline{BF}^2 . h.$$

D'ailleurs (223),

$$\overline{BF}^2 = h(2R - h),$$

d'où

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h^2 (2R - h)$$

ou, en simplifiant,

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right). \quad (1)$$

On peut trouver directement cette formule, en regardant le segment à une base comme la somme ou la différence du secteur sphérique terminé à la même calotte sphérique et du cône de révolution qui, ayant la même base que le segment, a son sommet au centre de la sphère. Le segment sphérique est la somme ou la différence des deux volumes indiqués, suivant qu'il est plus grand ou plus petit que la demi-sphère.

Dans le second cas (*fig.* 476), on a

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi \overline{BF}^2 (R - h);$$

dans le premier (même figure),

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h + \frac{1}{3}\pi \overline{BF}^2 (h - R).$$

Ces deux formules sont identiques, puisque $\overline{BF}^2$ a toujours la même expression; et, en les simplifiant, on retrouve la formule (1).

THÉORÈME.

868. *Le volume d'une pyramide sphérique a pour mesure le produit de sa base par le tiers du rayon de la sphère.*

Une *pyramide sphérique* est la portion du volume de la sphère comprise entre les faces d'un angle polyèdre dont le sommet est au centre de la sphère; le polygone sphérique correspondant à cet angle polyèdre est la *base* de la pyramide. Deux pyramides sphériques sont dites *symétriques* lorsqu'elles ont pour bases des polygones sphériques symétriques.

On appelle *onglet* la portion du volume de la sphère comprise entre deux demi-grands cercles CAC', CBC' (*fig.* 464) : le fuseau C'ACBC' est la *base* de l'onglet, et son angle est l'*angle* de l'onglet.

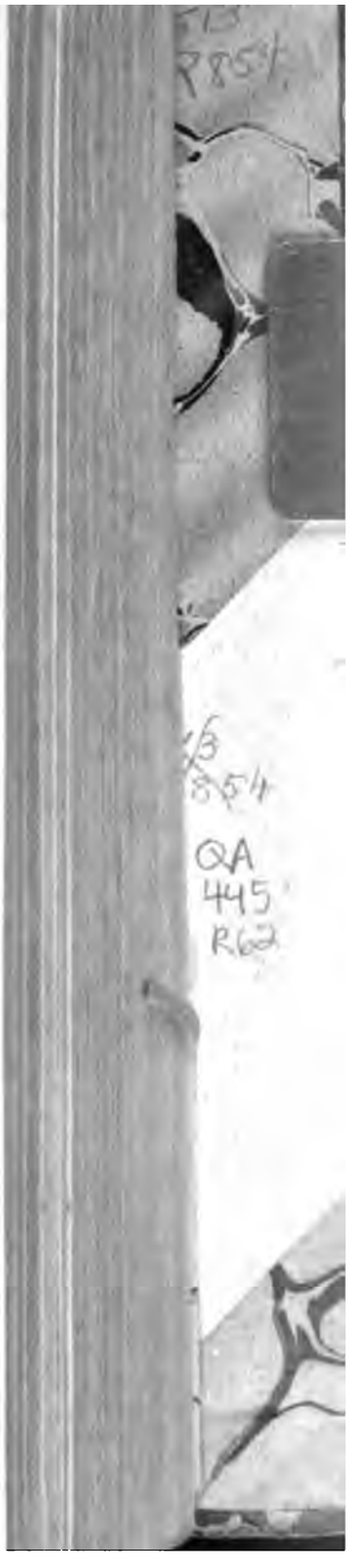
On démontre que :

1° *Deux pyramides sphériques triangulaires symétriques sont équivalentes* (844);

2° *Si l'on prend pour unité d'angle l'angle droit, et pour unité de volume la pyramide trirectangle qui est le huitième du volume de la sphère, un onglet a pour mesure le double du nombre qui mesure son angle* (846);

3° *Dans le même système d'unités, le volume d'une pyramide sphérique triangulaire a pour mesure le nombre* $A + B + C - 2$, *A, B, C étant les mesures des angles du triangle sphérique qui sert de base à la pyramide* (847).

Il résulte de là que le rapport du volume d'une pyramide sphérique triangulaire à l'aire de sa base est égal au rapport de la pyramide sphérique trirectangle au triangle trirectangle; mais ce dernier rapport est égal à celui du volume de la sphère à son aire, c'est-à-dire au tiers du rayon. Donc le volume de la pyramide sphérique triangulaire est égal au produit de sa base par le tiers du rayon; et ce théorème s'étend à la pyramide sphérique polygonale, en décomposant sa base en triangles.


QA
445
R62

§ VII. — GÉNÉRALITÉS SUR LES SURFACES.

DÉFINITIONS.

869. Une surface est le lieu des positions successives d'une ligne qui change de position et même de forme, suivant une loi déterminée et continue. Le plus souvent on règle, au moins en partie, le mouvement de cette ligne, qu'on nomme *génératrice*, en l'astreignant à rencontrer sans cesse certaines lignes fixes qu'on appelle *directrices*.

Voici des exemples :

1° Une *surface conique* est le lieu des positions successives d'une droite A_1SA (*fig.* 477) qui passe toujours par un point fixe S et qui s'appuie sur une ligne fixe AMB plane ou gauche. Ici la génératrice est constante de forme, c'est une droite, et l'une des directrices se réduit à un point S qu'on nomme *sommet*. Une surface conique a deux nappes SA_1B_1, SAB, séparées par le sommet.

Fig. 477.

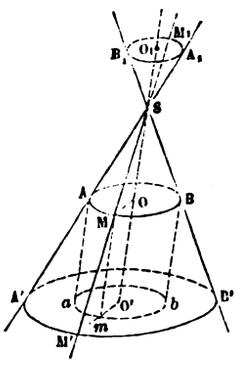
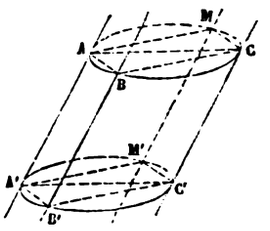


Fig. 478.

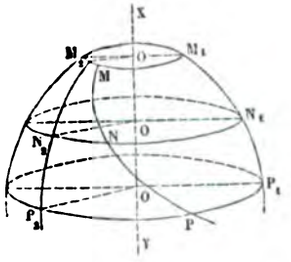


2° Une *surface cylindrique* est le lieu des positions successives d'une droite AA′ qui s'appuie sur une ligne fixe ABC et reste parallèle à une direction donnée (*fig.* 478). Une surface cylindrique peut être considérée comme la limite d'une sur-

face conique dont le sommet s'est éloigné indéfiniment dans la direction donnée; ou, plus brièvement, c'est une surface conique dont le sommet est à l'infini dans une certaine direction.

3° Une *surface de révolution* est le lieu des positions successives d'une ligne MNP qui tourne autour d'une droite fixe XY à laquelle elle est invariablement liée (*fig.* 479). Dans ce mouvement, tout point M de la génératrice MNP décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe XY, et dont le centre O est sur cet axe; d'après cela, toutes les sections faites par des plans perpendiculaires à l'axe sont des cercles : ces cercles M_1MM_2, N_1NN_2, P_1PP_2, ... sont les *parallèles* de la surface. On appelle *méridiens* les sections faites dans la surface par des plans passant par l'axe XY; deux méridiens quelconques $M_1N_1P_1$, $M_2N_2P_2$ sont des lignes superposables : car, si l'on fait tourner le plan XOP_1 de l'angle P_1OP_2, de manière à amener le point P_1 sur le point P_2, les points M_1, N_1, ... arriveront respectivement sur $M_2, N_2, \ldots$, attendu que les angles M_1OM_2, $N_1ON_2, \ldots$, P_1OP_2, sont égaux, comme angles plans d'un même dièdre.

Fig. 479.



Toute courbe tracée sur une surface de révolution peut être prise pour génératrice de cette surface; le plus souvent on choisit pour génératrice la courbe méridienne. Nous avons déjà étudié trois surfaces de révolution : la surface conique de révolution dont le méridien est une droite qui rencontre l'axe, la surface cylindrique de révolution dont le méridien

est une droite parallèle à l'axe, et la sphère dont le méridien est une circonférence ayant son centre sur l'axe.

Les surfaces de révolution admettent un second mode de génération fort remarquable : on peut les considérer comme le lieu des positions d'un cercle dont le centre parcourt l'axe fixe XY, dont le plan reste perpendiculaire à cet axe, et dont le rayon varie suivant une loi telle, que le cercle rencontre sans cesse un méridien ou toute autre courbe tracée sur la surface. C'est ce cercle, variable de grandeur et de position, qui est alors la *génératrice*, et le méridien ou la courbe fixe considérée sur la surface qui est la *directrice*.

THÉOREME.

870. 1° *Les sections d'une surface cylindrique, par deux plans parallèles, sont égales.*

2° *Les sections d'une surface conique, par deux plans parallèles, sont semblables.*

En effet :

1° Soient la surface cylindrique AA′ et deux sections ABC, A′B′C′, faites par deux plans parallèles (*fig.* 478). Prenons quatre points A, B, C, M, sur la première section, et menons les génératrices AA′, BB′, CC′, MM′, qui rencontrent la seconde section en A′, B′, C′, M′. Les quadrilatères ABCM, A′B′C′M′ sont superposables comme bases opposées d'un prisme quadrangulaire. D'après cela, si l'on transporte le plan de la seconde section sur celui de la première, dès que les trois points A′, B′, C′ seront appliqués sur leurs correspondants A, B, C, tout point M′ de la seconde section coïncidera avec son correspondant M de la première.

La section A′B′C′ peut être considérée comme la projection oblique (586) de ABC; on peut donc encore énoncer ce théorème de la manière suivante : *Une courbe plane quelconque est égale à sa projection oblique* (*ou orthogonale*) *sur un plan parallèle au sien.*

2° Soient la surface conique SAMB et deux sections AMB, A′M′B′, faites par deux plans parallèles (*fig.* 477). Menons par le sommet une droite quelconque SOO′ qui rencontre les

deux plans en O et O′, et projetons, parallèlement à SOO′, la première section AMB sur le plan de la seconde; cette projection *amb* étant égale à AMB (1°), la proposition sera démontrée si nous prouvons que *amb* et A′M′B′ sont homothétiques. Or, SMM′ étant une génératrice quelconque de la surface, les droites OM et O′M′ sont parallèles, et l'on a

$$\frac{OM}{O'M'} = \frac{SO}{SO'},$$

ou, en observant que la projection m de M est située sur O′M′ et que $O'm = OM$,

$$\frac{O'm}{O'M'} = \frac{SO}{SO'}.$$

Le second membre de cette égalité ayant une valeur indépendante de la position du point M′ sur la courbe A′M′B′, les courbes *amb* et A′M′B′ sont homothétiques.

Scolies.

871. On nomme *section droite d'une surface cylindrique* la section faite par un plan perpendiculaire aux génératrices.

Un *cylindre* est le corps compris entre une surface cylindrique et deux sections planes parallèles. Ces sections sont les *bases* du cylindre, et la distance de leurs plans parallèles est la hauteur de ce corps. Le cylindre est droit ou *oblique*, suivant que ses génératrices sont perpendiculaires ou obliques au plan de la base. *Le cylindre droit à base circulaire* n'est autre que le cylindre de révolution étudié dans le § I.

L'aire latérale d'un cylindre quelconque est égale au produit de son arête par le périmètre de sa section droite.

Le volume d'un cylindre quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur.

On arrive à ces théorèmes en considérant le cylindre comme la limite d'un prisme inscrit, lorsque les côtés de la base polygonale tendent vers zéro.

Les théorèmes relatifs au prisme tronqué, démontrés aux n°s 719, 720, 722, 723, sont de même applicables au cylindre tronqué.

872. Un *cône* est le corps compris sous une surface conique limitée d'une part à son sommet et de l'autre à une section plane, qui prend le nom de *base;* la hauteur du cône est la distance du sommet au plan de la base. Un cône à *base circulaire* est *droit* ou *oblique* suivant que la projection orthogonale du sommet sur le plan de la base coïncide ou non avec le centre du cercle. Le cône circulaire droit n'est autre que le cône de révolution étudié au § II.

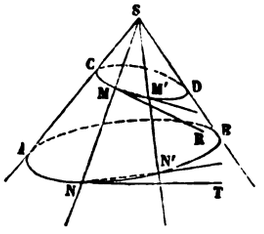
Le volume d'un cône quelconque est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.

On arrive à ce théorème en considérant le cône comme la limite d'une pyramide inscrite, lorsque les côtés de la base polygonale tendent vers zéro.

THÉORÈME.

873. *Dans un cône ou dans un cylindre, le plan* SNT, *déterminé par une génératrice* SN *et par la tangente* NT *menée à une courbe* ANB *située sur la surface, au point* N *où cette courbe rencontre la génératrice, est le même, quelle que soit la courbe considérée* (*fig.* 480).

Fig. 480.



Il suffit de prendre une seconde courbe CMD sur la surface, coupant la génératrice SN au point M, et de prouver que le plan SNT renferme la tangente MR menée par le point M à cette courbe. Or le plan NSN′ mené par la génératrice SMN et une génératrice voisine SM′N′ a pour limite SNT, puisque la corde NN′ tend vers la tangente NT. D'ailleurs, quand N′ vient en N, M′ vient en M, et les sécantes NN′, MM′ de-

viennent en même temps les tangentes NT et MR; comme les sécantes MM′ NN′ sont sans cesse contenues dans le plan SNN′, on voit que le plan SNT renferme la tangente MR.

Ce plan SNT est dit le *plan tangent au cône* ou *au cylindre suivant la génératrice* SN.

COROLLAIRE.

874. En supposant que la courbe ANB soit plane, on arrive à ce théorème : *La tangente* NT *à la projection ou à la perspective* ANB *d'une courbe* CMD *est la projection ou la perspective de la tangente* MR *à cette courbe* (586).

Ce corollaire souffre toutefois une exception, lorsque la tangente de l'espace est elle-même une des droites projetantes. La projection ou la perspective de la tangente se réduit alors à un point, tandis que la tangente de la projection ou de la perspective est une droite bien déterminée; c'est la trace, sur le plan de projection, du plan tangent au cylindre ou au cône projetant, suivant la génératrice qui coïncide avec la tangente de l'espace.

THÉORÈME.

875. *Dans le cône oblique à base circulaire, toute section anti-parallèle à la base est un cercle.*

Soit (*fig.* 481) S le sommet d'un cône oblique ayant pour base le cercle O. On nomme *plan principal* le plan SAB mené par la droite qui joint le sommet S au centre O de la base, perpendiculairement au plan de cette base; on dit qu'un plan CMD est *anti-parallèle à la base*, lorsqu'il est perpendiculaire sur le plan principal SAB et que sa trace CD sur ce plan principal est anti-parallèle à AB par rapport à l'angle ASB (189). Il s'agit de prouver que la section CMD est un cercle.

Par un point quelconque M de la section, menons un plan parallèle à la base; ce plan coupera le cône suivant un cercle A′MB′ (870) décrit sur A′B′ comme diamètre, et le plan CMD suivant une droite MP perpendiculaire au plan principal (561). Or, dans le cercle A′MB′, on a (223)

$$\overline{MP}^2 = PA' \cdot PB'.$$

D'ailleurs, les triangles PCA′, PDB′ sont semblables comme

ayant leurs angles égaux ; ils donnent

$$\frac{PA'}{PD} = \frac{PC}{PB'}, \quad \text{d'où} \quad PA'.PB' = PC.PD.$$

Donc

$$\overline{MP}^2 = PC.PD$$

et, par suite (223), le point M appartient à un cercle décrit sur CD comme diamètre.

Fig. 481.

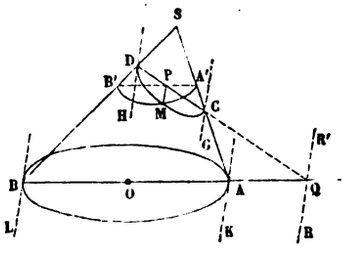
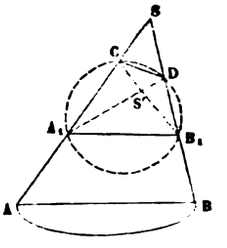


Fig. 482.



876. RÉCIPROQUEMENT, *il n'y a que les sections parallèles et les sections anti-parallèles à la base qui soient des cercles.*

En effet, considérons une section circulaire CMD non parallèle à la base, et soit (*fig.* 481) RR' la trace de son plan sur le plan de la base ; du centre O, abaissons sur RR' la perpendiculaire OQ qui rencontre la circonférence de base en A et B ; menons les génératrices SA, SB, et les tangentes AK et BL qui sont évidemment parallèles à QR. Les plans SAK, SBL, tangents au cône, couperont le plan MRR' suivant deux droites CG et DH, tangentes au cercle CMD et parallèles à RR' ; par suite, la droite DCQ sera perpendiculaire à RR', et l'on conclut de là que les cercles AB et CD sont perpendiculaires au même plan SAB qui passe par leurs centres et par le sommet du cône. D'ailleurs, en menant la section B'MA' parallèle à la base, on a

$$\overline{MP}^2 = PA'.PB', \quad \overline{MP}^2 = PC.PD, \quad \text{d'où} \quad PA'.PB' = PC.PD.$$

Les triangles PA'C, PDB' sont donc semblables, et les angles DB'A', DCA' sont égaux, de sorte que CD est anti-parallèle à AB.

COROLLAIRES.

877. La même propriété subsiste pour le cylindre oblique à base circulaire.

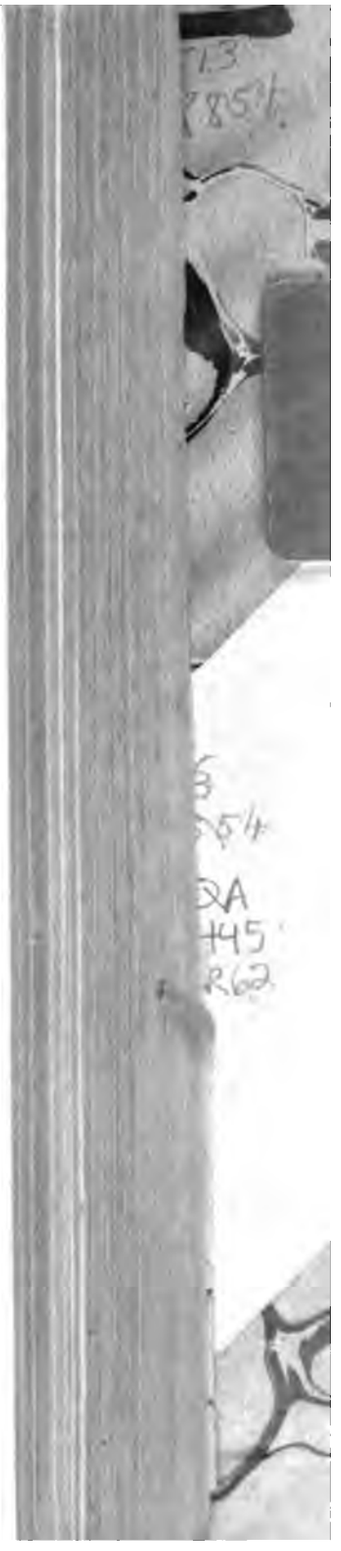
878. *Deux sections, l'une* A_1B_1 *parallèle, l'autre* CD *anti-parallèle à la base d'un cône oblique à base circulaire, sont toujours situées sur une même sphère;* car les deux sections circulaires A_1B_1 et CD (*fig.* 482) doivent (875) être perpendiculaires à un même plan SAB passant par leurs centres, et le quadrilatère A_1B_1DC situé dans ce plan doit être inscriptible; les cercles A_1B_1 et CD sont donc sur la sphère dont le grand cercle passe par les quatre points A_1, B_1, C, D.

Inversement, *par deux cercles* A_1B_1 *et* CD *placés sur la surface d'une sphère, on peut toujours faire passer deux cônes.* — En effet, soient (*fig.* 482) A_1B_1DC une section passant par le centre de la sphère et par les centres des deux cercles, et A_1B_1, CD les diamètres de ces cercles, déterminés par la section A_1B_1CD; les plans de ces cercles seront perpendiculaires au plan sécant A_1B_1CD. Or, si l'on mène les droites A_1C et B_1D, leur point de concours S sera le sommet d'un cône ayant pour base le cercle A_1B_1 et passant par les points C et D. Mais l'angle DCS est égal à l'angle A_1B_1S : donc la section CD faite dans le cône par un plan perpendiculaire à A_1B_1DC sera un cercle ayant CD pour diamètre; donc ce cercle se confond avec le cercle CD de la sphère. Il y a un second cône qui coupe la sphère suivant les mêmes cercles A_1B_1 et CD; son sommet est à l'intersection S' des deux diagonales B_1C et A_1D. Ces deux cônes peuvent, dans certains cas, dégénérer en cylindres.

879. Il résulte encore des considérations précédentes que, *lorsqu'un cône* S *pénètre dans une sphère suivant un cercle* A_1B_1, *il en sort suivant un second cercle* CD.

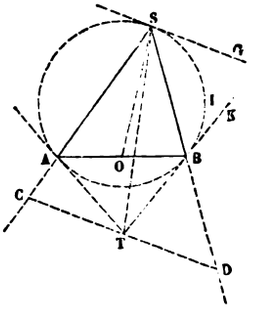
880. Dans un cône oblique à base circulaire, les centres des sections parallèles à la base sont distribués sur une même droite passant par le sommet; les centres des sections anti-parallèles à la base sont aussi placés sur une seconde droite passant par le sommet. Il importe de connaître la situation respective de ces deux droites.

Soit SAB la section principale du cône dont la base est le cercle décrit sur AB comme diamètre. Le cercle circonscrit au triangle ASB (*fig.* 483) est un grand cercle de la sphère qui contient le cercle AB et le sommet S du cône. La tangente SG au cercle SAB est la trace sur SAB du plan tangent à la sphère en S, et ce plan tangent est perpendiculaire au plan SAB de la figure; d'ailleurs, la droite SG est anti-parallèle à AB, à cause de l'égalité des angles BAS, BSG. Donc le plan tangent SG est parallèle aux plans des sections anti-parallèles à la base AB, et la question se réduit à trouver le centre d'une section quelconque parallèle à ce plan tangent. Nous choisirons celle qui passe par le point de concours T des tangentes en A et en B au cercle ASB, c'est-à-dire par le sommet T du cône qui est circonscrit à la sphère suivant le cercle AB. En menant par le point T



la parallèle CTD à SG, on aura le diamètre de cette section. Or il est aisé de voir que le point T en est précisément le centre, c'est-à-dire que le

Fig. 483.



point T est le milieu de CD. En effet, l'angle TBD, égal à SBK, a pour mesure la moitié de l'arc SIB ; l'angle TDB, alterne-interne de BSG, a la même mesure ; donc le triangle TBD est isocèle et l'on a TD = TB. On voit pareillement que TC = TA ; par suite, comme TA = TB (158), on a TC = TD. Ainsi, *le lieu des centres des sections anti-parallèles à la base* AB *est la droite* ST, *qui joint le sommet* S *au sommet* T *d'un cône auxiliaire circonscrit, suivant le cercle* AB, *à la sphère déterminée par ce cercle et par le sommet* S *du cône primitif*.

THÉORÈME.

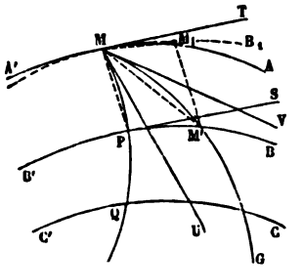
881. *Le lieu des tangentes, menées par un point d'une surface aux diverses courbes que l'on peut tracer par ce point sur la surface, est un plan.*

Soient M le point donné, AMA′ une section plane passant par ce point, et BB′, CC′, ... des sections voisines faites par des plans parallèles au premier (*fig.* 484). Si l'on prend sur ces courbes les points P, Q, ..., où la tangente est parallèle à MT, on obtiendra une courbe continue MPQ, ..., située sur la surface. Soit MU la tangente à cette courbe au point M ; tout se réduit à prouver que le plan TMU renferme la tangente MV à une courbe quelconque MG tracée par M sur la surface.

Or, soit M′ le point où la courbe MG rencontre la section BPB′ ; menons les cordes MP, MM′, et projetons, parallèlement à MP, sur le plan de la première section AMA′, la section BPB′ ; la courbe MM_1B_1 ainsi obtenue sera tangente en M à MT. En effet, la tangente à la projection MM_1B_1 doit être la projection de la tangente PS à la courbe de l'espace BPB′ (874), et la projection de PS, parallèlement à MP, est précisé-

ment MT, puisque, par hypothèse, PS et MT sont parallèles. Cela étant, si M_1 est la projection de M', le plan M_1MP des deux cordes MM_1 et MP

Fig. 484.



renferme sans cesse la corde MM'; par suite, la tangente MV sera contenue dans le plan limite de M_1MP; or ce plan n'est autre que TMU, puisque les cordes MM_1 et MP ont respectivement pour limites les tangentes MT et MU.

Ce plan, lieu des tangentes aux diverses courbes que l'on peut mener par le point M sur la surface, prend le nom de *plan tangent de la surface* au point M.

Scolies.

882. La *normale* à une surface au point M est la perpendiculaire au plan tangent en ce point.

883. Le plan tangent en un point d'une surface est déterminé par les tangentes à deux courbes quelconques menées par ce point sur la surface.

884. Dans toute *surface réglée,* c'est-à-dire engendrée par une ligne droite, le plan tangent en un point contient la génératrice qui passe par ce point; il est alors déterminé par cette génératrice et par la tangente à une courbe quelconque menée par ce point sur la surface. Ce plan *tourne* en général autour de la génératrice. Il est pourtant une classe de surfaces réglées, pour lesquelles le plan tangent est le même tout le long de la génératrice, comme cela arrive (873) pour les cônes et les cylindres. Ces surfaces sont dites *développables,* tandis qu'on appelle *gauches* les surfaces réglées qui ne jouissent pas de cette propriété. Les surfaces développables sont ainsi nommées, parce qu'on peut les étendre sur un plan sans les déchirer ni les replier. Considérons, en effet, une surface telle que les plans tangents soient les mêmes le long de chaque génératrice, c'est-à-dire ne changent qu'en passant d'une génératrice à l'autre : l'ensemble des plans tangents, suivant les diverses génératrices, formera

une surface polyédrique circonscrite, qui a pour limite la surface considérée. Or cette surface polyédrique peut être étendue sur un plan, en faisant tourner chaque face plane autour d'une arête, de manière à la rabattre sur le plan de la face précédente; et, comme cette propriété a lieu, quelque rapprochées que soient les génératrices, il en est de même à la limite pour la surface considérée.

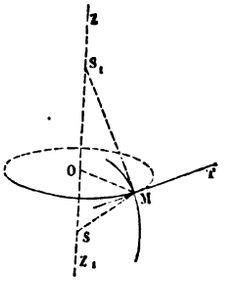
885. Le plan tangent à une surface peut laisser la surface tout entière d'un seul côté; il y a alors un point de contact unique ou une ligne de contact; le premier cas se présente, par exemple, pour la sphère, le second pour le cylindre et le cône à base circulaire. Le plan tangent peut aussi couper la surface, et la section est alors une courbe à nœud : c'est ce qui arrive, par exemple, en un point de la gorge d'une poulie.

886. Enfin nous devons observer que le théorème précédent (881) cesse parfois d'être vrai en certains points *singuliers,* tels que le sommet d'un cône; en ce point, le lieu des tangentes forme, non pas un plan, mais la surface conique proposée. Il en est de même au point d'une surface de révolution situé sur l'axe, lorsque la méridienne rencontre cet axe sous un angle différent de 90 degrés. Ajoutons cependant que, si un point décrit sur la surface d'un cône une courbe bien déterminée et aboutissant au sommet, le plan tangent au cône en chacune des positions du mobile sur sa trajectoire est parfaitement déterminé, et il l'est encore au moment où le mobile atteint le sommet du cône; c'est le plan tangent suivant la génératrice qui touche au sommet la courbe considérée.

THÉORÈME.

887. *Le plan tangent en un point* M *d'une surface de révolution est perpendiculaire au plan méridien* ZOM *qui passe par le point de contact* (*fig.* 485).

Fig. 485.



En effet, le plan tangent en M contient la tangente MT au parallèle

OM, et cette tangente MT est perpendiculaire au plan méridien ZOM, comme étant à angle droit sur les deux droites OM et OZ de ce plan.

COROLLAIRES.

888. La normale MS à la surface au point M est contenue dans le plan méridien ZOM (882). Le point S, où elle rencontre l'axe ZZ_1, est d'ailleurs le même pour toutes les normales qui répondent aux divers points d'un même parallèle ; d'où l'on conclut que *les normales menées à une surface de révolution par les divers points d'un parallèle forment un cône de révolution qui a son sommet* S *sur l'axe de la surface. Les tangentes aux différents méridiens en des points situés sur une même parallèle forment* aussi *un cône de révolution qui est circonscrit à la surface et qui a son sommet* S_1 *sur l'axe de cette surface.* L'angle S_1MS, qui mesure l'angle des plans tangents aux deux cônes au point M, est droit ; *les deux cônes sont donc orthogonaux.*

THÉORÈME.

889. *Quatre plans tangents à une surface gauche, menés par une même génératrice, ont leur rapport anharmonique égal à celui de leurs quatre points de contact.*

En effet, soient G une génératrice d'une surface gauche (884), et A, B, C, D les plans qui touchent cette surface respectivement aux points a, b, c, d de cette génératrice. Considérons quatre courbes fixes $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$, tracées à volonté sur la surface et passant respectivement par les points a, b, c, d ; désignons par a', b', c', d' les points où ces courbes rencontrent une génératrice G' voisine de la génératrice G, et menons les cordes aa', bb', cc', dd'. Le faisceau des quatre plans Gaa', Gbb', Gcc', Gdd', étant coupé par la transversale G' aux points a', b', c', d', le rapport anharmonique de ces quatre points est égal à celui des quatre plans. Cette propriété ayant lieu, quelle que soit la position de G' sur la surface, subsiste quand G' vient se confondre avec G ; mais alors les points a', b', c', d' se confondent avec a, b, c, d, et les plans Gaa', Gbb', Gcc', Gdd' deviennent les plans tangents A, B, C, D, puisque les cordes aa', bb', cc', dd' ont pour limites les tangentes en a, b, c, d, aux courbes $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$. Donc le rapport anharmonique des quatre plans tangents A, B, C, D est égal à celui de leurs points de contact a, b, c, d.

COROLLAIRES.

890. La relation (727)

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{\sin \widehat{CA}}{\sin \widehat{CB}} : \frac{\sin \widehat{DA}}{\sin \widehat{DB}},$$

qui est la traduction analytique du théorème précédent, permet de déterminer le plan D qui touche la surface en un point donné quelconque d de la génératrice G, dès qu'on connaît les plans tangents A, B, C en trois points donnés a, b, c de cette génératrice.

891. On dit que deux surfaces gauches S et S', qui ont une génératrice commune G, *se raccordent* suivant cette génératrice, lorsqu'elles se touchent en tout point de cette ligne.

Deux surfaces gauches S *et* S' *se raccordent suivant une génératrice commune* G *dès qu'elles se touchent en trois points* a, b, c *de cette génératrice.*

En effet, soient d un point quelconque de la génératrice G ; D et D' les plans qui touchent respectivement au point d les surfaces S et S'; enfin, A, B, C les plans tangents communs en a, b, c. Les rapports anharmoniques des deux systèmes de quatre plans (A, B, C, D), (A, B, C, D') sont égaux entre eux, puisque, d'après le théorème précédent, chacun d'eux est égal à celui des quatre points a, b, c, d. Donc les plans D et D' coïncident, et les deux surfaces S et S' se touchent en un point quelconque d de la génératrice commune.

C'est surtout en étudiant la Géométrie descriptive qu'on comprendra l'importance de ce principe fondamental.

§ VIII. — APPENDICE.

I. — Théorème de Guldin.

892. L'importante proposition connue sous ce nom se trouve indiquée dans Pappus (fin du IVe siècle). Elle a été ensuite retrouvée par Guldin (commencement du XIVe siècle).

THÉORÈME.

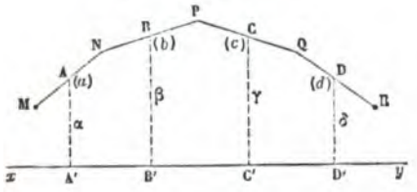
893. *L'aire engendrée par une ligne brisée plane quelconque, tournant autour d'un axe extérieur quelconque situé dans son plan, a pour mesure le produit de la longueur de la ligne brisée par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Nous savons que le centre de gravité d'une ligne brisée plane est le centre des distances proportionnelles des centres de gravité de ses côtés (714).

Si la ligne brisée se réduit à une droite AB, la proposition a déjà été démontrée (761), puisque le centre de gravité d'une droite est en son milieu (714).

Soient maintenant (*fig.* 486) la ligne brisée plane quelconque MNPQR tournant autour de l'axe xy. Soient a, b, c, ... les longueurs des côtés

Fig. 486.



de cette ligne; α, β, γ, ... les distances des milieux A, B, C, ... de ses côtés à l'axe xy. L'aire totale S, engendrée par la ligne brisée MNPQR, étant la somme des aires engendrées par ses côtés MN, NP, ..., on aura (761)

$$S = a.2\pi\alpha + b.2\pi\beta + c.2\pi\gamma + \ldots = 2\pi(a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots).$$

Si l'on désigne par z la distance à l'axe xy du centre des distances proportionnelles des points A, B, C, ..., on a (710)

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots = z(a + b + c + \ldots);$$

d'où

$$S = (a + b + c + \ldots).2\pi z,$$

expression de l'énoncé.

COROLLAIRES.

894. Le théorème subsiste, quels que soient le nombre et la grandeur des côtés de la ligne brisée, c'est-à-dire à la limite, quand il s'agit d'une ligne courbe en tout ou en partie. Le centre de gravité de la ligne obtenue est alors la position limite du centre de gravité de la ligne polygonale. Par suite, *l'aire engendrée par une ligne courbe plane tournant autour d'un axe extérieur quelconque situé dans son plan a pour mesure le produit de sa longueur par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

APPLICATIONS.

895. 1° *Quelle est l'expression de l'aire engendrée par une circonférence de rayon r, en tournant autour d'une droite xy de son plan qui ne la coupe pas?*

Soit d la distance du centre de cette circonférence à l'axe xy; le centre d'une circonférence est évidemment son centre de gravité, car, dans la

recherche du centre des moyennes distances, on peut remplacer plusieurs points par leur centre particulier (713), et le centre qui correspond aux extrémités d'un diamètre quelconque est le centre de la circonférence. L'aire de la surface engendrée, qu'on appelle *tore*, sera donc

$$2\pi r . 2\pi d = 4\pi^2 rd.$$

2° *Trouver la position du centre de gravité d'une demi-circonférence de rayon r.*

Soit x la distance du point cherché au diamètre qui termine la demi-circonférence. Si on la fait tourner autour de ce diamètre, elle engendrera une surface sphérique de rayon r. On devra donc avoir (842)

$$\pi r . 2\pi x \quad \text{ou} \quad 2\pi^2 rx = 4\pi r^2, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2r}{\pi}.$$

Le centre de gravité cherché étant d'ailleurs, d'après une remarque précédente, situé sur le rayon perpendiculaire à l'axe, sa position est parfaitement déterminée.

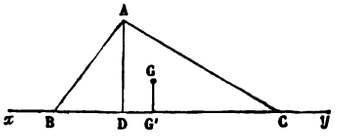
THÉORÈME.

896. *Le volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe extérieur situé dans son plan, a pour mesure le produit de l'aire du triangle par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Nous distinguons trois cas :

1° L'un des côtés du triangle se confond avec l'axe (*fig.* 487).

Fig. 487.



Le volume engendré par le triangle ABC tournant autour de l'axe xy a pour expression (855, 1°)

$$\frac{1}{3}\pi . AD^2 . BC,$$

c'est-à-dire, en désignant par S l'aire du triangle dont le double est représenté par AD.BC,

$$\frac{2}{3}\pi . AD . S.$$

Si G est le centre de gravité du triangle ABC, on a (715), pour la perpendiculaire GG′ à l'axe,

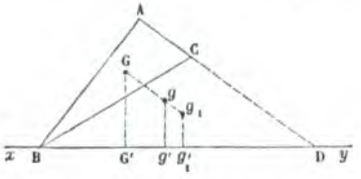
$$GG' = \frac{AD}{3}.$$

Le volume engendré a donc finalement pour mesure

$$S.2\pi.GG'.$$

2° Le triangle n'a qu'un sommet situé sur l'axe (*fig.* 488).

Fig. 488.



Prolongeons le côté AC jusqu'à sa rencontre avec l'axe xy. On a

$$\text{vol.ABC} = \text{vol.ABD} - \text{vol.CBD}.$$

Si g et g_1 sont les centres de gravité des triangles ABD et CBD, il vient donc, d'après le premier cas,

$$\text{vol.ABC} = 2\pi(\text{ABD}.gg' - \text{CBD}.g_1g_1').$$

Le triangle ABC étant la différence des deux triangles ABD et CBD, son centre de gravité G est le centre des distances proportionnelles des points g, g_1, si l'on attribue aux trois points considérés des coefficients proportionnels aux aires des trois triangles correspondants, en donnant à ces coefficients les signes convenables (716). On aura, par suite,

$$\text{ABD}.gg' - \text{CBD}.g_1g_1' = \text{ABC}.\text{GG}';$$

d'où

$$\text{vol.ABC} = \text{ABC}.2\pi\text{GG}'.$$

3° L'axe est complétement extérieur au triangle (*fig.* 489).

Les trois côtés du triangle ne pouvant être parallèles à l'axe, prolongeons le côté AB, par exemple, jusqu'à sa rencontre en D avec l'axe xy, et joignons CD. On aura

$$\text{vol.ABC} = \text{vol.ACD} - \text{vol.BCD},$$

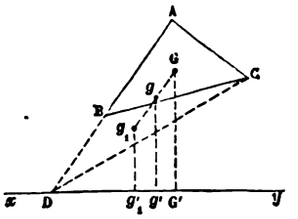
c'est-à-dire, d'après le second cas, en désignant par g et g_1 les centres

de gravité des triangles ACD et BCD,

$$\text{vol.APC} = 2\pi\,(\text{ACD}.gg' - \text{BCD}.g_1g'_1).$$

Le triangle ABC, dont le centre de gravité est G, étant la différence

Fig. 489.



des triangles ACD et BCD, on a, comme ci-dessus,

$$\text{ACD}.gg' - \text{BCD}.g_1g'_1 = \text{ABC}.\text{GG}';$$

d'où encore

$$\text{vol.ABC} = \text{ABC}.2\pi\text{GG}'.$$

THÉORÈME.

897. *Le volume engendré par un polygone tournant autour d'un axe extérieur situé dans son plan a pour mesure le produit de son aire par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Décomposons le polygone donné, dont l'aire est S, en triangles ayant pour aires t, t', t'',.... Soient δ, δ', δ'',... les distances des centres de gravité de ces triangles à l'axe, et d la distance du centre de gravité du polygone (716) au même axe. Le volume engendré par le polygone, somme des volumes engendrés par les triangles qui le composent, est

$$2\pi(t\delta + t'\delta' + t''\delta'' + \dots).$$

Mais, d'après les propriétés du centre des distances proportionnelles, la parenthèse est égale à $S.d$. Par suite, le volume cherché a pour expression

$$S.2\pi d.$$

Corollaires.

898. Le théorème subsiste, quels que soient le nombre et la grandeur des côtés du polygone, c'est-à-dire à la limite, quand le polygone ou une partie du polygone devient une courbe. Dans ce cas, le centre de gravité de la surface obtenue est la position limite du centre de gravité de la

surface polygonale. Par suite, *le volume engendré par une surface plane quelconque tournant autour d'un axe extérieur situé dans son plan a pour mesure le produit de son aire par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

APPLICATIONS.

899. 1° *Quel est le volume du tore?*

En conservant les notations du n° 895, ce volume a pour expression

$$\pi r^2 . 2\pi d = 2\pi^2 r^2 d.$$

2° *Trouver la position du centre de gravité d'un demi-cercle de rayon r.*

Le centre de gravité cherché appartient évidemment au rayon perpendiculaire au diamètre qui termine le demi-cercle donné. De plus, si l'on fait tourner le demi-cercle autour de ce diamètre, il engendre une sphère de rayon r. On a donc, en appelant x la distance du centre de gravité à l'axe,

$$\frac{\pi r^2}{2} \cdot 2\pi x = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{4r}{3\pi}.$$

La position du point demandé est donc complétement déterminée.

II. — Sur le maximum et le minimum des figures.

900. Les propriétés qui font l'objet du § III de l'Appendice du IVe Livre ainsi que leurs démonstrations s'appliquent aux figures sphériques aussi bien qu'aux figures planes. Toutefois le théorème du n° 481 et son corollaire doivent alors être énoncés comme il suit :

Entre tous les triangles sphériques construits avec deux côtés donnés AB *et* AC, *le triangle maximum est celui dans lequel l'angle* A *de ces deux côtés est égal à la somme* B + C *des deux autres* (*fig.* 446).

Entre tous les triangles sphériques dont la somme AB + AC *de deux côtés est donnée, le triangle maximum est celui dans lequel ces deux côtés sont égaux et comprennent un angle* A *égal à la somme* B + C *des deux autres.*

Cette seconde proposition se déduit de la première par un raisonnement semblable à celui du n° 482; il ne reste donc qu'à démontrer la première.

A cet effet, laissons AB fixe; le point C sera alors astreint à rester sur un cercle ω ayant A pour pôle et pour rayon sphérique la longueur donnée du côté AC. Par les points E et D symétriques de A et de B par rapport au centre de la sphère, imaginons un plan; le cercle suivant lequel ce plan coupe la sphère rencontre le cercle ω en deux points C_1 et C_2

qui sont les sommets de deux triangles C_1AB, C_2AB équivalents (852). L'aire de ces triangles augmente avec l'inclinaison du plan du cercle sur le plan EDAB, c'est-à-dire à mesure que les points C_1 et C_2 se rapprochent l'un de l'autre sur le cercle ω; cette aire est donc maximum quand ces deux points se confondent, et par suite le triangle maximum demandé est le triangle ABC obtenu en choisissant le sommet C sur le cercle ω de telle sorte que ce cercle ω et le cercle circonscrit au triangle DEC soient tangents; mais alors le pôle du cercle DEC est sur EC (822); donc on a $C = o$, $C = \gamma$, $E = \delta$; et par suite $A = 2 - E = 2 - \delta$, $C = \gamma$, $B = 2 - D = 2 - (\delta + \gamma)$, d'où, enfin, $A = B + C$.

901. On peut dire encore que dans le *triangle maximum* ABC *construit avec deux côtés donnés* AB *et* AC, *le troisième côté* CB *est le diamètre spherique du cercle circonscrit;* car, en imaginant l'arc de grand cercle qui partagerait l'angle A en deux parties, l'une égale à B, l'autre égale à C, on voit immédiatement, par les deux triangles isocèles dans lesquels cet arc décompose le triangle ABC, que le point où cet arc coupe BC est équidistant de A, B et C, et par suite est le pôle du cercle inscrit à ABC.

THÉORÈME.

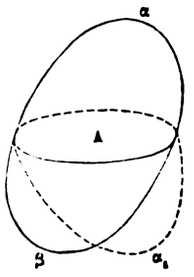
902. *Parmi tous les corps de même aire, la sphère est celui qui a le plus grand volume.*

Soit K un corps ayant le volume maximum sous une aire donnée, et Σ la surface qui le limite.

1° *La surface* Σ *est convexe,* sans quoi on pourrait augmenter le volume du corps sans augmenter l'aire.

2° *Tout plan* A *qui divise l'aire de* K *en deux parties équivalentes divise aussi le volume en deux parties* α *et* β *équivalentes* (*fig.* 490); car,

Fig. 490.



si l'on avait, par exemple, $\alpha > \beta$, en remplaçant β par la figure α_1 symé-

trique de α par rapport au plan A, on obtiendrait un corps (α, α_1) de même aire que K et de volume plus grand.

Nous donnerons, pour abréger le discours, aux plans tels que A, le nom de *plans médians*. Par toute tangente à la surface Σ, on peut mener un plan médian (raisonnement analogue à celui du n° 13, en faisant tourner un plan autour de la tangente depuis la position où il est tangent jusqu'à ce qu'il le redevienne); de même, on peut mener un plan médian parallèle à un plan quelconque.

3° *Tout plan médian* A *est normal à la surface* Σ *en tout point de la ligne suivant laquelle il coupe cette surface;* car, si en un point de cette ligne le plan tangent était oblique au plan A, en remplaçant l'une des parties α ou β par la symétrique de l'autre par rapport au plan A, on obtiendrait un corps ayant le volume maximum sous l'aire donnée, et qui, étant coupé par le plan tangent au point considéré, ne serait pas convexe.

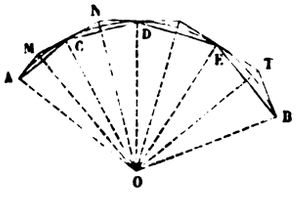
4° *Tout plan* R *passant par l'intersection* D *de deux plans médians* P *et* Q *est un plan médian.* En effet, soit X un point commun à la droite D et à la surface Σ et XT la tangente à la section que le plan R détermine dans la surface Σ; par XT on peut mener un plan médian (2°), et ce plan doit être normal en X (3°); mais la normale en X devant appartenir aussi aux plans médians P et Q (3°) n'est autre que D; donc le plan médian considéré est le plan DXT, c'est-à-dire le plan R.

5° *Toutes les normales à la surface* Σ *passent par un même point.* Qu'on imagine, en effet, les trois plans médians respectivement parallèles aux trois faces d'un trièdre quelconque; ces trois plans formeront un nouveau trièdre. Or la normale en un point quelconque M de Σ passe par le sommet O de ce trièdre; car, les trois plans déterminés par le point M et par chacune des arêtes du trièdre étant médians (4°), leur droite commune OM est la normale en M (3°).

6° *La surface* Σ *est une sphère.*

En effet, soient A et B deux points quelconques de Σ (*fig.* 491), O le

Fig. 491.



point de concours des normales à cette surface, AB la section faite dans Σ

par le plan AOB. ACD ... B, une ligne brisée inscrite dans l'arc AB, et AMN ... TB la ligne brisée circonscrite correspondante (291). La relation

$$\overline{OA}^2 + \overline{MA}^2 = \overline{OM}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{MC}^2$$

donne

$$\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2 = \overline{MC}^2 - \overline{MA}^2,$$

d'où

$$OA - OC = \frac{MC - MA}{OA + OC}(MC + MA) < \frac{AC}{OA + OC}(MA + MC),$$

et l'on a de même

$$OC - OD < \frac{CD}{OC + OD}(NC + ND),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$OE - OB < \frac{EB}{OE + OB}(TE + TB).$$

Faisons tendre vers zéro les côtés de la ligne brisée inscrite; toutes les fractions des seconds membres des inégalités précédentes tendent vers zéro; en désignant par ε la plus grande d'entre elles et ajoutant les inégalités membre à membre, on a

$$OA - OB < \varepsilon . P,$$

P étant le périmètre de la ligne brisée circonscrite; comme P tend vers la longueur de l'arc AB, et que ε tend vers zéro, on voit que la différence OA — OB peut devenir moindre que toute quantité donnée. Or cette différence est *fixe;* donc elle est nulle, et l'on a OA = OB. Deux points quelconques de la surface Σ sont donc équidistants du point O, ce qui prouve que cette surface est sphérique.

III. — Polyèdres réguliers.

DES POLYÈDRES RÉGULIERS CONVEXES.

904. Un *polyèdre régulier* est un polyèdre dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux et dont tous les angles polyèdres sont égaux entre eux.

THÉORÈME.

905. *Il ne peut exister que cinq polyèdres réguliers convexes.*

Cette proposition n'est qu'un cas particulier de celle du n° 695. On peut d'ailleurs la démontrer directement en quelques mots.

La somme des faces d'un angle polyèdre convexe devant être inférieure à quatre angles droits (570), si les faces sont des triangles équilatéraux, on ne peut assembler autour d'un même point, pour former un angle polyèdre, que *trois* ou *quatre* ou *cinq* de ces triangles. On construit ainsi : le *tétraèdre* régulier compris sous quatre triangles équilatéraux ; l'*octaèdre* régulier, compris sous huit triangles équilatéraux ; l'*icosaèdre* régulier, compris sous vingt triangles équilatéraux. Au delà, *six* triangles équilatéraux assemblés autour d'un même point donnent six angles plans dont la somme est égale à quatre angles droits; il n'y a plus d'angle polyèdre : les six triangles se trouvent développés dans un même plan.

On ne peut employer les carrés et les pentagones réguliers qu'en les assemblant par *trois*, puisque l'angle d'un carré est droit et que celui d'un pentagone régulier est égal à $\frac{3}{4}$ d'angle droit. On a ainsi l'*hexaèdre* régulier ou cube, compris sous six carrés égaux, et le *dodécaèdre* régulier, compris sous douze pentagones réguliers.

Aucun autre polyèdre régulier convexe n'est possible, puisque, l'angle d'un hexagone régulier étant égal à $\frac{4}{3}$ d'angle droit, trois angles d'hexagone régulier font en somme quatre angles droits.

Nous prouverons l'existence des cinq polyèdres réguliers énoncés, en montrant comment on peut effectuer leur construction.

PROBLÈME.

906. *Construire un polyèdre régulier, connaissant son arête.*

La construction du tétraèdre régulier (*fig.* 492) et celle du cube (*fig.* 493) ne peuvent offrir aucune difficulté, d'après ce qui a été dit aux n°s 591 et 645. Nous ne nous occuperons que de l'octaèdre, du dodécaèdre et de l'icosaèdre.

Fig. 492.

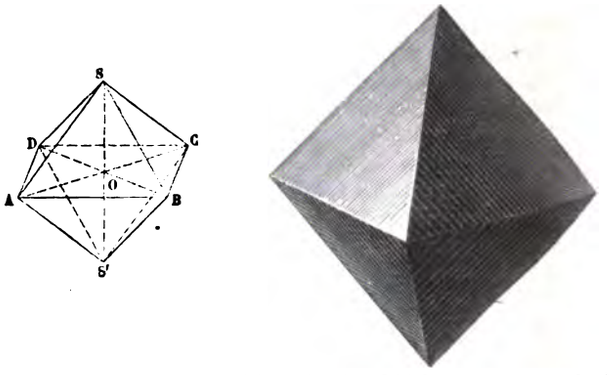
Fig. 493.

Octaèdre régulier.

Prenons (*fig.* 494) un carré ABCD de côté *a*. Élevons en son centre O

une perpendiculaire indéfinie, et portons de part et d'autre du point O sur cette perpendiculaire une longueur égale au rayon du carré ABCD, c'est-à-dire à $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. En joignant les points S et S' ainsi obtenus aux sommets

Fig. 494.



A, B, C, D, on forme un octaèdre régulier SABCDS'. En effet, les huit arêtes SA, SB, ..., S'D sont égales entre elles et à

$$\sqrt{\overline{OS}^2 + \overline{OA}^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + \frac{2a^2}{4}} = a.$$

Les huit faces du polyèdre construit sont donc des triangles équilatéraux égaux. De plus, les six angles polyèdres sont égaux entre eux ; car les angles S et B, par exemple, sont les angles au sommet de deux pyramides quadrangulaires régulières SABCD, BASCS', évidemment superposables comme ayant même base et même hauteur.

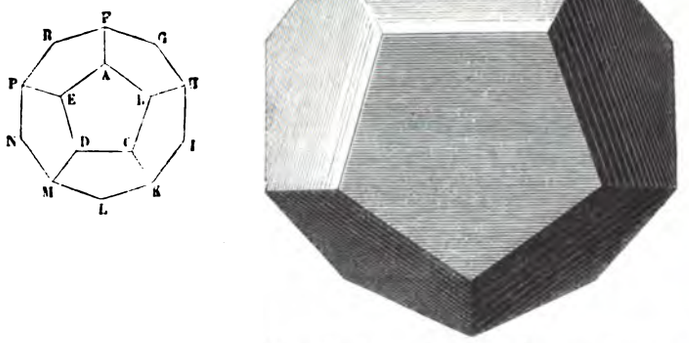
On peut résumer la construction de l'octaèdre régulier en remarquant que trois droites égales et perpendiculaires entre elles en leur milieu, telles que AC, BD, SS', ont pour extrémités les six sommets d'un pareil polyèdre.

Dodécaèdre régulier.

Soit (*fig.* 495) un pentagone régulier ABCDE de côté a. Prenons d'autres pentagones réguliers de côté a. Avec deux de ces pentagones joints au pentagone ABCDE, formons en A un angle trièdre qui, ayant ses faces égales, aura aussi ses angles dièdres égaux. Les trois côtés BA, BC, BH déterminent alors un angle trièdre B, égal à l'angle trièdre A, comme ayant un angle dièdre égal compris entre deux faces égales entre elles et chacune à chacune. On peut donc former à tous les sommets du penta-

gone ABCDE des angles trièdres égaux à A, en employant des pentagones réguliers égaux à ce pentagone et disposés comme l'indique la figure. Le pentagone ABCDE est commun à tous les angles trièdres : le deuxième, le troisième et le quatrième trièdre nécessitent l'addition d'un nouveau pentagone; le dernier angle trièdre en E se trouve tout construit.

Fig. 405.



On obtient ainsi un assemblage de six pentagones réguliers égaux et également inclinés. Cet assemblage constitue une surface polyédrale ouverte, moitié du dodécaèdre, et les sommets du décagone *gauche* (1) FGHIKLMNPR qui la termine correspondent successivement à *un* et à *deux* pentagones. D'ailleurs les angles de ce décagone sont égaux entre eux; en effet, les deux angles trièdres en A et en F sont égaux comme ayant un dièdre égal compris entre deux faces égales entre elles et chacune à chacune. L'angle RFG est donc égal à l'angle EAB et, par suite, à l'angle FGH. On peut alors faire tourner le polygone FGHIKLMNPR sur lui-même, en faisant passer le sommet F en G, le sommet G en H, etc., sans qu'il cesse de coïncider avec sa première position.

Si l'on construit de la même manière la seconde moitié du dodécaèdre et si on la retourne pour l'opposer à la première moitié, on pourra, d'après cela, rapprocher les deux calottes polyédrales et appliquer l'un sur

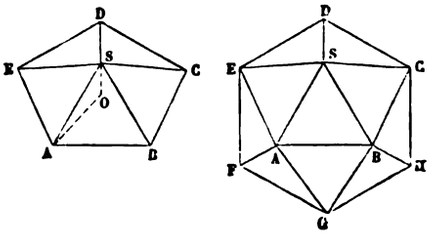
(1) Ce décagone est *gauche*; car si les quatre points R, F, G, H étaient dans un même plan, ce plan contenant aussi le point A, il n'y aurait plus d'angle triòdre en A.

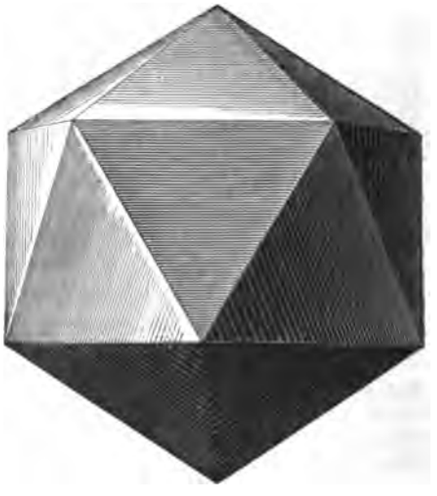
l'autre les polygones qui les terminent, en établissant la coïncidence des sommets du premier où il n'y a qu'*un* pentagone et des sommets du second qui en réunissent *deux*. Comme les plans de ces pentagones ont déjà entre eux l'inclinaison nécessaire pour composer un angle trièdre égal à l'angle A, l'ensemble obtenu sera bien un dodécaèdre régulier compris sous douze pentagones réguliers égaux formant vingt angles trièdres égaux.

Icosaèdre régulier.

Prenons (*fig.* 496) un pentagone régulier ABCDE de côté *a*. Élevons en

Fig. 496.





son centre O une perpendiculaire et, dans le plan déterminé par le rayon OA et cette perpendiculaire, décrivons du point A comme centre, avec *a*

pour rayon, un arc de cercle qui coupera la perpendiculaire au point S ; car a est plus grand que $OA = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$. Les arêtes SA, SB, ..., SE seront égales entre elles et à a. Par suite, la surface latérale de la pyramide pentagonale SABCDE sera formée de cinq triangles équilatéraux égaux entre eux et également inclinés, puisque les angles trièdres isocèles en A, B, ..., E sont égaux entre eux comme ayant leurs trois faces égales chacune à chacune.

Cela posé, en chacun des sommets A et B du triangle SAB, plaçons (comme l'indique la seconde figure) le sommet d'une pyramide identique à la première SABCDE, de manière que les deux nouvelles pyramides ABSEFG, BASCHG aient respectivement avec la première les faces communes ASB et ASE, BAS et BSC, et entre elles les faces communes ASB et ABG. Nous aurons ainsi un assemblage de dix triangles équilatéraux égaux et également inclinés.

Cet assemblage forme une surface polyédrale ouverte, moitié de l'icosaèdre, et les sommets de l'hexagone *gauche* (1) CDEFGH qui la termine réunissent successivement *deux* et *trois* triangles. D'ailleurs, les angles de cet hexagone sont égaux : l'angle DEF, par exemple, est égal à l'angle EFG, car tous deux sont évidemment égaux à l'angle EAG. On peut donc faire tourner le polygone CDEFGH sur lui-même, en faisant passer le sommet C en H, le sommet H en G, etc., sans qu'il cesse de coïncider avec sa première position.

Si l'on construit de la même manière la seconde moitié de l'icosaèdre et si on la retourne pour l'opposer à la première moitié, on pourra donc rapprocher les deux calottes polyédrales et appliquer l'un sur l'autre les polygones qui les limitent, en faisant correspondre les sommets de l'un qui réunissent *trois* triangles aux sommets de l'autre qui en réunissent *deux*. Comme les plans de ces triangles ont déjà entre eux l'inclinaison nécessaire pour constituer alors en chaque sommet un angle polyèdre égal à l'angle S, l'ensemble obtenu sera bien un icosaèdre régulier compris sous vingt triangles équilatéraux égaux, formant douze angles pentaèdres égaux.

Scolie.

907. En ayant recours aux formules $S = \frac{nF}{m}$ et $A = \frac{nF}{2}$ du n° 695, on

(1) Le contour CDEFGH est gauche ; car si les quatre points C, D, E, F étaient dans un même plan, les deux pentagones ABCDE, BSEFG, qui ont déjà dans le plan CDE les sommets B et E communs, seraient tous deux dans ce même plan, qui contiendrait le point A en même temps que les points B, E, F ; ce qui est impossible, d'après ce qui précède.

forme facilement le tableau suivant, qui renferme les nombres des éléments des cinq polyèdres réguliers convexes, dont nous connaissons les nombres de faces :

	F	*n*	S	*m*	A
Tétraèdre régulier...	4	3	4	3	6
Hexaèdre régulier...	6	4	8	3	12
Octaèdre régulier...	8	3	6	4	12
Dodécaèdre régulier.	12	5	20	3	30
Icosaèdre régulier...	20	3	12	5	30

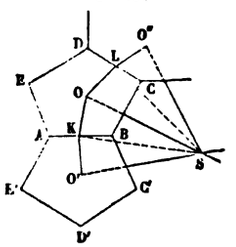
Le nombre des faces de l'hexaèdre et le nombre de côtés de ses faces sont respectivement égaux au nombre des sommets de l'octaèdre et au nombre d'arêtes de ses angles polyèdres. Il en est de même réciproquement pour l'octaèdre comparé a l'hexaèdre ; le nombre d'arêtes reste le même de part et d'autre. Les mêmes conditions sont remplies par le dodécaèdre et l'icosaèdre. On peut donc regarder les polyèdres réguliers convexes comme *conjugués* deux àdeux ; car le tétraèdre régulier, ayant autant de faces que de sommets, est conjugué à lui-même.

THÉORÈME.

908. *Tout polyèdre régulier convexe est inscriptible et circonscriptible à la sphère.*

Soient (*fig.* 497) dans le polyèdre régulier considéré deux faces adjacentes ABCDE, ABC'D'E', dont O et O' sont les centres.

Fig. 497.



Les perpendiculaires OK et O'K au côté commun AB se couperont en un même point K ; les perpendiculaires OS et O'S aux deux faces ABCDE,

A B C′ D′ E′, lieux respectifs des points à égale distance de leurs sommets, se couperont en un point S, car elles sont situées dans le plan OKO′ perpendiculaire à AB au point K. Les deux triangles rectangles KOS, KO′S seront d'ailleurs égaux entre eux, puisqu'ils ont l'hypoténuse KS commune et le côté KO égal au côté KO′ comme apothèmes de deux polygones réguliers égaux. L'angle OKO′ mesurant l'inclinaison constante de deux faces adjacentes du polyèdre, l'angle OKS égal à l'angle O′KS sera la moitié de cette inclinaison, et le triangle KOS sera, par suite, constant pour toutes les faces.

Si l'on considère une troisième face O″, contiguë à la face ABCDE par le côté CD dont le milieu est L, la perpendiculaire élevée à cette face par son centre O″ coupera donc la droite OS au point S, de manière que le triangle LO″S soit identique au triangle KOS ou à son égal OLS.

En continuant de proche en proche, on voit que les perpendiculaires élevées aux différentes faces du polyèdre par leurs centres se coupent mutuellement en un même point S, situé à la même distance de toutes les faces et à la même distance de tous les sommets.

Donc la sphère de centre S et de rayon SA passe par tous les sommets du polyèdre régulier ou lui est *circonscrite;* la sphère de même centre S et de rayon SO est tangente à toutes les faces du polyèdre en leurs centres ou lui est *inscrite*.

Le point S est le *centre* du polyèdre régulier; SA est son *rayon,* SO son *apothème*.

Corollaires.

909. Si l'on décompose un polyèdre régulier en pyramides en prenant pour centre de décomposition le centre même du polyèdre, les pyramides obtenues sont régulières : *Tout polyèdre régulier peut donc être partagé en autant de pyramides régulières qu'il a de faces*.

Les faces latérales de ces pyramides étant prolongées décomposent évidemment la sphère inscrite ou circonscrite en autant de polygones sphériques réguliers égaux que le polyèdre considéré a de faces.

Le volume d'un polyèdre régulier a pour mesure le produit de son aire par le tiers du rayon de la sphère inscrite (646).

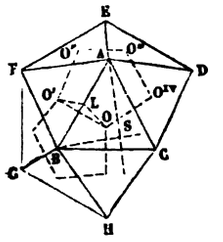
Deux polyèdres réguliers de même ordre étant nécessairement semblables, *le rapport des côtés, des aires* ou *des volumes de ces polyèdres est* aussi *celui des rayons, des carrés* ou *des cubes des rayons des sphères inscrites* ou *circonscrites*.

910. *Les centres des faces d'un polyèdre régulier sont les sommets d'un autre polyèdre régulier conjugué du premier* (*fig.* 498).

Soient A l'un des sommets du polyèdre donné et S le centre commun

des sphères inscrite et circonscrite à ce polyèdre. Désignons par O, O', O'', ... les centres des faces réunies autour du point A. Ces points

Fig. 498.



étant également distants des points S et A, sont situés dans un même plan perpendiculaire à SA en un point qui est le centre du cercle circonscrit au polygone OO'O''.... De plus, L étant le milieu du côté AB, le triangle OLO' est constant, et le polygone inscrit OO'O''... ayant ses côtés égaux est régulier. Le polyèdre formé en joignant les centres des faces du polyèdre proposé a donc déjà pour faces des polygones réguliers égaux, et le nombre de ces polygones est égal à celui des sommets du polyèdre donné. Il reste seulement à prouver que ces polygones sont également inclinés. Or, si l'on considère les deux faces du nouveau polyèdre qui s'appuient sur le côté OO', l'angle dièdre qu'elles comprennent est le supplément de l'angle constant ASB des deux perpendiculaires SA et SB à ces deux faces.

La réciproque de ce théorème est évidente.

On voit qu'en appliquant la construction indiquée sous l'une ou sur l'autre forme, le tétraèdre régulier conduit à un nouveau tétraèdre, l'hexaèdre régulier à un octaèdre régulier, et, réciproquement; le dodécaèdre régulier à un icosaèdre régulier, et réciproquement; ce qui justifie la dénomination de *conjugués* donnée à ces polyèdres (907).

PROBLÈME.

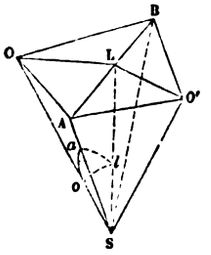
911. *Un polyèdre régulier convexe étant donné, trouver : 1° l'inclinaison de deux faces adjacentes; 2° les rayons des sphères inscrite et circonscrite.*

1° Soient (*fig.* 499) S le centre de la sphère inscrite ou circonscrite, AB le côté commun aux deux faces adjacentes dont les centres sont O et O', L son milieu : l'angle OLO' mesure l'inclinaison cherchée I.

AB étant perpendiculaire au plan OLO', les plans OLO' et ASB sont perpendiculaires. Par suite, si du point S comme centre nous décrivons une

sphère, sa rencontre avec l'angle trièdre SAOL déterminera un triangle sphérique *aol*, rectangle en *l*.

Fig. 499.



Soient, dans le polyèdre considéré, n le nombre de côtés de chaque face, m le nombre d'arêtes de chaque angle polyèdre. On aura évidemment

$$\text{angle } aol = \text{angle AOL} = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n},$$

$$\text{angle } oal = \text{angle OAL} = \frac{2\pi}{2m} = \frac{\pi}{m}.$$

Le triangle sphérique rectangle *aol* donne d'ailleurs

$$\cos oal = \cos ol . \sin aol.$$

Mais

$$\cos ol = \cos \text{OSL} = \sin \text{OLS} = \sin \frac{1}{2} \text{I}.$$

On a donc la formule générale

$$\sin \frac{1}{2} \text{I} = \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{n}}.$$

En l'appliquant aux différents polyèdres réguliers convexes, on trouve pour l'inclinaison I les valeurs suivantes :

Tétraèdre régulier.....	70°31′43″,6
Hexaèdre régulier.....	90°
Octaèdre régulier.....	109°28′16″,4
Dodécaèdre régulier.....	116°35′54″,2
Icosaèdre régulier.....	138°11′22″,75

Les valeurs indiquées sont exactes pour l'hexaèdre et l'icosaèdre, ap-

prochées pour les trois autres polyèdres. Les inclinaisons des faces du tétraèdre et de l'octaèdre régulier sont supplémentaires l'une de l'autre.

2° Soient a le côté du polygone donné, r son apothème, R son rayon. Le triangle OLA donne

$$OL = AL \cot AOL = \frac{1}{2} a \cot \frac{\pi}{n}.$$

Le triangle rectangle SOL donne à son tour

$$SO = OL \operatorname{tang} OLS,$$

c'est-à-dire

$$r = \frac{1}{2} a \cot \frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \frac{1}{2} I. \tag{1}$$

Le triangle sphérique aol donne enfin

$$\cos oa = \cot aol . \cot oal.$$

Or

$$\cos oa = \cos OSA = \frac{SO}{SA}.$$

On a donc

$$\frac{SA}{SO} = \operatorname{tang} aol . \operatorname{tang} oal$$

ou

$$\frac{R}{r} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \frac{\pi}{m}.$$

On en déduit

$$R = \frac{1}{2} a \operatorname{tang} \frac{\pi}{m} \operatorname{tang} \frac{1}{2} I. \tag{2}$$

En appliquant les formules (1) et (2) aux différents polyèdres réguliers convexes, on obtient les valeurs suivantes :

Tétraèdre régulier.....	$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$,	$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.
Hexaèdre régulier.....	$r = \frac{a}{2}$,	$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Octaèdre régulier.....	$r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$,	$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
Dodécaèdre régulier.....	$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25 - 11\sqrt{5}}{10}}$,	$R = \frac{a(\sqrt{3} + \sqrt{15})}{4}$.
Icosaèdre régulier.....	$r = \frac{a\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{12}$,	$R = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$.

SCOLIE.

912. Pour deux polyèdres *conjugués*, les nombres n et m ne faisant que s'échanger (907), le rapport $\frac{R}{r}$ demeure constant. Donc, si R est le même pour ces deux polyèdres, r est aussi le même. En d'autres termes, si les deux polyèdres conjugués sont inscrits à une même sphère, ils sont aussi circonscrits à une même sphère, et réciproquement.

POLYÈDRES RÉGULIERS D'ESPÈCE SUPÉRIEURE.

913. Nous avons déjà parlé (270) des nouveaux polygones réguliers découverts par M. Poinsot, et nous savons qu'*il y a autant de polygones réguliers différents de m côtés que de nombres premiers à m depuis* 1 *jusqu'à* $\frac{1}{2}(m-1)$

Si p est l'un quelconque de ces nombres, on joint les m points de division de la circonférence de p en p, et l'on revient au point de départ après avoir fait un nombre de tours égal à p.

914. Les polygones étoilés qu'on obtient en suivant la marche indiquée « ont leurs m côtés et leurs m angles bien nets et bien distincts : » ce sont les angles qui ont lieu aux bouts réunis deux à deux des » m droites dont la chaîne continue achève complétement la figure. Les » autres angles, formés par les côtés non contigus qui se traversent,..., » ne doivent pas être comptés; pas plus que, dans les polygones ordi- » naires, on ne compte les angles qui auraient lieu à la rencontre des » côtés non contigus suffisamment prolongés. Sous ce point de vue, la » différence de ces polygones étoilés aux polygones ordinaires est que, » dans ceux-ci, un côté quelconque aurait besoin d'être prolongé pour » être rencontré par les côtés non contigus aussi prolongés, au lieu que, » dans les autres, les côtés mêmes peuvent être actuellement traversés » par les autres côtés.... Mais toutes ces distinctions sont plus appa- » rentes que réelles, et disparaissent tout à fait dans l'analyse où ces » polygones se présentent d'une manière inséparable. Si l'on cherche, en » effet, le côté d'un polygone régulier, on trouve une équation de degré » supérieur, dont toutes les racines sont réelles, et qui donne à la fois les » différents côtés de toutes les espèces de polygones réguliers de l'ordre » que l'on considère. » POINSOT, *Journal de l'École Polytechnique*, t. IV, p. 25).

915. *L'ordre m d'un polygone* est marqué par le nombre m de ses côtés ou de ses sommets; son *espèce* varie en raison du nombre premier

à m qui lui a donné naissance. Or, si ce nombre est p, il faut décrire p fois la circonférence (270) pour décrire le polygone lui-même. L'espèce d'un polygone étoilé est donc le nombre de circonférences parcourues en suivant tous ses sommets, ou le nombre de fois que les projections de ses côtés sur la circonférence circonscrite recouvrent cette circonférence. Si l'espèce d'un polygone étoilé est p, la somme de ses angles au centre vaut p fois quatre angles droits.

916. *L'ordre d'un angle polyèdre* est marqué par le nombre de ses faces. Il est d'ailleurs de même *espèce* que le polygone qui résulte de sa section par un plan. Si l'on considère une pyramide régulière ayant pour base un pentagone étoilé ou de seconde espèce, l'angle polyèdre au sommet est de seconde espèce, et les angles plans qui le forment, projetés sur la base de la pyramide, remplissent deux fois les quatre angles droits.

917. « ... En conservant toujours la définition générale des polyèdres » réguliers,..., on voit la possibilité de construire de nouveaux polyèdres » réguliers, non-seulement avec les nouveaux polygones (réguliers),..., » mais même avec les polygones réguliers ordinaires; et, pour bien entendre cela, il faut commencer par distinguer nettement dans un polyèdre ses faces, ses arêtes et ses sommets.

» Comme un même polyèdre peut paraître également construit sous » tels ou tels polygones, on prend pour les *faces* les plans qui, en plus » petit nombre, achèvent complétement ce même polyèdre.....

» Pour les *arêtes*, ce sont les côtés mêmes qui terminent les faces du » polyèdre, et par lesquels ces faces se joignent deux à deux, de sorte » que chaque arête sert de côté à deux faces adjacentes, et qu'ainsi le » nombre des arêtes est (toujours) égal à la moitié du nombre des côtés » de toutes les faces.

» C'est à ces seules droites, comme faites, que se trouvent les angles » dièdres du polyèdre; les autres angles que pourraient former les faces » en se traversant n'en font point partie, et de même c'est aux seuls » points où se réunissent les extrémités des arêtes que sont les *sommets* » et les angles polyèdres du polyèdre.

» Cela posé,... on peut construire de nouveaux polyèdres parfaitement » réguliers...: ils ont toutes leurs faces égales et régulières, également » inclinées deux à deux, et assemblées en même nombre autour de chaque » sommet. Ils peuvent être inscrits et circonscrits à la sphère (1).... La

(1) Car la démonstration du n° 908 est fondée seulement sur l'égale inclinaison des faces égales et régulières du polyèdre et sur l'identité de position du centre de chacune d'elles par rapport à ses intersections avec les faces adjacentes

» différence essentielle de ces polyèdres aux polyèdres (réguliers) ordi-
» naires est que, dans ceux-ci, les faces étant projetées par des rayons
» sur la sphère inscrite ou circonscrite, les polygones (sphériques) cor-
» respondants recouvrent une seule fois la sphère; au lieu que, dans les
» autres, ces polygones la recouvrent exactement plusieurs fois. »
(POINSOT, *loc. cit.*). Ce dernier point exige une explication : soient α_1, α_2, ..., α_n et ω les projections sur la sphère des sommets successifs et du centre du polygone régulier convexe ou étoilé qui constitue l'une des faces du polyèdre; ce que nous entendons par *aire sphérique recouverte par la projection de cette face*, c'est la somme des aires des triangles sphériques isocèles successifs $\omega\alpha_1\alpha_2$, $\omega\alpha_2\alpha_3$, ..., $\omega\alpha_n\alpha_1$.

918. On nomme *ordre* d'un polyèdre régulier le nombre de ses faces, et *espèce* d'un polyèdre régulier le nombre exact de fois que sa projection sur la sphère (c'est-à-dire la somme des aires sphériques recouvertes par les projections de ses diverses faces) recouvre cette sphère.

919. Il est facile de voir qu'en prolongeant les côtés d'un polygone régulier jusqu'à leur rencontre on forme un polygone étoilé de même ordre, qui a pour noyau le polygone primitif. On peut faire provenir d'une manière analogue les polyèdres réguliers d'espèce supérieure des polyèdres réguliers ordinaires; en prolongeant les arêtes ou les faces d'un des polyèdres réguliers déjà connus, on obtient, sauf les cas d'impossibilité, un nouveau polyèdre régulier qui a pour noyau le polyèdre régulier ordinaire qui a servi de point de départ. C'est ce qu'a établi M. Cauchy (*Journal de l'École Polytechnique*, t. IX, p. 68).

Plus tard, M. J. Bertrand (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XLVI) a rattaché les nouveaux polyèdres aux polyèdres réguliers déjà connus, par une démonstration du même genre, mais beaucoup plus simple : c'est celle que nous allons exposer.

920. Nous regarderons d'abord comme évident que, *des points quelconques étant donnés dans l'espace, on peut toujours trouver un polyèdre* CONVEXE, *dont les sommets soient pris parmi les points donnés, et qui contienne tous les autres points dans son intérieur, à moins qu'il n'ait précisément pour sommets tous les points donnés eux-mêmes.*

Nous savons d'ailleurs (693) qu'il ne peut exister de polyèdre convexe dont chaque sommet soit la réunion de plus de cinq faces.

THÉORÈME.

921. ***Étant donné un polyèdre régulier*** A, *d'espèce quelconque, il existe toujours un polyèdre régulier convexe* X *qui a les mêmes sommets que le polyèdre* A.

Les sommets du polyèdre régulier quelconque A étant sur une même

sphère (908), tout polyèdre convexe dont les sommets sont pris parmi ceux de A ne saurait contenir les autres dans son intérieur. Il existe donc (920) un polyèdre convexe X dont tous les sommets se confondent avec ceux du polyèdre A. Il reste à prouver que ce polyèdre convexe X est régulier.

Désignons par P la figure formée par l'ensemble des deux polyèdres considérés, et par Q une autre figure identique à la première. Puisque le polyèdre A est régulier, la coïncidence des deux figures pourra être obtenue en plaçant un sommet quelconque de Q sur un sommet déterminé de P, ce qui entraîne l'égalité de tous les angles polyèdres du polyèdre convexe X.

De plus, deux sommets étant l'un sur l'autre, la coïncidence des deux polyèdres A qui font partie de P et de Q, et par suite celles des figures totales, pourra être obtenue au moins de trois manières différentes : en les sommets considérés appartiennent à des angles au moins trièdres et sur l'une des faces du premier angle, on peut placer une face quelconque du second. Les angles polyèdres correspondants des deux polyèdres convexes X sont donc, à leur tour, non-seulement égaux, mais susceptibles de coïncider aussi de trois manières différentes au moins; et, comme ces angles sont trièdres, tétraèdres ou pentaèdres (695), ils ont alors nécessairement toutes leurs faces égales et également inclinées.

Les faces des deux polyèdres X sont donc des polygones équiangles et également inclinés, dont la coïncidence peut être établie en plaçant un sommet arbitraire de Q sur un sommet désigné de P; en d'autres termes, ces faces sont des polygones réguliers égaux. Le polyèdre X, ayant pour faces des polygones réguliers égaux et pour angles des angles polyèdres égaux, est régulier.

Il convient de remarquer que l'ordre des angles polyèdres est le même pour le polyèdre A et pour le polyèdre X. On le voit sans peine en se fondant sur ce que cet ordre ne peut être que 3, 4 ou 5.

THÉORÈME.

922. *Il n'existe que quatre polyèdres réguliers d'espèces supérieures.*

« En vertu du théorème précédent, pour obtenir les polyèdres réguliers d'espèces supérieures, il faut évidemment prendre les polyèdres réguliers convexes (905), et procéder de la manière suivante : choisir un sommet sur l'un de ces polyèdres, et chercher s'il existe d'autres sommets qui, réunis à celui-là, puissent former un polygone régulier. » (J. BERTRAND, *loc. cit.*) Ce polygone est alors une face possible d'un polyèdre d'espèce supérieure ayant mêmes sommets que le polyèdre convexe proposé. Si le polyèdre d'espèce supérieure existe, le nombre des polygones égaux partant alors d'un même sommet est le

nombre de faces de son angle polyèdre; mais, pour qu'il en soit ainsi, ces polygones égaux doivent pouvoir former un angle polyèdre.

« Il est clair que cette construction appliquée au tétraèdre ne donne rien.

» Chaque sommet de l'octaèdre appartient à deux carrés, lesquels ne » peuvent évidemment pas former les faces d'un polyèdre.

» Chaque sommet du cube peut former, avec deux autres sommets con- » venablement choisis, un triangle équilatéral, et cela de trois manières » différentes; mais ces trois triangles appartiennent à un tétraèdre régulier.

» Chaque sommet du dodécaèdre régulier peut, de trois manières dif- » férentes, former des triangles équilatéraux avec des sommets apparte- » nant à deux des faces qui s'y réunissent; mais ces triangles ne feront » pas un angle polyèdre, deux d'entre eux n'ayant jamais d'arête commune.

» Chaque sommet du dodécaèdre régulier peut également être consi- » déré comme le sommet de six triangles équilatéraux dont les autres » sommets appartiennent à des faces contiguës à celles qui contiennent » le sommet donné. Mais ces six triangles équilatéraux sont les faces de » deux tétraèdres réguliers.

» Chaque sommet du dodécaèdre est enfin le sommet commun de trois » pentagones réguliers dont les quatre autres sommets appartiennent au » même polyèdre. Ces trois pentagones ne forment pas les faces d'un » angle trièdre, parce que deux d'entre eux n'ont pas d'arête commune; » mais les pentagones étoilés qui ont les mêmes sommets forment un » angle trièdre, et leur ensemble, pour tout le polyèdre, forme le dodé- » caèdre régulier (de septième espèce).

» Chaque sommet de l'icosaèdre est le sommet commun de cinq trian- » gles équilatéraux ayant pour côtés les droites les plus courtes que l'on » puisse mener entre les sommets, après celles qui forment les côtés des » faces. Ces triangles forment l'icosaèdre de septième espèce.

» Chaque sommet de l'icosaèdre peut être considéré comme le sommet » commun de cinq pentagones réguliers de première espèce, dont les » quatre autres sommets appartiennent également à l'icosaèdre; ces pen- » tagones sont les faces du dodécaèdre de troisième espèce (à faces con- » vexes). Enfin les mêmes sommets peuvent être considérés comme » appartenant à des pentagones étoilés qui forment le dodécaèdre (de » troisième espèce, à faces étoilées).

» Il n'y a donc en tout que quatre polyèdres étoilés, qui sont précisé- » ment ceux que M. Poinsot a découverts. » (J. BERTRAND, *loc. cit.*)

Nous croyons devoir ajouter ici le raisonnement suivant, dû à M. Kœnigs, pour prouver que le dodécaèdre ne fournit qu'un polyèdre étoilé et que l'icosaèdre n'en donne que trois.

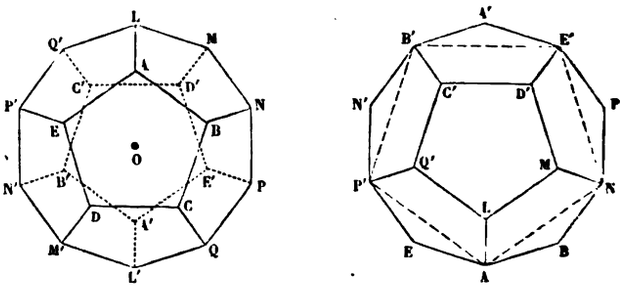
D'après ce qui précède le dodécaèdre ne peut donner que des polyèdres étoilés à sommets trièdres.

Or, parmi les plans passant par A (*fig.* 499 *bis*), le plan (AL, A'L') déterminé par les deux arêtes AL, A'L' joignant des couples de points diamétralement opposés A et A', L et L', est un plan de symétrie du dodécaèdre; et, il y a en chaque sommet A de ce corps trois plans de symétrie tels que le précédent.

Un plan de symétrie du *polyèdre primitif* étant un plan de symétrie du *polyèdre dérivé*, nous allons chercher à former au sommet A un trièdre admettant le plan (AL, A'L') pour plan de symétrie et ayant par suite une arête dans ce plan, tandis que la face opposée est perpendiculaire à ce plan.

Pour cela, nous ferons tourner un demi-plan autour d'une droite menée par A perpendiculairement au plan de symétrie; et, en considérant les positions du plan contenant des sommets du polyèdre primitif, nous chercherons à former avec ces sommets des polygones réguliers pouvant être pris pour faces d'un polyèdre dérivé.

Fig. 499 *bis*.



Le plan est supposé tourner vers l'arrière de la figure (1). Voici le tableau de ses positions successives :

Première position. — Le plan contient, outre A, le sommet L seul.

Deuxième position. — Le plan est AMQ'. Le triangle AMQ' est équilatéral; les deux autres sont AP'D, ACN; ils n'ont pas d'arête commune.

Troisième position. — Le plan est AC'D'. Le triangle AC'D' n'est pas équilatéral.

Quatrième position. — Le plan est AP'N; il contient aussi B' et E', car les arêtes LA, Q'P', C'B', D'E', MN sont également inclinées sur la face LQ'C'D'M. Les sommets A, N, E', B', P' forment un pentagone semblable au pentagone qui forme la face du dodécaèdre primitif. Les trois penta-

(1) L, N, Q, M', P' sont dans un même plan; L', N', Q', M, P sont dans un autre; aucun de ces plans ne contient le centre O qui est dans un plan parallèle intermédiaire.

gones convexes formés de la sorte autour de A ont deux à deux en commun deux sommets non consécutifs ; ils ne peuvent pas former un angle polyèdre ; mais, par la même raison, les pentagones étoilés ayant les mêmes sommets ont deux à deux une arête commune et donnent le *dodécaèdre étoilé* (de septième espèce).

Cinquième position. — Le plan est AN'P. Le triangle AN'P est isocèle, mais on peut démontrer que N'P est plus grand que AP.

Sixième position. — Le plan est AM'Q. Le triangle AM'Q n'est pas équilatéral, car M'Q est égal à AD, lequel est inférieur à AM'.

Septième position. — Le plan est ABCDE ; c'est la face même du dodécaèdre primitif.

A partir de là, le demi-plan, en achevant sa rotation, ne rencontre plus aucun sommet.

Le dodécaèdre ne peut donc fournir qu'un polyèdre étoilé.

Nous laissons au lecteur le soin d'appliquer le même raisonnement à l'icosaèdre ; la chose est encore plus simple, et l'on reconnaît de la sorte que l'icosaèdre ne donne que trois polyèdres étoilés.

PROBLÈME.

923. *Trouver l'espèce d'un polyèdre régulier,*

La relation d'Euler

$$S + F = A + 2, \tag{1}$$

démontrée au n° 688, ne s'applique pas seulement aux polyèdres convexes ; elle subsiste sans modification pour tout polyèdre jouissant de cette propriété qu'il existe, dans leur intérieur, un point tel que chaque demi-droite issue de ce point rencontre la surface en un point, mais en un seul. C'est ce que montre clairement la démonstration suivante que l'on peut substituer à celle du n° 688.

Imaginons une sphère ayant pour centre le point en question et, en considérant ce point comme centre de projection, projetons le polyèdre sur la sphère. A chaque face du polyèdre répondra un polygone sphérique ayant le même nombre n de côtés et dont l'aire aura (850) pour expression $s - 2n + 4$, s désignant la somme des angles de ce polygone sphérique. La somme des aires de tous les polygones sphériques ainsi formés, c'est-à-dire l'aire de la sphère, sera donc représentée par $\Sigma s - 2\Sigma n + 4F$ et, comme dans le système d'unités adopté (813) l'aire de la sphère est égale à 8, on aura la relation

$$\Sigma s - 2\Sigma n + 4F = 8. \tag{2}$$

Or, d'une part, la somme des angles sphériques autour de la projection de chaque sommet du polyèdre étant égale à 4, on a $\Sigma s = 4S$. D'autre

part, la projection de chaque arête du polyèdre formant un côté appartenant à deux polygones sphériques, on a $\Sigma n = 2A$. La relation (2) devient donc $4S - 4A + 4F = 8$, c'est-à-dire la relation (1).

Cette démonstration offre d'ailleurs l'avantage de montrer la route à suivre pour modifier la formule d'Euler de manière à la rendre applicable aux polyèdres réguliers étoilés. Il faut alors tenir compte à la fois de l'espèce du polyèdre considéré (918), de l'espèce de ses faces (915) supposées toutes de même espèce, et de celle de ses angles polyèdres (916) supposés tous de même espèce. A cet effet, projetons le polyèdre donné sur la sphère inscrite ou circonscrite, en prenant pour centre de projection le centre de cette sphère (917).

Soient n le nombre des côtés de l'une des faces du polyèdre, φ le nombre qui en marque l'espèce, a l'aire sphérique que sa projection recouvre (917), s la somme des angles de ce polygone sphérique. Décomposons-le en triangles en joignant à ses sommets, par des arcs de grands cercles, la projection du centre de la face considérée. L'aire de l'un de ces triangles, ayant α pour somme de ses angles, sera, en prenant pour unités l'angle droit et le triangle trirectangle (847), $\alpha - 2$. L'aire a qui contient n de ces triangles, sera $a = \Sigma\alpha - 2n$. Or $\Sigma\alpha$, c'est la somme des angles des n triangles ou la somme s des angles du polygone augmentée de la somme des angles au sommet de ces mêmes triangles, somme qui est égale à 4φ, puisque l'espèce de la face projetée est φ (916). Il vient donc

$$a = s + 4\varphi - 2n.$$

Soit E l'espèce du polyèdre ou le nombre exact de fois que sa projection recouvre la sphère dont l'aire est ici représentée par 8 (813); nous aurons $Fa = 8E$ en désignant par F le nombre des faces.

On a d'ailleurs $Fn = 2A$. A étant le nombre des arêtes du polyèdre. Quant à Fs, elle représente la somme des angles de tous les polygones sphériques obtenus. Mais la somme des angles réunis autour de chacun de leurs sommets, projection de toutes les faces de l'angle polyèdre correspondant vaut σ fois quatre angles droits, σ marquant l'espèce des angles polyèdres (916). On aura donc, s'il y a S sommets,

$$Fs = 4\sigma S,$$

et en substituant les valeurs de a, n, s dans la relation ci-dessus, il vient

$$A + 2E = \varphi.E + \sigma.S. \qquad (1)$$

Si l'on fait dans cette formule $E = \varphi = \sigma = 1$, on retrouve la formule d'Euler. Au lieu de la formule que nous venons d'obtenir, Poinsot (Mémoire cité) trouve

$$A + 2E = F + \sigma S,$$

parce qu'il ne tient pas compte de l'espèce de la face du polyèdre.

924. *Dodécaèdre régulier de septième espèce* (POINSOT, quatrième espèce).

On l'obtient à l'aide de pentagones étoilés ou de seconde espèce, formant des angles trièdres de première espèce autour de chaque sommet d'un dodécaèdre régulier ordinaire (922). Ce nouveau polyèdre (*fig.* 500)

Fig. 500.

a donc vingt sommets (907). En désignant par m le nombre des arêtes d'un de ses angles polyèdres et par n le nombre des côtés d'une de ses faces, on a (695)

$$2A = mS \quad \text{et} \quad 2A = nF;$$

d'où l'on déduit (en faisant $S = 20$, $m = 3$, $n = 5$)

$$A = 30 \quad \text{et} \quad F = 12.$$

La formule (I) donne ensuite, en faisant $\sigma = 1$, $\varphi = 2$, $A = 30$, $F = 12$, $S = 20$,

$$2E = 24 + 20 - 30 \quad \text{ou} \quad E = 7.$$

Ce nouveau dodécaèdre est donc de septième espèce.

925. *Icosaèdre régulier de septième espèce.*

On l'obtient (922) à l'aide de triangles équilatéraux formant des angles

pentaèdres de seconde espèce autour de chaque sommet d'un icosaèdre régulier ordinaire. Ce nouveau polyèdre (*fig.* 501) a donc 12 sommets (9).

Fig. 501.

En faisant $S = 12$, $m = 5$, $n = 3$, dans les équations $2A = mS$ et $2A = nF$, on trouve

$$A = 30 \quad \text{et} \quad F = 20.$$

La formule (I) donne ensuite, en y faisant $\varphi = 1$ et $\sigma = 2$,

$$2E = 20 + 24 - 30 \quad \text{ou} \quad E = 7.$$

Ce nouvel icosaèdre est donc de septième espèce.

926. *Dodécaèdre régulier de troisième espèce, à faces convexes.*

On l'obtient (922) à l'aide de pentagones réguliers ordinaires formant des angles pentaèdres de seconde espèce autour de chaque sommet d'un icosaèdre régulier ordinaire. Ce nouveau polyèdre ayant douze sommets, les équations $2A = mS$ et $2A = nF$ donnent (pour $m = 5$ et $n = 5$)

$$A = 30 \quad \text{et} \quad F = 12.$$

La formule (I) donne ensuite, pour $\varphi = 1$ et $\sigma = 2$,

$$2E = 12 + 24 - 30 \quad \text{ou} \quad E = 3.$$

Ce nouveau dodécaèdre à faces convexes (*fig.* 502) est donc de troisième espèce.

Fig. 502.

Fig. 503.

927. ***Dodécaèdre régulier de troisième espèce, à faces étoilées*** (POINSOT, deuxième espèce).

On l'obtient (922) à l'aide de pentagones étoilés formant des angles pentaèdres de première espèce autour de chaque sommet d'un icosaèdre régulier ordinaire. Ce nouveau polyèdre a donc douze sommets (907). Les équations $2A = mS$ et $2A = nF$ donnent alors, pour $m = 5$ et $n = 5$,

$$A = 30 \quad \text{et} \quad F = 12.$$

La formule (I) donne ensuite, pour $\varphi = 2$ et $\sigma = 1$,

$$2E = 24 + 12 - 30 \quad \text{ou} \quad E = 3.$$

Ce nouveau dodécaèdre à faces étoilées (*fig.* 503) est donc aussi de troisième espèce.

928. Voici le tableau des éléments des quatre nouveaux polyèdres réguliers.

	F	n	φ	S	m	σ	A	E
Dodécaèdre régulier de septième espèce	12	5	2	20	3	1	30	7
Icosaèdre régulier de septième espèce	20	3	1	12	5	2	30	7
Dodécaèdre régulier de troisième espèce, à faces convexes	12	5	1	12	5	2	30	3
Dodécaèdre régulier de troisième espèce, à faces étoilées	12	5	2	12	5	1	30	3

On voit que les nouveaux polyèdres sont *conjugués* deux à deux, comme les polyèdres réguliers ordinaires (907).

929. Pour familiariser davantage le lecteur avec les nouveaux polyèdres, nous terminerons en indiquant aussi leur mode de construction d'après Cauchy (919), parce qu'il fait peut-être mieux image que celui qui a été adopté plus haut (922).

« En prolongeant dans le dodécaèdre ordinaire les arêtes qui forment » les côtés des douze pentagones, on obtient le dodécaèdre étoilé (de troi- » sième espèce).

» Si, dans le dodécaèdre ordinaire, on prolonge le plan qui contient » chaque face jusqu'à la simple rencontre des plans des cinq faces qui » entourent la face opposée, on obtiendra le dodécaèdre de troisième » espèce, compris, comme le dodécaèdre ordinaire, sous des pentagones » de première espèce.

» Enfin, si l'on prolonge les arêtes qui, dans ce dodécaèdre de troi-
» sième espèce, forment les côtés des douze pentagones, on obtiendra le
» dodécaèdre de septième espèce.

» On obtiendra l'icosaèdre de septième espèce, en prolongeant chaque
» face de l'icosaèdre ordinaire jusqu'à la rencontre des plans des trois
» triangles qui entourent la face opposée à celle que l'on considère. »

IV. — Homothétie et homologie dans l'espace.

FIGURES HOMOTHÉTIQUES DANS L'ESPACE.

930. Étant donné un système de points A, B, C, ..., situés d'une manière quelconque dans l'espace (*fig.* 225 et 226), si, sur les rayons SA, SB, SC, ..., issus d'un point S pris à volonté, on prend à partir de ce point des segments SA', SB', SC', ..., tels que

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \ldots = k,$$

k étant un nombre quelconque, on dit que le nouveau système de points A', B', C', ... est *homothétique* au système primitif ABC.... Suivant que le *rapport k d'homothétie* est positif ou négatif, les points homologues tels que A et A' sont situés d'un même côté ou de côtés différents par rapport au *centre* S *d'homothétie*, et les deux systèmes ABC..., A'B'C'... sont dits *homothétiques directs* ou *homothétiques inverses*.

La définition de l'homothétie est donc la même pour les figures de l'espace et pour les figures planes (354). Toutefois, il n'est plus vrai de dire ici, comme dans le plan, que l'homothétie inverse donne, abstraction faite de la position, les mêmes figures que l'homothétie directe; F étant une figure quelconque de l'espace, si l'on construit, à l'aide d'un centre S arbitraire, la figure homothétique directe F' suivant le rapport k et la figure homothétique inverse F_1, suivant le rapport $-k$, les deux figures F' et F_1 seront *symétriques* par rapport au point S (658). Or on ne peut plus faire coïncider deux pareilles figures (673), tandis que dans le plan une rotation de 180 degrés autour du point S entraînait la coïncidence (354).

931. *La figure homothétique d'une sphère est une sphère;* la démonstration est la même que celle du n° 355. Par suite, comme un cercle peut toujours être considéré comme l'intersection de deux sphères, *la figure homothétique d'une circonférence par rapport à un point quelconque de l'espace est une circonférence.*

932. Le théorème du n° 356 et sa démonstration subsistent. *La figure homothétique d'une droite est une droite parallèle à la première, et l'angle de deux droites est égal à celui de leurs droites homologues* (357, 358).

La figure homothétique d'un plan est un plan parallèle au premier. car, si l'on considère dans le plan donné une droite qui tourne autour d'un point A, dans chacune de ses positions cette droite aura pour homothétique une droite parallèle passant par un point fixe A' homothétique de A. Il résulte de là : 1° qu'*un plan qui passe par le centre d'homothétie est à lui-même son homothétique* ; 2° que *l'angle de deux plans est égal à l'angle de leurs homothétiques.*

Les tangentes en deux points homologues de deux courbes homothétiques sont parallèles, comme limites de sécantes parallèles. Par suite (88), *les plans tangents en deux points homologues de deux surfaces homothétiques sont parallèles.*

933. *Deux systèmes sont homothétiques, s'il existe dans l'espace deux points* O *et* O' *tels, que les droites qui joignent le point* O *aux divers points du premier système, et les droites qui joignent le point* O' *aux divers points du second système, soient parallèles et dans un même rapport* : la démonstration est la même qu'au n° 360.

Il résulte de là que *deux sphères quelconques sont à la fois homothétiques directes et homothétiques inverses* (362) ; les deux centres d'homothétie divisent harmoniquement la ligne des centres des deux sphères : ces centres sont en outre les sommets des deux cônes qu'on peut circonscrire aux deux sphères. Lorsque les deux sphères sont tangentes, leur point de contact est un centre d'homothétie, *directe* si le contact est *intérieur*, *inverse* si le contact est *extérieur*.

934. Le théorème du n° 363 et sa démonstration subsistent. Ainsi, *deux systèmes homothétiques à un troisième sont homothétiques entre eux, et les trois centres d'homothétie sont sur une même ligne droite,* qu'on nomme *axe d'homothétie des trois systèmes.*

Trois sphères considérées deux à deux ont trois centres d'homothétie directe et trois centres d'homothétie inverse (933). Elles ont donc quatre axes d'homothétie : un *axe d'homothétie directe* qui contient les trois centres d'homothétie directe, et trois *axes d'homothétie inverse* qui renferment chacun deux centres d'homothétie inverse et le centre direct qui répond au troisième centre inverse. Ces *quatre axes d'homothétie* sont ceux des trois cercles (366) que l'on obtient en coupant les trois sphères par le plan qui passe par leurs centres.

935. *Lorsque quatre systèmes* P, P', P'', P''' *sont homothétiques deux à deux, leurs six centres d'homothétie sont situés dans un même plan.*

En effet, soient respectivement O_1, O_2, O_3, les centres d'homothétie de P et P', de P et P'', de P et P''' ; le plan $O_1O_2O_3$ est à lui-même son homologue dans les systèmes P et P', puisqu'il contient leur centre O_1 ; il est

aussi à lui-même son homologue dans les systèmes P et P″, puisqu'il contient leur centre O_2. Donc ce même plan est encore à lui-même son homologue dans les systèmes P′ et P″ (934); et, par suite, il contient leur centre d'homothétie. On prouverait de même que ce plan passe par les centres d'homothétie de P′ et P‴, et de P″ et P‴.

Ces six centres d'homothétie sont les sommets d'un quadrilatère complet dont les côtés sont les quatre axes d'homothétie des quatre systèmes proposés pris trois à trois. Le plan de ce quadrilatère reçoit le nom de *plan d'homothétie* des quatre systèmes P, P′, P″, P‴.

936. Considérons en particulier le *cas de quatre sphères*. Comme deux sphères sont à la fois homothétiques directes et homothétiques inverses, on aura *douze centres d'homothétie*, dont *six directs* et *six inverses*. Il est aisé de voir qu'il y a *huit plans d'homothétie*. En effet, imaginons le tétraèdre dont les sommets sont les centres des quatre sphères; sur chaque face de ce tétraèdre, il y a six centres d'homothétie, trois directs et trois inverses (934). Considérons l'un O des six centres qui sont sur l'une des faces; ce point O appartient à deux droites A et B dont chacune passe par deux autres centres de la même face. D'ailleurs, ce même point O est commun à une autre face du tétraèdre, et, par suite, il appartient également à deux autres droites C et D situées sur cette seconde face. En combinant les deux droites A et B de la première face avec les deux droites C et D de la seconde, on obtient quatre plans, AOC, AOD, BOC, BOD, dont chacun passant par cinq centres d'homothétie renferme nécessairement le sixième centre correspondant. Ainsi, par chaque centre O de la première face, passent quatre plans d'homothétie; mais chacun de ces plans est commun à trois centres de cette même face. Donc le nombre total des plans d'homothétie est égal à huit.

937. Deux figures de l'espace sont *semblables* lorsque, par un déplacement convenable, on peut amener la seconde sur l'une des homothétiques directes de la première. Or, d'après le n° 930, pour avoir tous les systèmes homothétiques à un système donné, il n'est pas nécessaire de faire varier le centre; il suffit, en prenant un centre arbitraire, de faire varier k de o à ∞ (364). Donc on obtiendra toutes les figures semblables à une figure donnée, en construisant, avec un centre pris à volonté, les surfaces homothétiques qui répondent à toutes les valeurs du rapport k, depuis zéro jusqu'à l'infini.

Ainsi *deux sphères quelconques sont semblables* (931).

La seule figure semblable à une surface conique est cette surface conique elle-même; car, si l'on prend le sommet O pour centre d'homothétie, l'homologue A′ d'un point quelconque A de la surface conique proposée est situé sur la génératrice OA.

Enfin *deux surfaces cylindriques sont homothétiques lorsque leurs génératrices sont parallèles, et leurs directrices deux courbes homothétiques;* car la figure homothétique d'une droite est une droite parallèle. Par suite, *les sections par un même plan de deux cylindres homothétiques sont deux courbes homothétiques* dont le centre est à la rencontre du plan sécant et de la parallèle aux génératrices menée par le centre d'homothétie des deux cylindres.

FIGURES HOMOLOGIQUES DANS L'ESPACE.

938. La nouvelle définition donnée au n° 732 pour les figures planes s'étend aux figures de l'espace, lorsqu'on remplace la droite fixe X par un plan fixe.

Ainsi, *étant donnés un point fixe* O *et un plan fixe* Q, si, sur *chaque rayon* Oμ *joignant le point fixe* O *à un point quelconque* μ *du plan* Q, *on prend deux points m et m' tels que le rapport anharmonique* (O$\mu mm'$) *ait une valeur constante* λ, *les points m et m' décrivent deux figures* F *et* F' *qu'on dit* HOMOLOGIQUES.

O est le *centre* d'homologie, Q le *plan* d'homologie, et λ le *coefficient* d'homologie.

Le point O est son propre homologue, et il partage cette propriété avec chacun des points du plan Q.

Au lieu de donner la constante λ, on peut donner un premier couple (a, a') de points homologues. Alors, pour obtenir l'homologue d'un point quelconque m de la première figure F, il suffit de prendre l'intersection m' du rayon Om avec la droite $a'\varepsilon$ qui joint le point a' au point ε, où la droite am rencontre le plan d'homologie. Ce tracé est la généralisation de celui du n° 729 et, d'après les considérations développées au n° 732, il équivaut à la définition donnée ci-dessus.

939. Les sections faites dans les figures F et F' par un plan quelconque R passant par le centre d'homologie O sont évidemment deux figures homologiques planes ayant pour centre d'homologie le point O, pour axe d'homologie l'intersection des plans Q et R, et pour coefficient λ.

D'après cela, à une droite quelconque de la figure F répond, dans la figure F', une droite coupant la première sur le plan d'homologie. Toute droite passant par O est sa propre homologue.

A tout plan P de la figure F répond, dans la figure F', un plan qui rencontre le premier sur le plan d'homologie. En effet, soient Δ l'intersection du plan P et du plan d'homologie Q; a un point fixe du plan P et a' son homologue; l'homologue m' d'un point quelconque m du plan P appartient à la droite homologue de am; or le point α où am rencontre Δ étant son propre homologue, la droite $am\alpha$ a pour homologue $\alpha a'$ et, par

suite, le point m' est dans le plan déterminé par le point a' et la droite Δ. Tout plan passant par le centre d'homologie est son propre homologue. Si un plan est parallèle au plan d'homologie, il en est de même de son homologue ; par suite, si une figure F est située dans un plan parallèle au plan d'homologie, la figure homologue F′ est semblable à la première.

940. Dans deux figures homologiques, le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est égal au rapport anharmonique des quatre points homologues.

Il en est de même pour un faisceau plan de quatre droites et pour le faisceau correspondant ; pour le faisceau de quatre plans passant par une même droite et pour le faisceau formé par les plans homologues.

Le premier principe est évident, d'après la remarque faite en tête du numéro qui précède ; les deux autres s'en déduisent immédiatement.

941. Lorsqu'un point m' de la figure F′ est à l'infini, l'égalité

$$(O\mu mm') = \lambda$$

se réduit à

$$\frac{mO}{m\mu} = \lambda.$$

Donc tous les points à l'infini de la figure F′ ont leurs homologues situés dans un plan U parallèle au plan d'homologie ; ce plan est dit le *plan limite* de la figure F.

On est ainsi conduit à généraliser la notion acquise au n° 588, sur les points à l'infini dans un plan. Puisque tous les points à l'infini dans l'espace ont leurs homologues situés dans un plan, et que la figure homologue d'un plan est un plan, *on doit considérer tous les points à l'infini dans l'espace comme étant situés dans un même plan* qu'on nomme *plan à l'infini ;* ce plan contient les droites à l'infini de tous les plans de l'espace.

Mais revenons aux figures homologiques. La figure F′ a aussi son plan limite V′ qui répond aux points à l'infini de la figure F ; et l'on voit, comme au n° 732, que le rapport des distances du plan limite U au centre O et au plan Q d'homologie est égal à λ, tandis que ce rapport est égal à $\frac{1}{\lambda}$ pour le plan limite V′.

Étant donnés une figure F, son plan limite U, ainsi que le centre O et le plan Q d'homologie, on obtient l'homologue m' d'un point quelconque m de la figure F de la manière suivante : p et q étant les points où une droite menée par m rencontre les plans U et Q, on mène par le point q la parallèle au rayon Op, et l'on prend l'intersection m' de cette droite (homologue de pmq) avec le rayon Om.

942. Pour $\lambda = -1$, l'homologie est dite *harmonique;* les deux plans limites se confondent avec le plan qui est équidistant du centre et du plan d'homologie.

Quand le plan d'homologie est à l'infini, l'homologie devient *homothétie*. Si, de plus, l'homologie est alors harmonique, on est ramené à la *symétrie par rapport à un centre*.

Lorsque le centre d'homologie est à l'infini, l'homologie devient *affinité;* la seconde figure se déduit de la première en dilatant dans un rapport constant ses ordonnées normales ou obliques par rapport au plan d'homologie. Si, de plus, l'homologie est alors harmonique, on est ramené à la *symétrie* (normale ou oblique) *par rapport à un plan*.

943. Nous montrerons plus tard les ressources qu'offre à la Géométrie pure la transformation homologique. Nous nous bornerons à signaler ici une des plus intéressantes applications pratiques de cette théorie; nous voulons parler de la construction des *bas-reliefs,* c'est-à-dire de ces figures qui forment une faible saillie sur le mur d'un édifice et à l'aide desquelles on représente un sujet ou une scène quelconque. Le bas-relief F et la scène F′ qu'il représente sont deux figures homologiques. Soit O l'œil du spectateur qui est en avant du mur, tandis que la figure F est supposée en arrière; désignons par a' le point de F′ qui est le plus voisin du mur, et par P′ le plan mené parallèlement au mur par le point le plus éloigné. On prend le point O pour centre d'homologie, le plan P du mur pour plan homologue de P′, et l'on se donne à volonté, un peu en avant du mur, le point a qu'on veut faire correspondre au point a' et qui sera le point le plus saillant du bas-relief. Ces données, c'est-à-dire le centre d'homologie O, un couple (a, a') de points homologues et un couple (P, P′) de plans homologues, suffisent évidemment pour déterminer la figure F homologue de F′. m' étant un point quelconque de F′ on prend l'intersection b' de la droite $a'm'$ et du plan P′; le rayon Ob' donne, par sa rencontre avec le plan P, l'homologue b de b'; par suite, l'intersection m de ab et du rayon Om' est le point m du bas-relief qui répond au point m' de la figure à représenter. On pourrait aussi commencer par déterminer, à l'aide de ces données, le plan d'homologie, et opérer ensuite à l'aide du plan et du centre d'homologie, et du couple (a, a').

V. — Plan polaire et plan radical.

POLE ET PLAN POLAIRE PAR RAPPORT A LA SPHÈRE.

944. *Un point* O *et une sphère* C *étant situés d'une manière quelconque dans l'espace, si par le point* O *on mène une sécante quelconque* OFE (*fig.* 216 et 217, n° 340), *et qu'on détermine le conjugué harmonique* I *du point* O *par rapport à* EF, *le lieu géométrique du point* I, *lorsque*

la sécante tourne autour du point O, *est un plan* P *perpendiculaire au diamètre* AB *qui passe par le point* O ; car, dans chaque plan mené par OC, le lieu est une droite (340) perpendiculaire au diamètre AB et menée par le point H, conjugué harmonique de O par rapport à ce diamètre.

On dit que le point O est le *pôle* du plan P, et que le plan P est le *plan polaire* du point O par rapport à la sphère C.

Le plan polaire P *d'un point* O *est* évidemment *le lieu des polaires du point* O *par rapport à tous les cercles de la sphère dont les plans passent par* O.

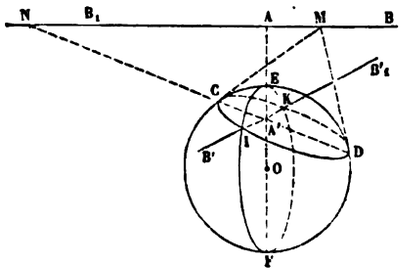
Le rayon de la sphère est moyen proportionnel entre les distances du centre au pôle et au plan polaire. La discussion des positions du pôle et du plan polaire par rapport à la sphère est la même qu'au n° 341. Nous remarquerons seulement que, *lorsque le pôle est extérieur à la sphère, le plan polaire est le plan de la circonférence de contact du cône qui est circonscrit à la sphère et qui a le pôle pour sommet.*

945. *Les plans polaires de tous les points d'un plan passent par le pôle de ce plan ;* et inversement, *les pôles de tous les plans qui passent par un même point sont sur le plan polaire de ce point.* La démonstration du n° 342 subsiste ; seulement, XY (*fig.* 218) représente alors la projection, sur le plan considéré, de la droite CO qui joint un point quelconque O de ce plan au centre C de la sphère.

Il résulte de là que, *si chacun des points d'un plan* P *est pris pour sommet d'un cône circonscrit à la sphère, les plans des cercles de contact passent tous par un même point p, pôle du plan* P ; inversement, *si, suivant chacun des cercles de la sphère dont les plans passent par un même point p, on circonscrit un cône à la sphère, les sommets de ces cônes sont tous dans un même plan* P, *qui est le plan polaire du point p.*

946. Soient une sphère dont le centre est O et une droite quelconque

Fig. 504.



AB (*fig.* 504). Prenons le pôle A' de AB par rapport au grand cercle

ECFD situé dans le plan AOB, et par le point A' élevons la perpendiculaire A'B' à ce plan AOB ; on voit que, réciproquement, la droite AB est la perpendiculaire au plan OA'B' élevée par le pôle A de A'B' par rapport au grand cercle EIFK situé dans le plan OA'B'. Les deux droites AB, A'B' ont reçu, d'après cela, le nom de *droites réciproques* par rapport à la sphère O.

Quand deux droites sont réciproques par rapport à une sphère, chacune d'elles est le lieu des pôles de tous les plans passant par l'autre : ou, ce qui revient au même, *chacune d'elles est l'intersection commune des plans polaires des divers points de l'autre.* En effet, le plan polaire d'un point quelconque M de AB est perpendiculaire au plan FCE, et sa trace sur ce plan est la polaire du point M par rapport au cercle FCE. Cette trace passe donc (342) par le point A' qui est le pôle de AB par rapport au cercle FCE. Par suite, le plan polaire CID du point M renferme la droite A'B'.

Il résulte de là que, *lorsque deux plans sont tangents à la sphère, leur intersection est réciproque de la droite qui unit les deux points de contact.* car ces points de contact sont les pôles des plans tangents.

Remarquons enfin que *la droite* AB *est le lieu des pôles de sa réciproque* A'B' *par rapport à tous les cercles de la sphère dont les plans passent par* A'B'. En effet, A' étant le pôle de la droite AB par rapport au cercle FCE, si N est le point où la droite AB rencontre le diamètre CD d'un cercle quelconque CID conduit par A'B', les points C, A', D, N forment un système harmonique ; donc N est le pôle de A'B' par rapport au cercle CID.

PLAN RADICAL DE DEUX SPHÈRES.

947. Si, par un point M de l'espace, on mène à une sphère O une sécante arbitraire qui rencontre la sphère en A et B, le produit MA.MB a une valeur indépendante de la direction de la sécante. Ce produit constant, qui est positif lorsque le point M est extérieur à la sphère, négatif lorsque le point M est intérieur, et nul lorsque le point M est sur la surface sphérique, prend le nom de *puissance du point* M *par rapport à la sphère* O.

La puissance d'un point par rapport à une sphère est égale, en grandeur et en signe, à l'excès du carré de la distance de ce point au centre sur le carré du rayon (372). *Lorsque le point est extérieur à la sphère, sa puissance est égale au carré de la tangente menée à la sphère par ce point.*

Quand deux sphères se coupent orthogonalement, le carré du rayon de chacune d'elles est égal à la puissance de son centre par rapport à l'autre sphère (383).

948. *Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux sphères est un plan perpendiculaire à la ligne des centres* (373).

Ce plan a reçu le nom de *plan radical* des deux sphères. — *Lorsque deux sphères se coupent, leur plan radical est le plan du cercle commun*; lorsque deux sphères se touchent, leur plan radical est le plan tangent au point commun. — Le plan radical de deux sphères concentriques disparaît à l'infini.

Le plan radical de deux sphères est le lieu des points d'où l'on peut leur mener des tangentes égales (374). *C'est aussi le lieu des centres des sphères qui coupent les deux premières orthogonalement* (383).

949. *Les plans radicaux de trois sphères considérées deux à deux passent par une même droite* (376). Cette droite est la perpendiculaire au plan des centres des trois sphères, élevée par le centre radical des trois grands cercles contenus dans ce plan; elle a reçu le nom d'*axe radical* des trois sphères.

Lorsque les centres des trois sphères sont en ligne droite, l'axe radical se transporte à l'infini : il peut cependant arriver que les trois plans radicaux coïncident, auquel cas les trois sphères ont un plan radical au lieu d'un axe radical.

950. Enfin, les *six plans radicaux de quatre sphères considérées deux à deux passent par un même point*. Car le point où l'axe radical des trois premières sphères rencontre le plan radical de l'une de ces sphères et de la quatrième est d'égale puissance par rapport aux quatre sphères; il est donc commun aux six plans radicaux des sphères considérées deux à deux, et aussi aux quatre *axes radicaux* des sphères considérées trois à trois.

Ce point est dit le *centre radical* des quatre sphères. Il est unique, à moins que les centres des quatre sphères ne soient dans un même plan; dans ce cas, il peut arriver que le centre radical disparaisse à l'infini, ou bien qu'il soit remplacé par un axe radical, ou même par un plan radical si les centres des quatre sphères sont en ligne droite.

951. Les propriétés relatives aux points antihomologues ainsi que leurs démonstrations subsistent pour les sphères :

1° *Le produit des distances de l'un quelconque des deux centres de similitude de deux sphères à deux points antihomologues est constant; deux couples de points antihomologues sont sur une même circonférence, et deux cordes antihomologues se coupent sur le plan radical des deux sphères* (378);

2° *Quand deux sphères sont touchées par une troisième, la droite qui joint les points de contact passe par un centre de similitude de ces*

deux sphères, et la réciproque de cette droite par rapport à la troisième sphère est située dans le plan radical des deux premières. Inversement, *si la droite ab qui joint deux points respectifs a et b de deux sphères* (A) *et* (B) *passe par un centre de similitude de ces deux sphères, la sphère* (ω) *qui touche* (A) *en a et qui passe par le point b touche* (B) *en b.* Et encore, *si la droite ab qui joint deux points respectifs a et b de deux sphères est telle que l'intersection des plans tangents en a et b à ces sphères appartienne à leur plan radical, la sphère* (ω) *qui touche* (A) *en a et qui passe par b touche* (B) *en b* (379).

3° *Si deux sphères* (A) *et* (B) *sont touchées respectivement en a et b par une sphère* (ω) *et en a' et b' par une sphère* (ω'), *de façon que les contacts en b et b' soient semblables ou dissemblables en même temps que les contacts en a et a', le point de concours de deux côtés opposés quelconques du quadrilatère ab a'b' est à la fois un centre de similitude des deux sphères dont ces côtés sont des cordes et un point du plan radical des deux autres sphères* (380).

VI. — Figures inverses dans l'espace.

COMPLÉMENT DE LA MÉTHODE DE TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES.

932. La définition du n° 384 s'applique à des points A, B, C, ..., situés d'une manière quelconque dans l'espace.

Le *cercle d'inversion* devient alors une sphère, et, lorsqu'on fait varier le rayon de cette sphère sans déplacer son centre, les figures inverses de la figure donnée ainsi obtenues sont homothétiques (385) entre elles.

933. *Un plan* L *et une sphère* O *quelconque peuvent être considérés comme deux figures inverses l'une de l'autre* (388). *La figure inverse d'un plan* L *est une sphère* O *passant par l'origine; et la figure inverse d'une sphère* O, *par rapport à l'un quelconque de ses points pris pour origine, est un plan* L *perpendiculaire au diamètre passant par l'origine.*

934. *Deux sphères quelconques* O *et* O' *peuvent être considérées comme deux figures inverses l'une de l'autre* (390). *La figure inverse d'une sphère* O, *par rapport à un point* S *extérieur ou intérieur pris pour origine, est une autre sphère* O'.

935. *L'inverse d'une circonférence* C *par rapport à un point quelconque* S *de l'espace pris pour origine est une autre circonférence* C'. Car, la circonférence C étant considérée comme l'intersection de deux sphères O et O', son inverse est l'intersection des deux sphères O' et O_1, inverse des sphères O et O_1, c'est-à-dire un cercle.

Il résulte immédiatement de la définition des figures inverses que *trois couples quelconques a et a', b et b', c et c', des points correspondants de deux figures inverses sont situés sur une même sphère.* Donc une circonférence quelconque C et son inverse C' appartiennent à une même sphère, et par suite (878) elles sont des sections antiparallèles d'un même cône oblique qui a l'origine S pour sommet. De là le moyen de trouver le centre de la circonférence C' inverse d'une circonférence C; *ce centre est* (880) *sur la droite qui joint l'origine* S *au sommet d'un cône auxiliaire, circonscrit suivant le cercle* C *à la sphère déterminée par la circonférence* C *et le point* S.

936. La formule du n° 386 et sa démonstration subsistent. Quant au théorème du n° 387, il s'applique aussi à deux lignes quelconques de l'espace; mais une nouvelle démonstration est nécessaire.

Et d'abord on démontre, absolument comme au n° 387, en considérant (*fig.* 240) une ligne quelconque plane ou gauche MN et son inverse M'N', que leurs tangentes MT, M'T' font des angles égaux TMM', TM'M avec le rayon vecteur SMM'. Cela étant, soient (*fig.* 241) deux courbes gauches MA et Ma qui se coupent en M, et les courbes inverses M'A', M'a'; il faut prouver que l'angle des deux premières, c'est-à-dire l'angle tMT de leurs tangentes, est égal à l'angle tM'T des deux autres. Or on a, d'après l'observation précédente,

$$tMM' = tM'M, \quad TMM' = TM'M;$$

donc le trièdre formé par les droites MM', MT, Mt, et le trièdre formé par les droites M'M, M'T, M't, ont un angle dièdre égal MM' compris entre deux faces égales chacune à chacune; ces deux trièdres sont donc symétriques et, par suite, les troisièmes faces TMt, TM't sont respectivement égales.

937. *L'angle de deux surfaces* F *et* F_1, *en un point quelconque m de leur ligne d'intersection amb, est égal à l'angle sous lequel les surfaces inverses* F' *et* F'_1 *se coupent au point correspondant m'.*

En effet, menons par m sur les surfaces F et F_1 deux courbes mp et mp_1 à angle droit sur la ligne d'intersection amb; leurs inverses $m'p'$ et $m'p'_1$ couperont (936) à angle droit la ligne $a'm'b'$ commune aux surfaces F' et F'_1, et de plus l'angle des deux premières courbes mp et mp_1 sera égal à celui de leurs inverses $m'p'$ et $m'p'_1$. Or l'angle des courbes mp et mp_1 mesure l'inclinaison mutuelle des deux surfaces F et F_1 au point m, et l'angle de $m'p'$ et $m'p'_1$ mesure l'inclinaison mutuelle des deux surfaces F' et F'_1 au point correspondant m'.

Puisque l'inversion conserve les angles des surfaces, *les sphères inverses de deux sphères tangentes sont aussi tangentes;* d'ailleurs on voit,

comme au n° 393, que *le contact entre les deux nouvelles sphères et le contact entre les deux sphères primitives sont semblables ou dissemblables suivant que les puissances du centre d'inversion par rapport aux deux sphères primitives ont le même signe ou des signes opposés.*

Les lignes et les surfaces inverses jouissent, relativement à la courbure, de propriétés très importantes que nous ne pouvons pas développer ici. Nous renverrons sur ce sujet aux Mémoires déjà cités dans le n° 393 et à un Mémoire de M. HIRST, *Annales de Tortolini*, t. II, 1859.

APPLICATIONS.

958. Voici quelques applications des principes qui précèdent.

On nomme *projection stéréographique* d'une figure sphérique la perspective de cette figure faite en prenant pour *point de vue* S un point de la sphère, et pour plan de projection ou *tableau* le plan P du grand cercle dont le pôle est au point de vue S.

D'après le n° 953, on peut considérer le plan diamétral P comme l'inverse de la surface sphérique, en prenant pour origine le point S et pour puissance le double du carré du rayon de la sphère. La projection stéréographique n'est donc qu'un cas particulier de la transformation par rayons vecteurs réciproques, et l'on peut énoncer les propositions suivantes qu'on utilise dans la construction des mappemondes :

1° *Les projections stéréographiques de deux lignes tracées sur la sphère se coupent sous le même angle que ces lignes elles-mêmes,*

2° *La projection stéréographique d'un cercle de la sphère est un cercle dont le centre est la perspective du sommet du cône circonscrit à la sphère suivant le cercle proposé.*

La projection stéréographique a été connue des Grecs : Ptolémée l'a décrite sous le nom de *planisphère*, et les auteurs du moyen âge l'appelaient *astrolabe*. La construction du centre est due à M. Chasles.

959. *On peut toujours transformer un groupe de trois sphères données en un groupe de trois autres sphères ayant leurs centres en ligne droite le lieu de l'origine ou du pôle de transformation est la circonférence qui coupe à angle droit les grands cercles des sphères données situés dans le plan des trois centres.* En effet, il est évident que les pôles de transformation doivent être dans le plan des trois centres, et que tout revient à transformer les grands cercles situés dans ce plan en trois autres ayant leurs centres en ligne droite. Or, si l'on prend pour pôle un des points de la circonférence qui coupe orthogonalement ces trois grands cercles, cette circonférence orthogonale se transforme en une droite qui coupe à angle droit les transformées des circonférences données et qui, par suite, contient les centres de ces transformées.

VII. — Problèmes relatifs au contact des sphères.

SPHÈRE TANGENTE A QUATRE SPHÈRES DONNÉES.

960. Supposons le problème résolu et soit X une sphère tangente à quatre sphères données S_1, S_2, S_3, S_4 dont nous désignerons le centre radical par O (*fig.* 504 *bis*).

Si l'on fait l'inversion de la figure en prenant pour centre d'inversion le point O et pour coefficient d'inversion la puissance de O par rapport à chacune des sphères données, chacune de ces sphères se transformera en elle-même, et la sphère X', inverse de X, sera une seconde sphère tangente à S_1, S_2, S_3, S_4; d'ailleurs les points de contact a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 de X' avec S_1, S_2, S_3, S_4 sont situés respectivement sur les droites Oa_1, Oa_2, Oa_3, Oa_4 qui joignent le point O aux points de contact a_1, a_2, a_3, a_4 de X avec S_1, S_2, S_3, S_4.

Les puissances de O par rapport à S_1 et à X étant respectivement les mêmes que celles de O par rapport à S_2 et à X, il résulte du n° 957 que les contacts en a_2 et en a'_2 sont semblables ou dissemblables en même temps que les contacts en a_1 et en a'_1. Par suite les couples de sphères S_1 et S_2, X et X' satisfont aux conditions du n° 931 (3°); O *est donc un centre de similitude de* X *et de* X', et le point de concours ω_{12} de a_1a_2 et de $a'_1a'_2$ est à la fois un centre de similitude de S_1 et de S_2 et un point du plan radical R de X et de X'. De même, le point de concours ω_{13} de a_1a_3 et de $a'_1a'_3$ et le point de concours ω_{14} de a_1a_4 et de $a'_1a'_4$ sont respectivement des centres de similitude de S_1 et de S_3, de S_1 et de S_4, et appartiennent au plan R. Par suite, le *plan radical* R *de* X *et de* X' *est un plan de similitude* $\omega_{12}\omega_{13}\omega_{14}$ *des quatre sphères données.*

Il suit de là que *les centres* x *et* x' *des sphères* X *et* X' *sont situés sur la perpendiculaire* OZ_1, *abaissée de* O *sur le plan de similitude* $\omega_{12}\omega_{13}\omega_{14}$, puisque la droite xx' doit passer par le centre de similitude O de X et de X' et être perpendiculaire au plan radical de ces deux sphères.

Enfin les points a_1 et a'_1 des sphères X et X' étant antihomologues, puisqu'ils se correspondent par inversion, les plans tangents en a_1 et a'_1 ont leur intersection L_1 dans le plan radical R (931, 1°); mais L_1 et $a_1a'_1$ étant réciproques par rapport à la sphère S_1, la droite $a_1a'_1$ *contient le pôle, par rapport à la sphère* S_1, *du plan* R qui passe par L_1 (946).

On est ainsi conduit à la conclusion suivante :

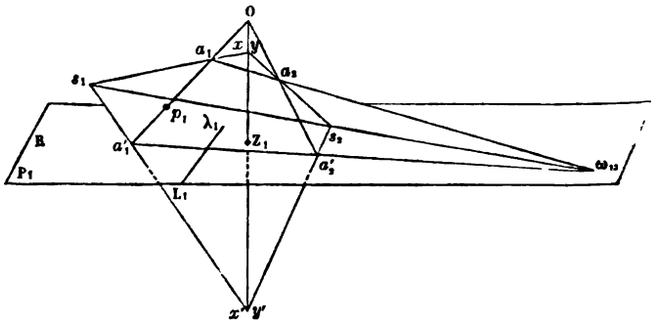
S'il existe une sphère X *tangente à quatre sphères données* S_1, S_2, S_3, S_4, *il existera une seconde sphère* X' *jouissant de la même propriété. Ces deux sphères associées* X *et* X' *touchent respectivement la sphère* S_1 *aux points* a_1 *et* a'_1 *où cette sphère rencontre la droite* Op_1 *qui joint le centre radical* O *des sphères données au pôle* p_1, *par rapport à* S_1, *de*

l'un des plans P_1 *de similitude des mêmes sphères. Les centres x et x' de* X *et de* X' *seront les points où les droites qui joignent le centre* ω_1 *de* S_1 *aux points* a_1 *et* a'_1 *rencontrent la perpendiculaire* OZ_1 *abaissée de* O *sur le plan de similitude considéré* P_1.

Comme il y a huit plans de similitude (936) des quatre sphères données, on voit que *le nombre des couples de sphères tangentes à quatre sphères données est au plus égal à huit.*

Pour qu'un tel couple existe, il faut évidemment, d'après ce qui précède, que la droite Op_1, qui répond au plan de similitude considéré, coupe la sphère S_1. Cette condition est d'ailleurs suffisante : en d'autres termes, *si la droite* Op_1, *qui joint le point* O *au pôle* p_1, *par rapport à* S_1, *d'un plan de similitude* P_1 *des sphères données, coupe* S_1 *en deux points* a_1 *et* a'_1, *et si x et x' sont les points où* s_1a_1 *et* $s_1a'_1$ *rencontrent la perpendiculaire* OZ_1 *abaissée de* O *sur le plan* P_1, *les sphères* X *et* X' *décrites, l'une du point x comme centre avec* xa_1 *pour rayon, l'autre du point x' comme centre avec* $x'a'_1$ *pour rayon, toucheront l'une et l'autre les quatre sphères données* S_1, S_2, S_3, S_4.

Fig. 504 *bis*.



En effet :

D'abord, la sphère X touche S_1 au point a_1 puisque le point a_1 est commun aux deux sphères X et S_1 et se trouve en outre sur la ligne des centres s_1x. De même la sphère X' touche S_1 au point a'_1. Il reste à prouver que X et X' touchent l'une et l'autre les sphères S_2, S_3, S_4, ou même simplement que X et X' touchent S_2, car le même raisonnement subsistera pour S_3 et pour S_4.

Or, désignons par a_2 et a'_2 les points de S_2 qui sont antihomologues de a_1 et a'_1 par rapport à celui ω_{12} des deux centres de similitude de S_1 et de S_2 qui est dans le plan de similitude considéré P_1. Il existe

(951, 2°) une sphère Y touchant respectivement S_1 et S_2 en a_1 et en a_2, ainsi qu'une sphère Y′ touchant respectivement S_1 et S_2 en a'_1 et en a'_2. Le centre y de Y est à la rencontre de s_1a_1 et de s_2a_2 et le centre y' de Y′ à la rencontre de $s_1a'_1$ et de $s_2a'_2$. Si ω_{12} est un centre de similitude directe de S_1 et de S_2, les contacts en a_1 et a_2 seront semblables ainsi que les contacts en a'_1 et a'_2; au contraire, si ω_{12} est un centre de similitude inverse, les contacts en a_1 et a_2 seront dissemblables ainsi que les contacts en a'_1 et a'_2. Les contacts en a'_1 et a'_2 sont donc semblables ou dissemblables en même temps que les contacts en a_1 et a_2. Par suite, les sphères Y et Y′ et les sphères S_1 et S_2 satisfont aux conditions du n° 951 (3°), et l'on peut énoncer les propositions suivantes : 1° l'intersection de $a_1a'_1$ et de $a_2a'_2$ appartient au plan radical de S_1 et de S_2, et comme $a_1a'_1$ coupe ce plan radical en O, la droite $a_2a'_2$ passe par O; 2° le point O est un centre de similitude de Y et de Y′, et, par suite, les trois points y, y', O sont en ligne droite; 3° le point ω_{12} appartient au plan radical R de Y et de Y′; mais, d'une part, la droite λ_1 réciproque de $a_1a'_1$ par rapport à S_1, c'est-à-dire l'intersection des plans tangents en a_1 et a'_1 à la sphère S_1, est sur ce plan radical; d'autre part, cette droite réciproque λ_1 doit appartenir au plan polaire P_1 du point p_1 situé sur $a_1a'_1$; le plan P_1 contient donc un point ω_{12} et une droite λ_1 du plan radical R et, par suite, se confond avec lui. Il résulte de là que la ligne des centres yy' est perpendiculaire au plan P_1. Les points y et y' sont donc situés sur OZ_1, aux points où cette droite rencontre s_1a_1 et $s_1a'_1$; ils coïncident par suite avec les centres x et x' de X et de X′, de sorte que les sphères X et X′ coïncident elles-mêmes respectivement avec Y et Y′ et, par conséquent, touchent la sphère S_3.

THÉORÈME DE DUPUIS.

961. Conservons les notations du numéro précédent et supposons que, les trois sphères S_1, S_2, S_3 restant fixes, la sphère S_4 varie. Le point O, centre radical des quatre sphères, décrira l'axe radical H des sphères fixes S_1, S_2, S_3. Supposons, par exemple, que P_1 soit le plan de similitude directe des quatre sphères, et soit D l'axe de similitude directe des sphères S_1, S_2, S_3; la droite D étant contenue dans le plan P_1 et restant fixe avec S_1, S_2, S_3, le plan P_1 tournera autour de D et, par suite, son pôle p_1 par rapport à S_1 décrira la droite δ réciproque de D par rapport à S_1; or la droite δ est perpendiculaire au plan des centres s_1, s_2, s_3. Donc la droite variable Op_1 s'appuiera constamment sur deux droites fixes H et δ perpendiculaires au plan $s_1s_2s_3$; le point de contact a_1 de X et de S_1 étant situé sur Op_1, ne sortira pas alors du plan

des parallèles H et δ; le lieu de ce point a_1 est donc le cercle suivant lequel le plan de H et de δ coupe la sphère S_1.

De là, ce théorème dû à Dupuis :

Quand une sphère variable X *touche constamment de la même manière trois sphères fixes* S_1, S_2, S_3, *chacun des trois points de contact* a_1, a_2, a_3 *décrit un petit cercle sur la sphère fixe correspondante.*

Les auteurs qui se sont occupés du problème relatif à la sphère tangente à quatre sphères données (GAULTIER de Tours, *Journal de l'École Polytechnique*, t. IX; HEEGMANN, *Mémoires de l'Académie de Lille*, 1823; J.-A. SERRET, *Journal de Crelle*, t. XXXVII, et *Nouvelles Annales*) ont fondé leur démonstration sur le théorème de Dupuis. Au lieu de suivre cette marche, qui rompt l'analogie avec la Géométrie plane, nous avons tenu à conserver cette analogie, et l'on peut voir que le raisonnement employé au n° 960 n'est que l'extension naturelle de celui déjà fait au n° 400. Le théorème de Dupuis n'en est alors qu'un corollaire immédiat, comme nous venons de le voir. On peut toutefois désirer une démonstration directe. Une des plus simples repose sur la remarque du n° 959 :

Considérons la figure formée par les trois sphères fixes S_1, S_2, S_3, la sphère variable X qui les touche; transformons cette figure de façon que S_1, S_2, S_3 deviennent trois sphères Σ_1, Σ_2, Σ_3 ayant leurs centres σ_1, σ_2, σ_3 en ligne droite. La transformée ξ de X touchera Σ_1, Σ_2, Σ_3 et le lieu de son point de contact avec l'une quelconque de ces sphères sera évidemment un cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$. Donc, en revenant à la figure primitive et se rappelant que la transformée d'un cercle est un cercle, on voit que le point de contact de la sphère variable X décrit un cercle sur chacune des sphères fixes S_1, S_2, S_3. (MANNHEIM, *Nouvelles Annales*, 1re série, tome XIX.)

SPHÈRE TANGENTE A QUATRE PLANS DONNÉS.

962. Établissons d'abord un lemme :

Soit $A_1A_2A_3A_4$ un tétraèdre. k étant l'un quelconque des indices 1, 2, 3, 4, désignons par s_k l'aire de la face opposée au sommet A_k; par MP_k la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque M de l'espace sur le plan de cette face, et par x_k le nombre qui mesure la longueur de cette perpendiculaire, précédé du signe + ou du signe — suivant que le point M et le sommet A_k sont d'un même côté ou de côtés différents par rapport au plan de la face s_k.

Les quantités x_1, x_2, x_3, x_4, reçoivent le nom de *coordonnées tétraédriques* du point M.

Les coordonnées tétraédriques d'un point quelconque M *de l'espace satisfont à la relation*

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 + s_4 x_4 = 3v, \tag{1}$$

v étant le volume du tétraèdre.

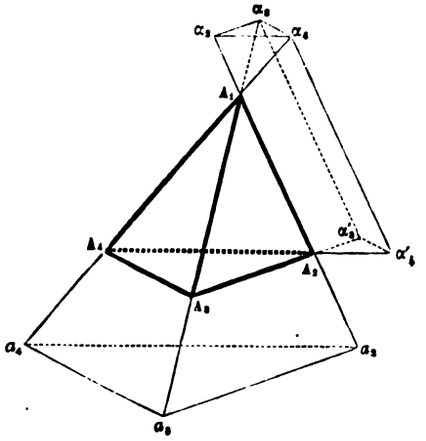
En effet, les plans des faces du tétraèdre indéfiniment prolongés partagent l'espace en quinze régions ; ce sont (*fig.* 505) :

L'espace $A_1A_2A_3A_4$ occupé par le tétraèdre ;

Le *trièdre* $A_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, opposé par le sommet au trièdre A_1 du tétraèdre ; il y a quatre trièdres de ce genre, un relatif à chaque sommet ;

Le *tronc* de pyramide indéfini $A_2A_3A_4\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, qu'on obtient en retranchant du trièdre A_1 l'espace occupé par le tétraèdre ; il y a quatre troncs de ce genre, un relatif à chaque face ;

Fig. 505.



Le *comble* $A_1A_2\alpha'_3\alpha_3\alpha'_4\alpha_4$ qui a pour *faîte* l'arête A_1A_2 et pour *arêtes* les prolongements $A_1\alpha_3$, $A_1\alpha_4$, des arêtes qui aboutissent en A_1 et les prolongements $A_2\alpha'_3$, $A_2\alpha'_4$, des arêtes qui aboutissent en A_2 ; il y a six combles de ce genre, un relatif à chaque arête.

Cela posé, si le point M est situé dans l'intérieur du tétraèdre, les quantités x_1, x_2, x_3, x_4, sont positives ; les expressions $\frac{1}{3}s_1x_1$, $\frac{1}{3}s_2x_2$, $\frac{1}{3}s_3x_3$, $\frac{1}{3}s_4x_4$, représentent les volumes des pyramides triangulaires qui ont M pour sommet et, pour bases, les faces s_1, s_2, s_3, s_4 ; et, comme la somme des volumes de ces pyramides est égale au volume du tétraèdre, la relation (1) est démontrée pour ce cas.

Si le point M est dans le trièdre $A_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, les hauteurs des pyramides qui ont pour bases s_1, s_2, s_3, s_4, et pour sommet le point M, sont respectivement égales à $x_1, -x_2, -x_3, -x_4$, et, comme le tétraèdre équivaut à la pyramide ayant pour base s_1, diminuée de la somme des pyramides ayant pour bases s_2, s_3, s_4, on a

$$s_1x_1 - s_2(-x_2) - s_3(-x_3) - s_4(-x_4) = 3v,$$

c'est-à-dire encore la relation (1).

On voit de même que, suivant que le point M est situé dans le tronc $A_2A_3A_4\,\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ ou dans le comble (A_1A_2), on a

$$-s_1(-x_1) + s_2x_2 + s_3x_3 + s_4x_4 = 3v$$

ou

$$s_1x_1 + s_2x_2 - s_3(-x_3) - s_4(-x_4) = 3v,$$

c'est-à-dire toujours la relation (1), qui se trouve ainsi établie pour tous les cas.

RÉCIPROQUEMENT, *si quatre quantités x_1, x_2, x_3, x_4, satisfont à la relation* (1), *il existe un point de l'espace et un seul dont ces quantités sont les coordonnées tétraédriques.*

En effet, menons un plan Q_k parallèle au plan de la face s_k, à une distance de celui-ci égale à la valeur absolue de x_k, et du même côté du plan s_k que le sommet A_k ou du côté opposé, suivant que x_k est positif ou négatif; nous obtiendrons ainsi quatre plans Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, bien déterminés. Trois quelconques d'entre eux, Q_2, Q_3, Q_4, se coupent en un point unique μ dont nous désignerons les coordonnées tétraédriques par $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. D'après la construction du point M, on a

$$\xi_2 = x_2, \quad \xi_3 = x_3, \quad \xi_4 = x_4;$$

d'ailleurs, le point μ est le seul point de l'espace dont les trois coordonnées d'indices 2, 3, 4 soient respectivement égales à x_2, x_3, x_4. Il reste donc seulement à prouver que ξ_1 est égal à x_1. Or on a, par le théorème direct,

$$s_1\xi_1 + s_2\xi_2 + s_3\xi_3 + s_4\xi_4 = 3v,$$

c'est-à-dire, à cause des relations précédentes,

$$s_1\xi_1 + s_2x_2 + s_3x_3 + s_4x_4 = 3v,$$

et la comparaison de cette relation avec la relation (1), qui, par hypothèse, est ici satisfaite, donne $\xi_1 = x_1$.

963. Abordons maintenant le problème de la sphère tangente à quatre plans que nous supposerons former un tétraèdre.

Pour qu'il existe une sphère *inscrite* dans le tétraèdre, il faut et il suffit qu'on puisse satisfaire à la relation (1) en prenant

$$x_1 = \rho, \quad x_2 = \rho, \quad x_3 = \rho, \quad x_4 = \rho,$$

ρ désignant le nombre fini et positif qui mesure le rayon de la sphère. Or, une telle solution est toujours possible et est unique, car la substitution des valeurs précédentes dans (1) donne

$$(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)\,\rho = 3v,$$

d'où l'on tire pour ρ la valeur unique, finie et positive,

$$\rho = \frac{3v}{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}.$$

Il y a donc une sphère inscrite au tétraèdre et une seule; son rayon est donné par la formule précédente; d'ailleurs, son centre, étant équidistant des quatre faces, appartient à tous les plans bissecteurs des dièdres intérieurs du tétraèdre, et trois de ces plans, relatifs aux trois arêtes d'une même face, suffisent pour le déterminer.

Pour qu'une sphère tangente eût son centre dans le trièdre $A_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, il faudrait qu'on pût satisfaire à la relation (1) par les valeurs

$$x_1 = \rho, \quad x_2 = -\rho, \quad x_3 = -\rho, \quad x_4 = -\rho,$$

ρ étant fini et positif; or, la substitution de ces valeurs donne

$$(s_1 - s_2 - s_3 - s_4)\,\rho = 3v, \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{3v}{s_1 - s_2 - s_3 - s_4},$$

ce qui est impossible, puisque, une face quelconque d'un tétraèdre étant moindre que la somme des trois autres, le second membre est négatif. Ainsi, il n'y a aucune sphère tangente ayant son centre dans le trièdre considéré ni dans les trois autres trièdres analogues.

Il y a, au contraire, une sphère dans le tronc $A_2A_3A_4a_2a_3a_4$, car la substitution des valeurs

$$x_1 = -\rho, \quad x_2 = \rho, \quad x_3 = \rho, \quad x_4 = \rho$$

donne

$$(-s_1 + s_2 + s_3 + s_4)\,\rho = 3v, \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{3v}{-s_1 + s_2 + s_3 + s_4},$$

valeur unique, finie et positive, puisque dans un tétraèdre une face quelconque est moindre que la somme des trois autres. Cette sphère est dite *exinscrite* suivant la face s_1; son centre est à l'intersection des plans bissecteurs des dièdres extérieurs relatifs aux arêtes de cette face. Il y a de même une sphère exinscrite dans chaque tronc.

Voilà donc *cinq* sphères, *la sphère inscrite et les quatre sphères exinscrites*, dont l'existence est certaine. Il reste à examiner ce qui se passe pour les combles.

Pour raisonner d'une manière générale, désignons par A_iA_k l'arête relative au comble considéré et par $A_{i'}A_{k'}$ l'arête opposée. Pour qu'il y ait une sphère tangente dans le comble (A_iA_k), il faut et il suffit que la substitution des valeurs

$$x_i = \rho, \quad x_k = \rho, \quad x_{i'} = -\rho, \quad x_{k'} = -\rho,$$

dans la relation (1) donne pour ρ une valeur finie et positive. Or, cette substitution conduit à

$$(s_i + s_k - s_{i'} - s_{k'})\rho = 3v, \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{3v}{s_i + s_k - s_{i'} - s_{k'}}.$$

Donc, *pour qu'il y ait une sphère tangente dans l'un des combles, il faut et il suffit que la somme $s_i + s_k$ des deux faces qui ont pour côté commun l'arête du comble soit supérieure à la somme $s_{i'} + s_{k'}$ des deux autres faces.*

Il suit de là immédiatement que, *s'il y a une sphère dans un comble, il n'y en a pas dans le comble opposé*, et que, *si la somme de deux faces est égale à la somme des deux autres, il n'y a de sphère tangente ni dans le comble qui a pour arête le côté commun aux deux premières faces, ni dans le comble opposé qui a pour arête le côté commun aux deux autres faces.*

Donc, enfin, le nombre des sphères tangentes à quatre plans formant un tétraèdre est au moins égal à *cinq* et au plus égal à *huit*.

Admettons, ce qui est permis, qu'on ait

$$s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq s_4,$$

et posons

$$s_1 + s_2 - s_3 - s_4 = q_2, \quad s_1 + s_3 - s_2 - s_4 = q_3, \quad s_1 + s_4 - s_2 - s_3 = q_4.$$

L'égalité $q_2 = 0$ entraîne $q_3 = 0$ et $q_4 = 0$; car, si l'on a

$$0 = q_2 = (s_1 - s_3) + (s_2 - s_4) = (s_1 - s_4) + (s_2 - s_3),$$

c'est que les différences entre parenthèses, qui ne peuvent être négatives, sont nulles; on a donc

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4$$

et, par suite,

$$q_3 = 0 \quad \text{et} \quad q_4 = 0.$$

L'égalité $q_3 = 0$ entraîne $q_4 = 0$; car, si l'on a

$$0 = q_3 = (s_1 - s_2) + (s_3 - s_4),$$

c'est que les différences entre parenthèses sont nulles ; on a donc $s_1 = s_2$, $s_3 = s_4$ et, par suite, $q_4 = 0$.

Ces remarques très simples permettent d'achever la discussion.

Si les trois quantités q_2, q_3, q_4 sont nulles, on a $s_1 = s_2 = s_3 = s_4$, et réciproquement. Donc, *pour que le nombre des sphères soit égal à* 5, *il faut et il suffit que le tétraèdre ait toutes ses faces égales entre elles.*

Si deux seulement des quantités q_2, q_3, q_4 sont nulles, c'est qu'on a

$$q_3 = 0, \quad q_4 = 0, \quad q_2 > 0,$$

c'est-à-dire

$$s_1 = s_2, \quad s_3 = s_4, \quad s_2 > s_3,$$

et réciproquement. Donc, *pour que le nombre des sphères soit égal à* 6, *il faut et il suffit que les faces du tétraèdre soient égales deux à deux sans être toutes égales entre elles.*

Si une seule des quantités q_2, q_3, q_4 est nulle, c'est qu'on a

$$q_4 = 0, \quad q_2 > 0, \quad q_3 > 0,$$

c'est-à-dire

$$s_1 + s_4 = s_2 + s_3, \quad s_1 > s_2 \geqq s_3 > s_4,$$

et réciproquement. Donc, *pour que le nombre des sphères soit égal à* 7, *il faut et il suffit que le tétraèdre ait une face maximum et une face minimum, et que la somme de ces deux faces soit égale à la somme des deux autres*, lesquelles peuvent d'ailleurs être égales entre elles ou inégales.

Enfin, *si aucune des trois conditions précédentes n'est réalisée, le nombre des sphères est égal à* 8.

Nous laissons au lecteur le soin d'examiner les cas où les quatre plans donnés ne forment pas un tétraèdre.

VIII. — Figures tracées sur la sphère.

RAPPORT ANHARMONIQUE.

964. On nomme *rapports anharmoniques de quatre points* A, B, C, D, *situés sur un grand cercle* d'une sphère dont nous désignerons le centre par ω, les rapports anharmoniques du faisceau formé par les quatre rayons ωA, ωB, ωC, ωD, qui aboutissent à ces points.

Lorsqu'un faisceau de quatre arcs de grand cercle OM, ON, OP, OQ, *issus d'un même point* O *de la surface sphérique, est coupé par un arc de grand cercle* L, *le rapport anharmonique des quatre points* A, B, C, D, *déterminés par le faisceau sur cet arc transversal, a une valeur indépendante de la position de cet arc* L. Car ce rapport est, par définition, égal à celui du faisceau formé par les rayons ωA, ωB, ωC, ωD, lequel ne diffère pas de celui du faisceau des quatre plans ωOA, ωOB, ωOC, ωOD (384).

D'après cela, on nomme *rapport anharmonique d'un faisceau de quatre*

arcs de grand cercle le rapport anharmonique de quatre points déterminés par ce faisceau sur un arc de grand cercle transversal quelconque.

Les deux propositions fondamentales (322 et 324) s'étendent aux figures sphériques; par suite, il en est de même de leurs corollaires (323) et (325), de la propriété des triangles homologiques (326 et 327), et des théorèmes de Pascal et de Brianchon (328 et 329). Les démonstrations que nous en avons données subsistent entièrement; le lecteur devra seulement remplacer dans les énoncés et dans les raisonnements les mots *ligne droite* par les mots *arc de grand cercle*.

RAPPORT HARMONIQUE.

965. Quatre points A, B, C, D, situés sur un arc de grand cercle, forment un *système harmonique* lorsque le rapport anharmonique (ABCD) est égal à -1.

Un faisceau de quatre arcs de grands cercles OA, OB, OC, OD est harmonique, lorsque le rapport anharmonique (O.ABCD) est égal à -1, c'est-à-dire lorsqu'on peut trouver un arc de grand cercle qui coupe le faisceau suivant un système de quatre points harmoniques; alors tout autre arc de grand cercle transversal jouira de la même propriété (964).

Il résulte de là que, si par un point C de la surface sphérique on mène, à travers un angle AOB formé par deux arcs de grands cercles, diverses sécantes telles que ACB, et que l'on prenne sur chacune d'elles le point D conjugué harmonique de C par rapport au segment AB intercepté entre les côtés de l'angle, le lieu du point D sera l'arc de grand cercle OD conjugué harmonique de OC par rapport au segment AOB. Le point C et l'arc de grand cercle OD sont dits *pôle* et *polaire* par rapport à l'angle AOB.

La proposition (315) relative au quadrilatère complet et la démonstration que nous en avons donnée (337) subsistent pour la sphère; il suffit de remplacer les mots *ligne droite* par *arc de grand cercle*. Il en résulte un moyen simple de tracer sur la sphère : 1° le quatrième harmonique de trois points d'un grand cercle; 2° la polaire d'un point par rapport à un angle (316 et 337).

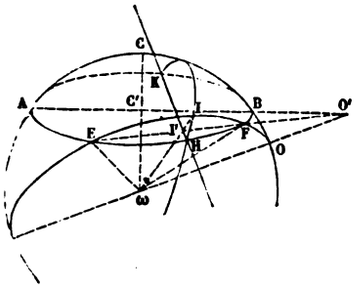
POLE ET POLAIRE PAR RAPPORT A UN CERCLE DE LA SPHÈRE.

966. *Un point* O *et un petit cercle* AEFB *étant donnés sur la sphère* (*fig.* 506), *si par le point* O *on mène un arc de grand cercle sécant* OFE *et qu'on détermine le conjugué harmonique* I *du point* O *par rapport à* EF, *le lieu géométrique du point* I *lorsque l'arc* OFE *tourne autour du point* O *est un arc de grand cercle perpendiculaire au grand cercle* OC *déterminé par le point* O *et par le pôle* C *du cercle donné.*

En effet, soit O' le point où le rayon ωO rencontre le plan du cercle donné : les trois points E, F, O' seront en ligne droite, et le faisceau des quatre rayons ωE, ωI, ωF, ωO' sera par hypothèse harmonique : donc, si I' est le point de rencontre de EF et de ωI, le système rectiligne

E, I', F, O' sera aussi harmonique. Mais le lieu du point I' est une droite KH située dans le plan AEB et perpendiculaire au diamètre O'BA;

Fig. 506.



donc le lieu du point I est l'intersection de la sphère par le plan ωKH; c'est donc un grand cercle perpendiculaire au grand cercle OC.

On dit que le point O est le *pôle* du grand cercle ωKH, et que ce grand cercle est la *polaire* du point O par rapport au cercle AEB.

Le mot *pôle* a déjà reçu une autre acception, mais il ne pourra jamais y avoir d'ambiguïté si l'on fait la convention suivante : quand nous emploierons le mot *pôle* dans le nouveau sens que lui attribue le théorème précédent, il sera toujours suivi des mots *par rapport au cercle considéré*, tandis que, lorsqu'il sera pris dans le sens primitif (944), ce mot ne sera suivi d'aucune indication.

Nous avons étudié avec détail au n° 341 les positions relatives du point O' et de la droite KH: le lecteur en déduira aisément les positions relatives du point O et du grand cercle ωKH.

Quand le point O' décrit une droite dans le plan AEB, on sait (342) que la droite KH tourne dans ce plan autour du pôle de cette droite; mais alors le point O décrit un grand cercle, et le plan ωKH tourne autour du diamètre qui perce la sphère au pôle, par rapport à AEB, du grand cercle décrit par O. Donc, *les polaires de tous les points d'un grand cercle passent par le pôle de ce grand cercle par rapport au cercle directeur* AEB : et *les pôles par rapport au cercle directeur* AEB, *de tous les grands cercles qui passent par un point de la sphère, sont situés sur le grand cercle polaire de ce point*.

Le théorème du n° 344, sa démonstration et ses conséquences (345, 346) subsistent pour la sphère en remplaçant les droites par des arcs de grand cercle; il en résulte le moyen de construire sur la sphère la polaire d'un point par rapport à un cercle directeur donné.

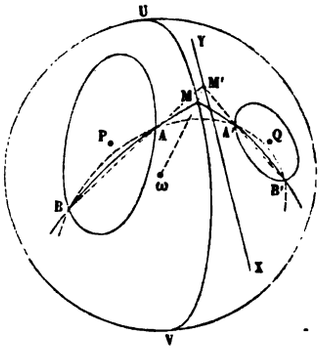
Enfin, la méthode de transformation par les polaires réciproques (348

et suiv.) s'étend aussi aux figures sphériques. Le mode de transformation général par polaires réciproques dans l'espace contient comme cas particulier le mode de transformation spécial que nous avons exposé au n° 808 pour les figures sphériques, et dans lequel on fait correspondre à un triangle un triangle supplémentaire. Soient, en effet, une sphère de rayon R et un point A de l'espace situé à une distance d du centre ω de la sphère; le plan polaire de ce point est un plan perpendiculaire à ωA et situé à une distance de ω égale à $\frac{R^2}{d}$. Si le rayon R de la sphère tend vers zéro, $\frac{R^2}{d}$ tend aussi vers zéro, et les plans polaires de tous les points de la droite indéfinie ωA ont pour limite le plan unique mené par ω perpendiculairement à ωA. On peut, d'après cela, donner à ce plan le nom de *plan polaire* de la droite ωA par rapport à une sphère infiniment petite ayant ω pour centre. Cela posé, si l'on a une figure formée de droites et de plans passant tous par un point ω, on aura la figure corrélative en menant par ω des plans et des droites perpendiculaires aux droites et aux plans de la figure primitive. Sur la sphère, à un grand cercle répondra son pôle, et inversement, de sorte que l'on retombe sur les figures supplémentaires des n°s 811 et 812.

AXE RADICAL DE DEUX CERCLES.

967. On nomme *axe radical* de deux petits cercles P et Q tracés sur la

Fig. 507.



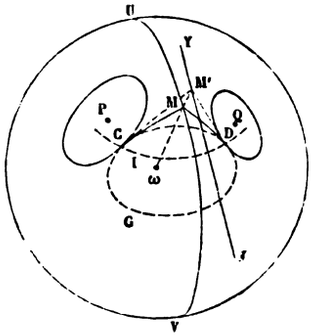
sphère l'arc de grand cercle UV dont le plan passe par l'intersection XY des plans des deux petits cercles P et Q. D'après cela, cet axe radical est perpendiculaire à l'arc de grand cercle PQ qui joint les pôles des deux petits cercles donnés (*fig.* 507).

Si l'on coupe les deux cercles fixes P *et* Q *par un cercle auxiliaire*

variable qui coupe le premier en A *et* B, *et le second en* A′ *et* B′, *le lieu des points de rencontre* M *des arcs de grand cercle* AB *et* A′B′ *est l'axe radical des cercles* P *et* Q. Car les droites AB, A′B′, se coupant évidemment en un point M′ de XY, le point M où le rayon ωM′ perce la sphère appartient à la fois aux trois grands cercles dont les plans passent respectivement par les droites AB, A′B′, XY. Cette propriété permet de construire sur la sphère l'axe radical de deux cercles.

Si le cercle sécant ABA′B′ devient un cercle CD tangent en C et D (*fig.* 508), les arcs de grand cercle BAM, B′A′M deviennent des arcs de

Fig. 508.



grand cercle tangents MC et MD; ils sont d'ailleurs égaux comme tangentes sphériques menées d'un même point M au cercle auxiliaire CD (832, 820). Donc *l'axe radical* UV *des deux cercles* P *et* Q *est le lieu des deux points de la sphère d'où l'on peut leur mener des tangentes sphériques égales.*

Le cercle CID, décrit du point M comme pôle, coupe orthogonalement les deux cercles P et Q; car il est à angle droit sur les arcs de grand cercle MC et MD. Donc *l'axe radical des deux cercles* P *et* Q *est sur la sphère le lieu des pôles ou centres sphériques des cercles qui coupent orthogonalement les deux cercles* P *et* Q.

Enfin, le plan du cercle CID est le plan polaire du point M′ qui appartient à XY; car son plan est perpendiculaire à ωM′, et il contient le point C qui appartient évidemment au plan polaire. D'ailleurs, comme lorsque le cercle orthogonal CID varie, son pôle M′ décrit la droite XY, le plan de ce cercle CID passe constamment par la droite réciproque (946) de XY. Donc, *lorsque deux systèmes de cercles se coupent orthogonalement sur la sphère, les plans des cercles de chaque système passent par une droite, et ces deux droites sont réciproques par rapport à la*

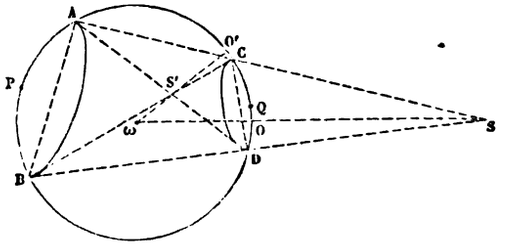
sphère. Inversement, *deux séries de plans passant par deux droites réciproques par rapport à une sphère tracent sur cette sphère deux systèmes de cercles orthogonaux* (1). Ajoutons que la droite réciproque de l'intersection des deux cercles P et Q est précisément la droite qui joint les sommets des deux cônes (878, 880) que l'on peut faire passer par ces deux cercles. En effet, prenons pour plan de la figure le grand cercle (*fig.* 219, p. 344) perpendiculaire aux deux cercles donnés, qui sont alors représentés par les deux droites AA' et BB' ; en joignant AB et A'B', puis AB' et BA', on aura les sommets N et O des deux cônes considérés, et, comme la droite NO est (346) la polaire de l'intersection M des deux droites AA' et BB', la perpendiculaire au plan de la figure élevée par le point M, c'est-à-dire la droite commune aux plans des deux cercles AA' et BB', aura pour réciproque NO (946).

Les axes radicaux de trois cercles d'une sphère considérés deux à deux concourent en un même point ; car le rayon qui aboutit au sommet du trièdre formé par les plans des trois cercles perce la sphère en un point commun aux trois axes radicaux. Ce point prend le nom de *centre radical* des trois cercles. C'est le *centre sphérique* du cercle qui coupe orthogonalement les trois cercles donnés.

CENTRES DE SIMILITUDE DE DEUX CERCLES.

968. On nomme *centres de similitude* de deux cercles AB et CD situés sur une sphère (*fig.* 509) les points O et O' où la sphère est rencontrée par

Fig. 509.



les rayons ωS et ωS' qui vont aux sommets S et S' des deux cônes (878) que l'on peut faire passer par les deux cercles. Ces deux centres sont

(1) L'étude du double système des cercles orthogonaux sur la sphère a des conséquences importantes relativement aux surfaces dont les lignes de courbure sont planes (O. BONNET, *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVe cahier — PICART, *Essai d'une Théorie géométrique des surfaces*, 1863).

d'ailleurs sur le grand cercle qui passe par les pôles P et Q des deux cercles donnés.

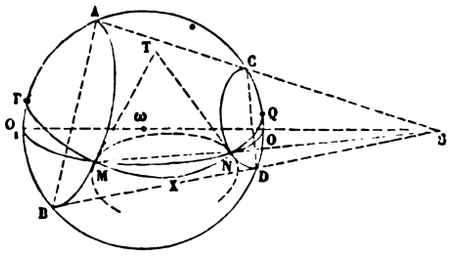
On dit que deux points M et N, appartenant, l'un au cercle P, l'autre au cercle Q, sont *anti-homologues* lorsque la droite qui les joint est une génératrice de l'un des deux cônes S et S'. L'*arc de grand cercle* MN *passe alors par le centre de similitude* O *relatif au cône considéré* S, car son plan contient les points ω et S, et, par suite, le point O de la droite ωS (*fig.* 510).

Deux couples M *et* N, B *et* D, *de points anti-homologues par rapport à un même cône* S *appartiennent à un même cercle de la sphère,* car ils sont situés dans le plan des génératrices MN et BD du cône. On en conclut (967) que *l'arc de grand cercle qui joint deux points quelconques du cercle* P *et l'arc de grand cercle qui joint les points anti-homologues du cercle* Q *se coupent sur l'axe radical des cercles* P *et* Q.

Si les deux points considérés sur le cercle P se confondent, les deux propositions qui précèdent deviennent les suivantes : *Quand deux cercles* P *et* Q *d'une même sphère sont touchés par un troisième* X, *les points de contact* M *et* N *sont anti-homologues et le plan de ce cercle* X *passe par le sommet* S *du cône correspondant. Les tangentes sphériques en deux points anti-homologues* M *et* N *de deux cercles* P *et* Q *se coupent sur l'axe radical de ces deux cercles.*

Le plan d'un cercle tangent à trois cercles de la sphère est tangent à trois

Fig. 510.



cônes qui passent par ces cercles pris deux à deux, et réciproquement. Or, trois cercles pris deux à deux forment trois combinaisons, à chacune desquelles répondent deux cônes. Du sommet de l'un des cônes de la première combinaison on peut mener, en général, deux plans tangents à l'un des cônes de la seconde, et ces plans seront tangents non-seulement aux deux cônes, mais encore à un des cônes de la troisième combinaison. Donc l'intersection de ces deux plans passe par les sommets des trois cônes. Nous avons considéré dans ce raisonnement un cône de la première combinaison et un cône de la seconde, ce qui a déterminé le cône

de la troisième. Mais on peut associer de quatre manières différentes un cône de la première combinaison et un cône de la seconde. Par suite, les sommets des six cônes sont situés trois à trois sur quatre droites, chaque sommet appartenant à deux droites différentes; donc ces quatre droites se coupent deux à deux et sont toutes situées dans un même plan. Il résulte de là que *les six centres de similitude de trois cercles d'une même sphère sont situés trois à trois sur quatre grands cercles.*

CERCLES ISOGONAUX.

969. *Pour que, sur une sphère, un cercle* L, *qui rencontre un cercle* P *en un point* M *et un cercle* Q *en un point* N, *coupe ces deux cercles sous des angles égaux* (*ou supplémentaires*), *il faut et il suffit que les points* M *et* N *soient anti-homologues.*

Remarquons d'abord que, si par deux points appartenant respectivement à deux lignes sphériques on peut mener un cercle qui coupe ces lignes sous des angles égaux, tout autre cercle passant par les deux points coupera aussi ces lignes sous des angles égaux, car les nouveaux angles différeront respectivement des premiers d'un angle égal à celui des deux cercles. Il suit de là qu'il suffit de démontrer le théorème proposé dans l'hypothèse où le cercle L est un grand cercle. Soit donc (*fig.* 510) MN un grand cercle coupant P et Q sous des angles égaux, et soit X le point d'intersection des rayons sphériques PM, QN. Les angles XMN, XNM étant égaux, le triangle sphérique XMN est isocèle, et, par suite, le cercle décrit de X comme centre sphérique et passant par M passe aussi par N; ce cercle touche d'ailleurs en M et N les cercles P et Q (823); donc les points M et N sont anti-homologues (968). Inversement, soient MN l'arc de grand cercle qui joint deux points anti-homologues des cercles P et Q et X le pôle du petit cercle qui touche (968) P et Q en M et N; les grands cercles PX et QX passent respectivement par les points de contact M et N (823) et, dans le triangle sphérique isocèle XMN, il y a égalité entre les angles à la base M et N, et, par suite, entre les angles que MN fait avec P et Q.

On peut encore énoncer ce théorème en disant (968) : *Pour que, sur une sphère, un cercle* L *coupe deux cercles* P *et* Q *sous des angles égaux* (*ou supplémentaires*), *il faut et il suffit que son plan contienne le sommet de l'un des cônes qui passent par* P *et* Q.

Si A, B, C *sont trois cercles d'une sphère ayant deux à deux même axe radical* (c'est-à-dire dont les plans passent par une même droite K), *et si un autre cercle* L *se déplace sur la sphère en faisant avec* A *un angle constant* α *et avec* B *un angle constant* β, *ce cercle mobile fera avec* C *un angle constant* γ. En effet, soient L et L_1 deux positions du cercle mobile. A coupant L et L_1 sous le même angle α, son plan passe

par le sommet S de l'un des cônes déterminés par L et L_1 ; pour la même raison, le plan du cercle B passe par S ; donc le point S appartient à la droite K, et, par suite, au plan du cercle C qui, dès lors, coupe L et L_1 sous le même angle.

Il suit de là que, *si un cercle* L *se déplace sur une sphère en coupant respectivement deux cercles* A *et* B *sous des angles constants* α *et* β, *ce cercle mobile reste tangent à deux cercles fixes*. En effet, L_1 étant une position particulière du cercle mobile, menons par la droite K, commune aux plans A et B, un plan qui coupe la sphère suivant un cercle C tangent à L_1 ; le cercle mobile devra, dans toutes ses positions, faire un angle invariable avec C d'après le théorème précédent ; et comme, dans la position particulière L_1, il touche C, c'est-à-dire fait avec C un angle nul (ou égal à deux droits), il devra toucher C dans toutes ses positions. D'ailleurs, par la droite K, on peut mener deux plans coupant la sphère suivant un cercle tangent à L_1 ; donc le cercle mobile touche constamment deux cercles fixes C et C'. Observons enfin que, les cercles A, B, C, C', ayant leurs plans passant par une même droite K, leurs pôles sont sur le grand cercle dont le plan est perpendiculaire à cette droite.

PROBLÈMES RELATIFS AU CONTACT DES CERCLES SUR LA SPHÈRE.

970. 1° *Par deux points donnés* A *et* B, *mener un cercle tangent à un grand cercle donné* KL (*fig.* 183_1).

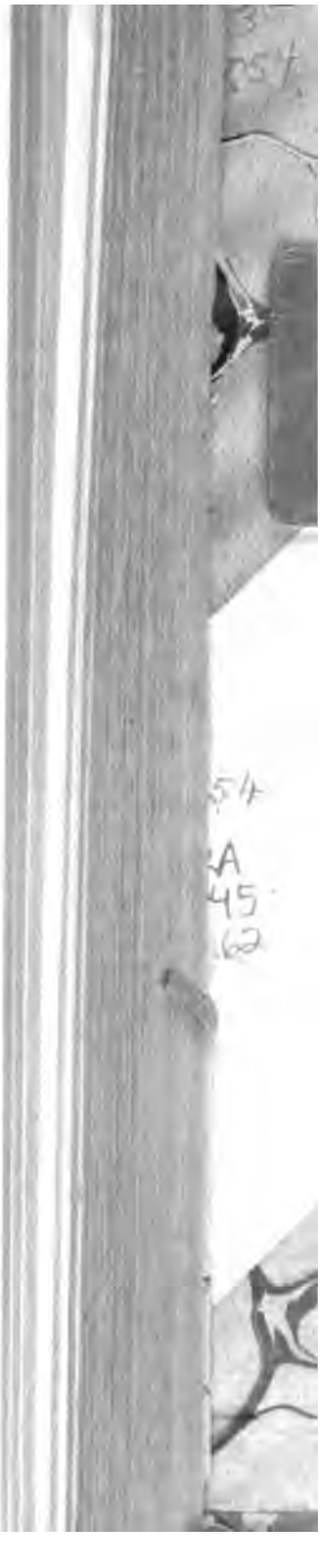
La solution est analogue à celle du problème correspondant de Géométrie plane. On joindra A et B par un arc de grand cercle qu'on prolongera jusqu'à sa rencontre C avec KL. L'inconnue de la question est le point T où le cercle demandé touche KL. Or, la longueur CT étant égale à celle de la tangente sphérique menée du point C à un cercle quelconque tracé par A et B sur la sphère, on déterminera cette longueur à l'aide d'un cercle mené à volonté par A et B, puis on la portera sur KL en CT ou CT', ce qui donnera deux solutions.

2° *Par deux points donnés* B *et* C, *mener un cercle tangent à un petit cercle donné* O (*fig.* 183_2).

Le tracé est le même qu'en Géométrie plane. Par B et C, menez un cercle quelconque qui coupe le cercle donné O en deux points D et E, et du point M, intersection des grands cercles BC, DE, menez deux arcs de grand cercle tangents au cercle O ; A et A' étant les points de contact, il suffira de mener des cercles par B, C, A et par B, C, A', pour avoir les deux solutions du problème.

971. *Mener un cercle tangent à trois cercles donnés sur la sphère.*

Le raisonnement et la construction sont les mêmes qu'au n° 40) ; il suffit de remplacer les droites par des arcs de grand cercle ; il y a huit solutions.



972. ***Décrire sur une sphère un cercle*** **X** ***qui coupe trois cercles donnés*** **A, B, C,** ***sous des angles donnés*** α, β, γ.

Le cercle X, coupant A et B sous des angles constants α et β, est tangent à deux cercles dont les pôles sont sur le grand cercle qui contient les pôles de A et de B (969). En considérant de même A et C, puis B et C, on voit que le cercle X doit être tangent à six cercles. Il suffira donc, pour le déterminer, de connaître trois de ces six cercles et de leur appliquer le problème précédent. Voici comment on obtient l'un des six cercles, par exemple l'un des cercles relatifs au couple (A, B). Ce cercle doit toucher tout cercle L qui coupe A sous l'angle α et B sous l'angle β; il suffira donc d'avoir trois de ces cercles L. Or, pour avoir un cercle L, on se donnera à volonté son rayon sphérique, et, alors, son pôle sera à des distances sphériques déterminées des pôles des cercles A et B.

Le problème correspondant de Géométrie plane a été traité au n° 403 comme application de la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques. On pourrait le résoudre exactement par les principes appliqués ci-dessus en remplaçant les arcs de grand cercle par des droites.

Enfin la méthode précédente s'étend également au problème analogue relatif aux sphères. On voit aisément que *la sphère variable, assujettie à couper deux sphères sous des angles constants, reste tangente à deux sphères fixes dont les centres sont sur la droite des centres des sphères données*. Dès lors, *la sphère qui coupe quatre sphères données sous des angles donnés doit toucher douze sphères,* dont quatre (952) suffiront pour la trouver.

Le triple problème dont nous venons d'esquisser la solution a occupé divers géomètres; mais il avait été résolu, dès 1826, par Steiner (*Journal de Crelle*, t. I) et par Heegmann (*Mémoires de la Société des Sciences de Lille*).

LIVRE VIII.

LES COURBES USUELLES.

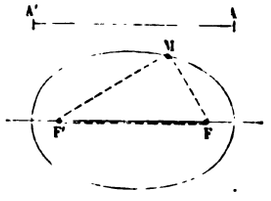
§ I. — PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'ELLIPSE.

973. L'*ellipse* est une courbe plane telle, que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes de son plan est égale à une longueur constante. Ainsi (*fig.* 511), les deux points fixes étant F et F′ et la longueur donnée étant représentée par la droite AA′, on a pour tout point M de l'ellipse

$$MF + MF' = AA'.$$

D'après cela, pour décrire une ellipse d'*un mouvement continu*, on plante sur la feuille de dessin, en F et en F′, deux

Fig. 511.



épingles qu'on entoure d'un fil sans fin (c'est-à-dire dont les deux bouts sont réunis), auquel on donne la longueur totale FF′ + AA′. On tend constamment ce fil à l'aide d'un crayon que l'on fait mouvoir sur le papier jusqu'à ce qu'on soit ramené au point de départ. La pointe du crayon trace évidemment l'ellipse demandée; car, pour une position quelconque M de cette pointe, on a

$$FF' + MF + MF' = FF' + AA' \quad \text{ou} \quad MF + MF' = AA'.$$

Le procédé qu'on vient d'indiquer est surtout applicable sur le terrain : on remplace alors les épingles par des piquets, le fil par une corde et le crayon par un jalon. Nous mentionnerons plus loin d'autres tracés bien préférables au point de vue de l'exécution des épures.

Les points F et F′ sont les *foyers* de l'ellipse, les droites MF et MF′ sont les *rayons vecteurs* du point M. La longueur constante AA′ est ordinairement représentée par $2a$.

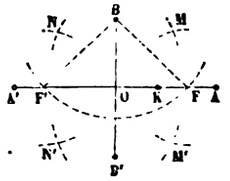
La distance FF′ ou *distance focale* est représentée par $2c$. L'existence du triangle MFF′ entraîne alors la condition $2c < 2a$ ou $c < a$.

Le rapport $\frac{c}{a}$ est l'*excentricité* de l'ellipse. Cette excentricité peut varier de 0 à 1. Pour $c = 0$, elle est nulle, les foyers se confondent et l'ellipse devient un cercle de rayon a. Pour $c = a$, l'excentricité est égale à 1, et l'ellipse se réduit à la portion de droite $FF' = 2a$. Entre ces deux limites, l'ellipse se rapproche d'autant plus de la droite FF′ que son excentricité est plus grande.

974. On peut aussi tracer l'ellipse par points.

En effet, marquons (*fig.* 512) le milieu O de la distance focale

Fig. 512.



FF′ et, de part et d'autre du point O, prenons $OA = OA' = a$, puis un point quelconque K sur AA′. Si des points F et F′ comme centres, avec des rayons respectivement égaux à AK et A′K, nous décrivons des arcs de cercle, leurs points d'intersection M et M′ appartiendront à l'ellipse, puisqu'on aura

$$MF + MF' = M'F + M'F' = AK + A'K = 2a.$$

La distance des centres FF′ étant toujours moindre que la

somme $2a$ des rayons, il suffit, pour l'intersection des deux circonférences, qu'on ait, en supposant K à droite de O,

$$FF' > A'K - AK \quad \text{ou} \quad 2c > 2a - 2AK.$$

La condition cherchée est donc $AK > a - c$ ou $AK > AF$.

D'ailleurs, on peut échanger les centres F et F' sans modifier les rayons employés, de manière à obtenir pour chaque point K quatre points M et M', N et N' de l'ellipse. Les limites des positions du point K sont alors l'un des foyers F et le point O. Tout cela résulte immédiatement de la symétrie de l'équation de condition $MF + MF' = 2a$ par rapport aux deux rayons vecteurs d'un même point.

Si le point K est en O, les points correspondants de l'ellipse sont en B et en B' sur la perpendiculaire élevée à la droite FF' par son milieu. Si le point K est en F, les deux points correspondants de l'ellipse sont en A et en A'. Le rayon vecteur minimum est AF ou $a - c$, le rayon vecteur maximum est A'F ou $a + c$.

THÉORÈME.

973. ***L'ellipse a :*** **1°** ***pour axes, la droite*** **AA'** ***qui passe par ses deux foyers et la droite*** **BB'** ***perpendiculaire au milieu de la première;*** **2°** ***pour centre, l'intersection de ces deux droites.***

On appelle *axe* d'une courbe toute droite par rapport à laquelle les divers points de cette courbe sont symétriques deux à deux; on appelle *centre* d'une courbe tout point par rapport auquel les divers points de cette courbe sont symétriques deux à deux (658).

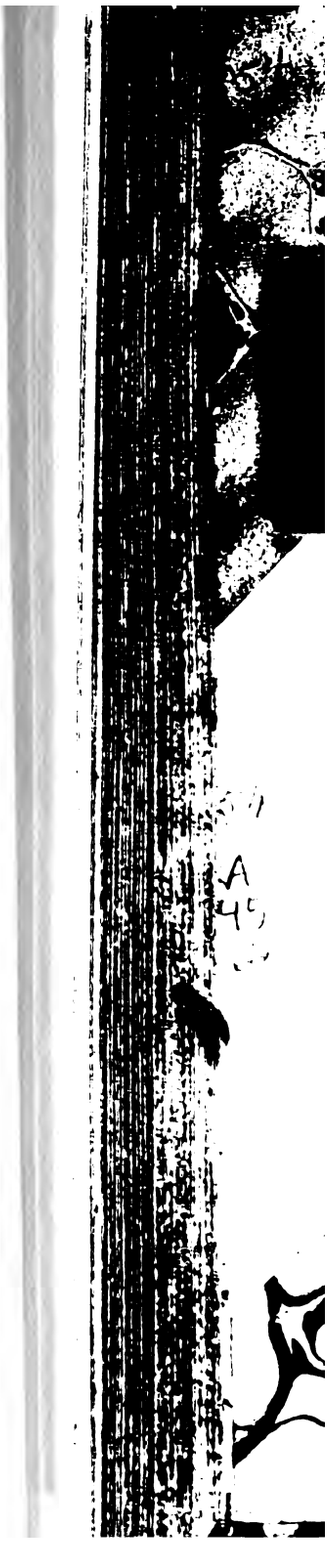
1° Soit M un point de l'ellipse (*fig.* 513); on aura

$$MF + MF' = 2a.$$

Supposons alors que le plan de la figure fasse une demi-révolution autour de AA'. Dans ce mouvement, les foyers restent fixes, le point M vient dans la position symétrique M_1, et, comme le triangle MFF' ne se déforme pas, on a

$$M_1F + M_1F' = 2a,$$

c'est-à-dire que le point M_1 appartient à l'ellipse. Donc à tout



point M de l'ellipse correspond un point M_1, symétrique de M par rapport à AA'.

Si le plan de la figure fait de même une demi-révolution autour de BB', les foyers ne font que s'échanger, le point M vient dans la position symétrique M_2 et, comme le triangle MFF' ne se déforme pas, on a encore

$$M_2F + M_2F' = 2a;$$

ce qui montre qu'à tout point M de l'ellipse correspond un autre point M_2 de la courbe, symétrique de M par rapport à BB'.

Fig. 513.

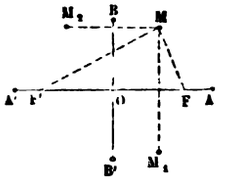


Fig. 514.

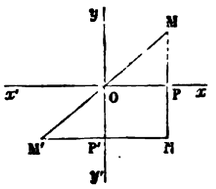
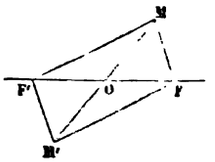


Fig. 515.



2° L'autre partie de la proposition n'est qu'un cas particulier de ce théorème plus général : *Quand une courbe possède deux axes rectangulaires xx' et yy', leur intersection* O *est un centre de la courbe* (*fig.* 514).

Soient M un point de la courbe, M' son symétrique par rapport au point O, et N l'intersection des parallèles menées respectivement aux deux axes par les points M et M'. L'égalité des triangles rectangles MOP, OM'P' donne

$$MP = OP' = PN \quad \text{et} \quad M'P' = OP = P'N.$$

Le point N est donc à la fois symétrique de M par rapport à xx' et symétrique de M' par rapport à yy'. Or, le point N étant sur la courbe comme symétrique de M, le point M' en fait aussi partie comme symétrique de N. Donc à tout point M de la courbe correspond un point M' symétrique de M par rapport à O.

Il résulte de là que le milieu O de la distance focale FF' est un centre de l'ellipse.

On peut d'ailleurs le démontrer directement comme il suit (*fig.* 515).

Soient M un point de l'ellipse et M′ son symétrique par rapport à O; menons les rayons vecteurs de ces points. Les diagonales MM′ et FF′ se coupant mutuellement en parties égales, le quadrilatère MFM′F′ est un parallélogramme, et le point M′ appartient à l'ellipse en vertu de l'égalité des deux contours FMF′ et FM′F′.

COROLLAIRES.

976. On appelle *longueurs* des axes de l'ellipse les longueurs AA′ et BB′ interceptées sur ces axes par la courbe (*fig.* 513). La longueur du premier axe AA′ est donc (974) égale à $2a$, la longueur du second BB′ est représentée par $2b$.

La perpendiculaire BO (*fig.* 513) étant moindre que l'oblique $BF = a$, on a

$$b < a.$$

AA′ est dit alors le *grand axe* et BB′ le *petit axe* de l'ellipse.

Les extrémités A et A′, B et B′ des deux axes sont appelées les *sommets* de la courbe.

Le triangle rectangle BOF (*fig.* 513) donne $a^2 = b^2 + c^2$, relation qui permet de déterminer l'une des trois quantités a, b, c, lorsqu'on connaît les deux autres.

977. Quand on donne les longueurs a et b, il est facile de déterminer graphiquement les foyers : on n'a qu'à décrire de l'extrémité B du petit axe comme centre (*fig.* 513), avec un rayon égal à a, un arc de cercle qui coupe le grand axe aux deux foyers F et F′.

THÉORÈME.

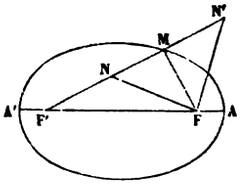
978. *Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à l'ellipse, la somme de ses distances aux deux foyers est plus petite ou plus grande que* $2a$.

Soit d'abord (*fig.* 516) un point N intérieur à l'ellipse. Joignons ce point aux deux foyers, prolongeons F′N jusqu'à la rencontre de la courbe en M, et menons MF. Un théorème connu donne immédiatement

$$NF + NF' < MF + MF' \quad \text{ou} \quad NF + NF' < 2a.$$

Soit de même un point N′ extérieur à l'ellipse. Joignons ce point aux deux foyers; N′F′ coupant la courbe au point M,

Fig. 516.



menons MF. En s'appuyant sur le même théorème, on aura ici

$$N'F + N'F' > MF + MF' \quad \text{ou} \quad N'F + N'F' > 2a.$$

COROLLAIRE.

979. Le théorème précédent, rapproché de la définition de l'ellipse, fournit un critérium pour juger de la position d'un point quelconque du plan de la courbe par rapport à cette courbe supposée non tracée. *Suivant que la somme des distances d'un point aux deux foyers est supérieure, égale ou inférieure à $2a$, ce point est hors de la courbe, sur la courbe ou dans son intérieur.*

THÉORÈME.

980. *La tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs du point de contact, extérieurement à leur angle.*

Prenons sur l'ellipse (*fig.* 517) deux points voisins M et M′: menons la sécante MM′S et les rayons vecteurs des deux points M et M′. Portons sur F′M une longueur F′D = F′M′ et sur FM une longueur FC = FM′. Le segment MD représente alors l'augmentation que subit le rayon vecteur mené du foyer F′ quand on passe du point M au point M′, et MC la diminution que subit le rayon vecteur mené du foyer F quand on passe du même point M au même point M′; comme la somme des rayons vecteurs d'un point de l'ellipse reste constante, MD est égal à MC.

Cela posé, d'un point quelconque G de la sécante MM′S.

menons aux droites M'D et M'C des parallèles GI et GH jusqu'à la rencontre des rayons vecteurs du point M. Le quadrilatère GHMI étant semblable au quadrilatère M'CMD (208), l'égalité de MD et de MC entraîne celle de MI et de MH. D'ailleurs, les droites GH et GI, étant parallèles aux bases M'C et M'D des triangles isocèles CFM', DF'M', sont perpendiculaires aux bissectrices de leurs angles au sommet.

Quand le point mobile M' se rapproche du point fixe M, la sécante MM'S tend vers la tangente au point M. Les bissectrices des angles CFM', DF'M', ayant alors pour limites les rayons vecteurs FM, F'M du point M, les droites GH et GI ont elles-mêmes pour limites les perpendiculaires abaissées du point G sur ces rayons vecteurs. D'ailleurs, pendant ce mouvement, MH et MI varient en restant égaux entre eux.

Fig. 517.

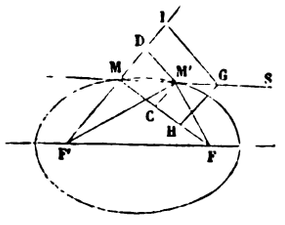
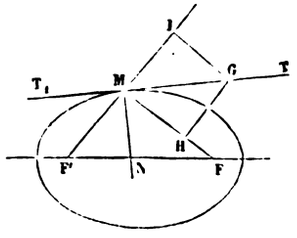


Fig. 518.



On voit, d'après cela, en passant à la limite, que ce qui caractérise la tangente MT au point M (*fig.* 518), c'est que, si, d'un point quelconque G de cette droite, on abaisse des perpendiculaires GH et GI sur les rayons vecteurs MF et MF' du point M, on ait MH = MI. Les triangles rectangles MGH, MGI sont alors égaux, et il en est de même des angles GMH, GMI. *La tangente à l'ellipse est donc bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs du point de contact et le prolongement de l'autre rayon.*

L'angle F'MT, étant l'opposé par le sommet de l'angle GMI, les deux angles GMH ou FMT et F'MT, sont égaux, ce qui vérifie le premier énoncé du théorème.

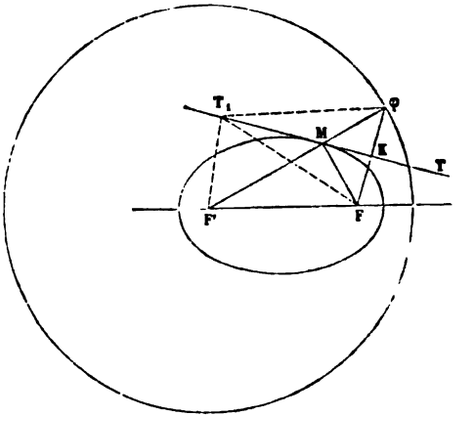
COROLLAIRES.

981. *La droite* F'φ, *qui joint un foyer* F' *de l'ellipse au*

symétrique φ *de l'autre foyer* F *par rapport à une tangente quelconque* TT_1, *passe par le point de contact* M *de cette tangente et est égale à la longueur* $2a$ *du grand axe* (*fig.* 519).

En effet, joignons le point de contact M aux points F', F et φ, et désignons par K le point où $F\varphi$ rencontre la tangente TT_1. L'égalité des triangles MKF, $MK\varphi$, qui ont un angle droit compris entre deux côtés égaux entraîne celle des angles KMF,

Fig. 519.



$KM\varphi$; d'ailleurs, d'après le théorème précédent, le prolongement de F'M doit faire avec MT un angle égal à KMF; donc le prolongement de F'M n'est autre que $M\varphi$, ce qui démontre la première partie de l'énoncé. D'autre part, les mêmes triangles donnent $M\varphi = MF$, d'où l'on déduit

$$F'\varphi = F'M + M\varphi = F'M + MF = 2a.$$

982. *Tous les points de la tangente à l'ellipse sont extérieurs à la courbe, sauf le point de contact.*

En effet, la tangente étant perpendiculaire sur le milieu de $F\varphi$, un point quelconque T_1 de cette droite est équidistant de F et de φ. On a donc, d'après le triangle $F'T_1\varphi$,

$$T_1\varphi + T_1F' \quad \text{ou} \quad T_1F + T_1F' > F'\varphi \quad \text{ou} \quad 2a.$$

Tous les points de la tangente MT, sauf le point M, sont donc extérieurs à l'ellipse (979).

La tangente en un point d'une courbe peut couper la courbe en d'autres points; mais elle a nécessairement (111) avec la courbe au moins un point commun de moins que les droites qui en ont le plus. De ce qu'on vient de démontrer, il résulte donc qu'*une droite ne peut rencontrer l'ellipse en plus de deux points*, c'est-à-dire que *l'ellipse est une courbe convexe*.

983. Si l'on mène au point M (*fig.* 518) la perpendiculaire MN à la tangente MT, les deux angles FMN, F'MN sont égaux comme compléments d'angles égaux. Donc, *la normale à l'ellipse est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs du point de contact*.

La normale en un sommet de l'ellipse se confond avec l'axe correspondant, et la tangente est perpendiculaire à cet axe, de sorte que la courbe est *inscrite* dans le rectangle construit sur ses axes.

Les propriétés précédentes justifient la dénomination de *foyer*. L'angle d'incidence et l'angle de réflexion étant égaux, les rayons lumineux, sonores ou calorifiques, qui partent de l'un des foyers F d'une ellipse, viennent, en vertu d'une loi physique, après leur réflexion sur la courbe, converger à l'autre foyer F'.

THÉORÈME.

984. *Le lieu des symétriques* φ *de l'un des foyers* F *de l'ellipse par rapport aux tangentes est un cercle décrit de l'autre foyer* F' *comme centre, avec la longueur* $2a$ *du grand axe pour rayon* (*fig.* 519).

D'abord, tout point φ du lieu est sur le cercle en question, puisque (981) $F'\varphi$ est égal à $2a$.

Inversement, tout point φ de ce cercle est le symétrique de F par rapport à une certaine tangente à l'ellipse qui a F et F' pour foyers et le rayon $F'\varphi$ pour la longueur de son grand axe. En effet, soit M le point où $F'\varphi$ rencontre la perpendiculaire TT, sur le milieu K de $F\varphi$. L'égalité des triangles KMF, $KM\varphi$, qui ont un angle droit compris entre deux côtés égaux, donne $MF = M\varphi$, d'où l'on déduit $MF' + MF = MF' + M\varphi = F'\varphi$; donc (979) le point M appartient à l'ellipse. Les mêmes triangles entraînent, en outre, l'égalité des angles KMF, $KM\varphi$, et

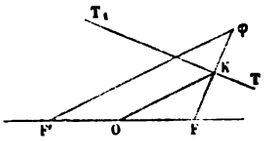
par suite celle des angles KMF, T_1MF'. Donc, la droite TT_1 est la tangente à l'ellipse en M (980). Donc, enfin, le point φ du cercle est le symétrique de F par rapport à la tangente KT_1.

On donne au cercle $F'\varphi$ le nom de *cercle directeur relatif au foyer* F'. Au foyer F répond aussi un cercle directeur de même rayon $2a$.

THÉORÈME.

985. *Le lieu des projections des foyers d'une ellipse sur ses tangentes est la circonférence de cercle décrite sur le grand axe comme diamètre.*

Fig. 520.



Soient (*fig.* 520) F et F' les deux foyers, K la projection du foyer F sur une tangente quelconque TT_1 et φ le symétrique de F par rapport à cette tangente. Le côté $F'\varphi$ du triangle $FF'\varphi$ étant égal à $2a$ (981), la droite OK qui joint les milieux des deux autres côtés est égale à a. Le point K appartient donc à la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre.

Réciproquement, tout point K de cette circonférence est la projection de l'un des foyers F sur une tangente; car, si l'on prolonge FK d'une quantité $K\varphi = KF$, on aura

$$F'\varphi = 2OK = 2a.$$

Par suite le point φ appartient au cercle directeur relatif au foyer F', et l'on a démontré au n° 984 que tout point de ce cercle est le symétrique de F par rapport à une tangente à l'ellipse.

Le cercle OK est dit le *cercle principal* de l'ellipse.

Scolie.

986. *Si le sommet d'une équerre décrit le cercle principal d'une ellipse, pendant que l'un de ses côtés passe constamment par un foyer de la courbe, l'autre côté de l'équerre lui reste toujours tangent.*

THÉORÈME.

987. 1° *Le lieu des points équidistants d'un cercle de centre* **F'** *et d'un point intérieur* **F** *est une ellipse dont les points* **F** *et* **F'** *sont les foyers et dont le grand axe est égal au rayon du cercle* (*fig.* 519).

En effet, soit **M** un point du lieu; sa distance à la circonférence est égale au segment **M**φ obtenu en prolongeant le rayon **F'M** jusqu'à sa rencontre avec cette ligne. On a donc $MF = M\varphi$, et par suite $F'M + MF = F'M + M\varphi = F'\varphi$. Le point **M** appartient donc à l'ellipse définie dans l'énoncé.

Inversement, tout point **M** de cette ellipse est équidistant de la circonférence et du point **F**; car, puisque **F'M** + **MF** est égal à **F'**φ, c'est-à-dire à **F'M** + **M**φ, c'est que **MF** est égal à **M**φ.

2° *La tangente en un point quelconque* **M** *du lieu est perpendiculaire sur le milieu* **K** *de la droite qui joint le point intérieur* **F** *à l'extrémité* φ *du rayon* **F'M** *passant par* **M**.

En effet, la tangente doit être également inclinée sur **MF** et **MF'**, ou, ce qui revient au même, être la bissectrice de l'angle φ**MF**, et, comme ce triangle est isocèle, elle est perpendiculaire sur le milieu de la base **F**φ.

988. De là résulte, pour l'ellipse, un nouveau tracé donnant à la fois le point et la tangente :

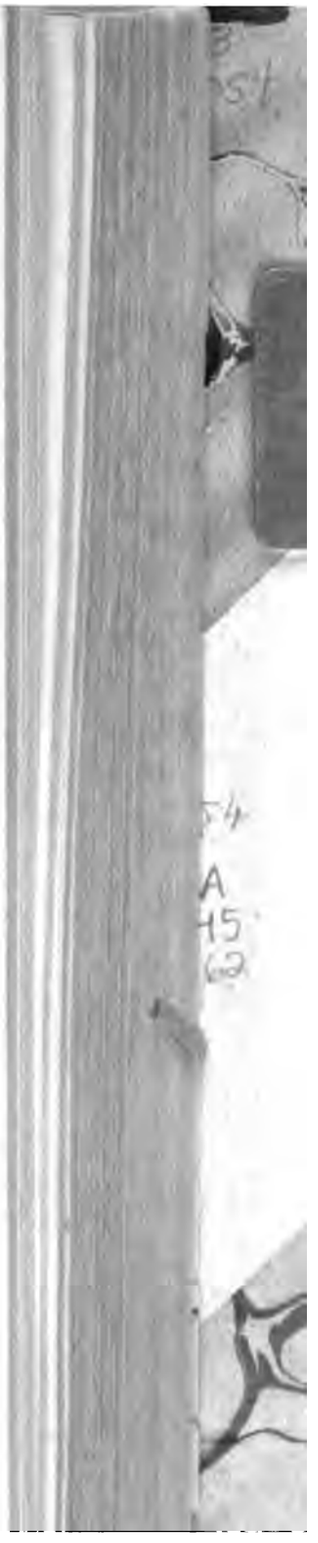
De l'un des foyers **F'**, *comme centre, décrivez un cercle de rayon égal à* $2a$; *joignez l'autre foyer* **F** *à un point quelconque* φ *de ce cercle, et menez la perpendiculaire* **TT'**, *sur le milieu de* **F**φ; *cette perpendiculaire coupe le rayon* **F'**φ *en un point* **M** *du lieu, et elle est en outre la tangente en ce point.*

PROBLÈME.

989. *Mener une tangente à l'ellipse par un point donné.*

1° *Si le point donné* **M** *est sur la courbe,* on le joint aux deux foyers (*fig.* 518), et l'on mène la bissectrice de l'angle **FMI** formé par l'un des rayons vecteurs **MF** et le prolongement **MI** de l'autre rayon **MF'** (980).

2° *Si le point donné* **P** *est extérieur à l'ellipse* (*fig.* 521), on remarque que la question serait résolue, si l'on connaissait le symétrique φ de l'un des foyers **F** par rapport à la tan-



gente cherchée; car on aurait des lors cette tangente en abaissant de P une perpendiculaire TT_1 sur $F\varphi$: la droite TT_1 couperait d'ailleurs $F'\varphi$ au point de contact M (988). Or, le point φ se trouve à la fois sur le cercle directeur relatif au foyer F' (984) et sur le cercle de centre P et de rayon PF.

Pour que ces deux cercles se coupent, c'est-à-dire pour que le triangle $F'P\varphi$ existe, il faut et il suffit que chacun des côtés PF', $P\varphi = PF$, $F'\varphi = 2a$, soit moindre que la somme des deux autres; de là les inégalités

$$PF' < 2a + PF, \quad PF < 2a + PF', \quad 2a < PF + PF'.$$

Les deux premières sont satisfaites d'elles-mêmes, puisque a est plus grand que c et que le triangle PFF' donne

$$PF' < 2c + PF, \; PF < 2c + PF';$$

il ne reste donc que la troisième condition, qui (979) exprime que le point P doit être extérieur à l'ellipse.

Fig. 521.

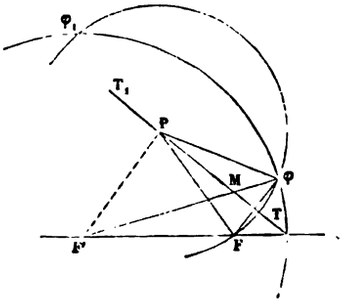
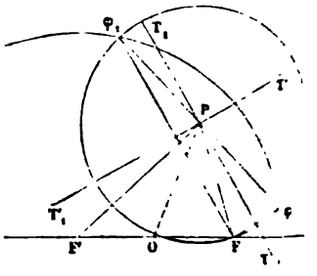


Fig. 522.



Comme les circonférences tracées se coupent en deux points φ et φ_1, il y a deux solutions qui se réduisent à une seule lorsqu'on a $PF + PF' = 2a$, c'est-à-dire lorsque le point P est sur la courbe.

COROLLAIRES.

990. Cherchons la condition pour que les deux tangentes menées du point P à l'ellipse soient à angle droit.

Si les deux tangentes TT_1, $T'T'_1$, menées du point P, sont à angle droit (*fig.* 522), comme elles sont respectivement perpendiculaires sur le milieu des droites $F\varphi$, $F\varphi_1$, l'angle $\varphi F\varphi_1$ de ces deux droites doit être lui-même un angle droit. Cet angle étant inscrit dans la circonférence PF dont le centre est P, la droite $\varphi\varphi_1$ est un diamètre de cette circonférence, et P est le milieu de ce diamètre.

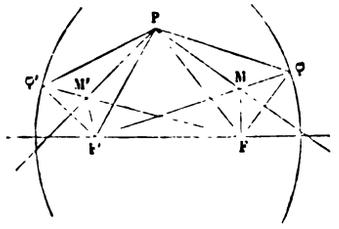
Le lieu du point P est donc le lieu décrit par le milieu de la corde interceptée dans le cercle directeur relatif au foyer F', par un angle droit tournant autour de son sommet fixe F. Or, si l'on joint le point P aux foyers F et F', on a $P\varphi = PF$, et le triangle rectangle $F'P\varphi$ donne alors

$$\overline{PF'}^2 + \overline{P\varphi}^2 = \overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 = \overline{F'\varphi}^2 = 4a^2.$$

La somme des carrés des distances du point P aux points F et F' étant constante, *le lieu des sommets* P *des angles droits circonscrits à l'ellipse est une circonférence concentrique à cette courbe* (232). Le rayon de ce cercle est d'ailleurs égal à $\sqrt{a^2+b^2}$, puisque les sommets du rectangle construit sur les axes appartiennent évidemment au lieu.

991. *Les tangentes* PM, PM', *menées à l'ellipse par un point extérieur* P, *font des angles égaux avec les droites qui vont du point* P *aux deux foyers; la droite qui va du point* P *à l'un des foyers est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs qui vont de ce foyer aux deux points de contact* M *et* M' (*fig.* 523).

Fig. 523.



Menons les deux cercles directeurs de l'ellipse. φ étant le symétrique de F par rapport à la tangente PM et φ' le symé-

trique de F′ par rapport à la tangente PM′, les deux triangles PFφ′ et PF′φ sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Les angles FPφ′ et F′Pφ sont donc égaux. Si l'on enlève la partie commune FPF′, les restes FPφ, F′Pφ′ sont égaux, ainsi que leurs moitiés MPF, M′PF′.

En second lieu, l'égalité des triangles PFφ′, PF′φ, entraîne celle des angles PFφ′, PφF′. Mais les deux triangles PMφ, PMF étant égaux, l'angle PφF′ est aussi égal à l'angle PFM, et la droite PF est la bissectrice de l'angle MFM′.

PROBLÈME.

992. *Mener à l'ellipse une tangente parallèle à une droite donnée.*

Tout revient encore à trouver le point symétrique φ de l'un des foyers F par rapport à la tangente cherchée. Or, ce point est à l'intersection du cercle directeur relatif au foyer F′ (984) et de la perpendiculaire menée du foyer F sur la droite donnée DD′ (*fig.* 524). Cette perpendiculaire coupe toujours le

Fig. 524.

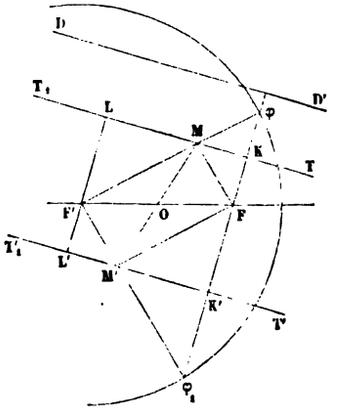
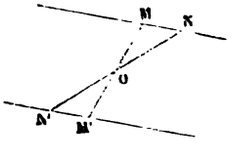


Fig. 525.



cercle F′ en deux points φ et φ₁, puisque le point F est intérieur à ce cercle. Les perpendiculaires TT₁ et T′T′₁ élevées aux droites Fφ et Fφ₁ par leurs milieux sont les tangentes demandées, et leurs points de contact M et M′ sont à leurs rencontres respectives avec les rayons F′φ et F′φ₁ (988).

COROLLAIRES.

993. *Les deux points de contact* M *et* M′ *des deux tangentes parallèles* TT_1, $T'T'_1$ *sont symétriques par rapport au centre* O *de l'ellipse.*

En effet, les triangles $FM\varphi$, $FM'\varphi_1$, $\varphi F'\varphi_1$ sont des triangles isocèles ayant tous un angle égal à la base; ils sont donc semblables et ont leurs côtés parallèles. La figure MFM′F′ étant un parallélogramme, la diagonale MM′ passe par le milieu O de la diagonale FF′ et y est divisée en deux parties égales.

Inversement, *les tangentes menées à l'ellipse en deux points symétriques par rapport au centre sont parallèles.* Car le quadrilatère MFM′F′ étant dans ce cas un parallélogramme, puisque ses diagonales se coupent en parties égales, les angles $FM\varphi$, $FM'\varphi_1$ ont leurs côtés parallèles et sont égaux. Il en est donc de même de leurs moitiés (980) FMT, $\varphi_1 M'T'$, ce qui entraîne le parallélisme des tangentes MT, M′T′, aux points M et M′.

994. La propriété précédente appartient d'ailleurs à toutes les courbes à centre. *Dans toute courbe à centre, les tangentes en deux points* M *et* M′ *symétriques par rapport au centre* O *sont parallèles et, par suite, équidistantes du centre.*

En effet, si N (*fig.* 525) est un point de la courbe voisin de M, et N′ son symétrique par rapport à O, l'égalité des triangles MON, M′ON′, prouve le parallélisme des cordes ou sécantes MN, M′N′, et leur égale distance au centre. Quand N tend vers M, N′ tend vers M′. Les deux sécantes tournent donc à la fois autour des points M et M′, de manière à devenir ensemble tangentes, en restant toujours parallèles et équidistantes du centre.

995. Les points K et K′ (*fig.* 524) appartiennent au cercle principal de l'ellipse (985). Les deux segments FK, FK′, étant alors ceux d'une corde quelconque de ce cercle passant par le foyer F, leur produit est constant. On peut donc dire que *le produit des distances d'un foyer à deux tangentes parallèles est constant.* Si l'on mène par le foyer F′ la corde LL′ du cercle principal qui est parallèle à KK′, on a évidemment FK′ = F′L. On peut donc dire aussi que *le produit des distances des deux*

foyers à une même tangente est constant. Si l'on veut connaître cette constante, il suffit de considérer la tangente à l'une des extrémités du petit axe, et l'on obtient immédiatement le carré du demi-petit axe b^2 pour sa valeur.

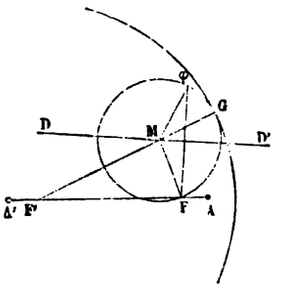
SCOLIE.

996. Les constructions des nos 989 et 992 n'exigent pas que la courbe soit tracée.

PROBLÈME.

997. *Étant donnés les foyers* F *et* F′ *et le grand axe* AA′ *d'une ellipse, déterminer ses points de rencontre avec une droite* DD′ (*fig.* 526).

Fig. 526.



Supposons le problème résolu, et déterminons le symétrique φ du foyer F par rapport à DD′. M étant l'un des points de rencontre de la droite DD′ avec l'ellipse, on aura $M\varphi = MF$. Prolongeons F′M d'une longueur $MG = MF$; F′G sera égal à AA′, et le point G appartiendra au cercle directeur relatif au foyer F′. Le cercle décrit du point M comme centre avec MF pour rayon passe donc par les deux points F et φ et est tangent au cercle directeur F′G. La question est ainsi ramenée à trouver le centre M d'un cercle passant par deux points donnés F et φ et tangent à un cercle donné F′G. Nous avons résolu ce problème (262, 2°).

Comme le foyer F est intérieur au cercle directeur relatif au foyer F′, il y aura évidemment deux solutions, une seule ou zéro, suivant que le point φ sera lui-même intérieur, commun ou extérieur au cercle directeur F′G. La droite DD′ *cou-*

pera donc l'ellipse en deux points, lui sera tangente ou *extérieure,* suivant les mêmes conditions (¹).

COROLLAIRE.

998. *Une droite ne pouvant rencontrer une ellipse en plus de deux points, l'ellipse est une courbe convexe* (982).

§ II. — PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'HYBERBOLE.

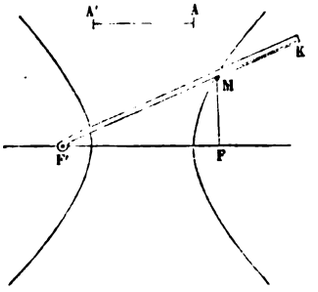
999. L'*hyberbole* est une courbe plane telle, que la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes de son plan est égale à une longueur constante. Ainsi (*fig.* 527), les deux points fixes étant F et F′ et la longueur donnée étant représentée par la droite AA′, on aura pour tout point M de l'hyperbole

$$MF - MF' = \pm AA',$$

suivant que le point considéré sera plus éloigné du point F ou du point F′.

D'après cela, pour décrire un arc d'hyperbole d'un *mouvement continu,* on prend une règle F′K dont on fixe l'une des extrémités au point F′ (*fig.* 527), de manière qu'elle puisse seulement tourner autour de ce point. Un fil dont la longueur est moindre que celle de la règle de la constante AA′ est fixé

Fig. 527.



(¹) Quand la droite DD′ est tangente, φ est en G; en d'autres termes, G est alors le symétrique de F par rapport à DD′; donc DD′ est la bissectrice de l'angle GMF, ce qui fournit une seconde démonstration de la propriété fondamentale de la tangente. Mais cette démonstration a, comme beaucoup d'autres plus ou moins ingénieuses, le tort d'être *particulière;* celle que nous avons donnée au n° 980 est bien préférable, car elle consiste dans l'application à l'ellipse de la méthode *générale* pour la détermination des tangentes dans le système bipolaire.

par l'une des ses extrémités au point F et, par l'autre, au point K. Si l'on tend alors constamment ce fil le long de la règle à l'aide d'un crayon, en faisant tourner la règle autour de F′, la pointe du crayon trace un arc de l'hyperbole demandée; car, pour une position quelconque M de cette pointe, on a (dans le cas de la figure)

$$MF' - MF = (MF' + MK) - (MF + MK) = AA'.$$

En prenant pour centre de rotation de la règle le point F, et en attachant la seconde extrémité du fil au point F′, on obtient la seconde partie de la courbe. Quand la règle est au-dessus de FF′, le fil doit être tendu contre son arête inférieure; c'est l'inverse quand la règle est au-dessous de FF′.

On voit que l'hyperbole est formée de deux parties qui ne peuvent avoir aucun point commun, puisqu'on a toujours, pour la partie de droite de la figure, $MF' > MF$, et pour celle de gauche, $MF > MF'$. Chaque partie, c'est-à-dire chacune des deux *branches*, s'étend indéfiniment au-dessus et au-dessous de la droite FF′; rien ne limite en effet l'éloignement des points obtenus sur la courbe, que la longueur même de la règle et du fil employés.

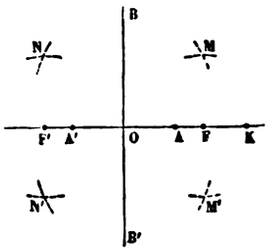
1000. Les points F et F′ sont les *foyers* de l'hyperbole, les droites MF et MF′ sont les *rayons vecteurs* du point M. La longueur AA′ est ordinairement représentée par $2a$. La distance FF′ se nomme *distance focale* et on la représente par $2c$. L'existence du triangle MFF′ entraîne la condition $2c > 2a$ ou $c > a$.

Le rapport $\frac{c}{a}$ est l'*excentricité* de l'hyperbole. Cette excentricité peut varier de 1 à ∞. Pour $c = a$, elle est égale à 1, et l'hyperbole se réduit aux deux portions de la droite FF′ qui sont séparées par la distance FF′; pour $a = 0$, elle est infinie, et l'hyperbole se réduit à la perpendiculaire élevée sur le milieu de FF′. Entre ces deux limites, l'hyperbole se rapproche d'autant plus de la droite FF′ que l'excentricité est plus petite.

1001. On peut aussi tracer l'hyperbole *par points* (*fig.* 528). En effet, marquons le milieu O de la distance focale FF′ et, de part et d'autre du point O, prenons $OA = OA' = a$, puis un point K quelconque sur le prolongement de OA. Si des

points F et F′ comme centre, avec des rayons respectivement égaux à AK et à A′K, nous décrivons des arcs de cercle, leurs

Fig. 528.



points d'intersection M et M′ appartiendront à l'hyperbole, car on aura

$$MF' - MF = M'F' - M'F = A'K - AK = 2a.$$

La distance des centres FF′ étant toujours plus grande que la différence $2a$ des rayons, il suffit, pour l'intersection des deux circonférences, que cette distance soit moindre que la somme des rayons, c'est-à-dire qu'on ait

$$FF' < AK + A'K \quad \text{ou} \quad 2c < 2AK + 2a.$$

La condition cherchée est donc

$$AK > c - a \quad \text{ou} \quad AK > AF.$$

Comme on peut échanger les centres sans modifier les rayons, chaque point K permet d'obtenir quatre points M et M′, N et N′ de l'hyperbole. Le point K doit seulement être au delà du point F, sans que rien limite sa position à droite de ce point. Ce que nous venons de dire résulte d'ailleurs de la symétrie de l'équation de condition $MF' - MF = \pm 2a$, par rapport aux deux rayons vecteurs.

Si le point K est en F, les points correspondants de l'hyperbole sont les points A et A′. Le rayon vecteur minimum est $c - a$; il n'y a pas de rayon vecteur maximum, puisque les rayons vecteurs d'un point de la courbe peuvent croître jusqu'à l'infini.

THÉORÈME.

1002. *L'hyperbole a :* 1° *pour axes, la droite* AA′ *qui passe par ses deux foyers, et la droite* BB′ *perpendiculaire au milieu de la première;* 2° *pour centre, l'intersection* O *de ces deux droites* (*fig.* 528).

Même démonstration que pour l'ellipse (975), en considérant la différence des rayons vecteurs au lieu de leur somme.

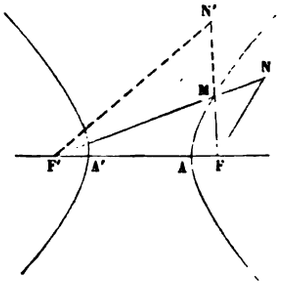
1003. Des deux axes AA′ et BB′, le premier seul rencontre la courbe. L'axe AA′ est dit l'axe *transverse* de l'hyperbole, l'axe BB′ est dit son axe *non transverse*. Les extrémités A et A′ de l'axe transverse sont les *sommets* de la courbe.

Un point du plan est dit *extérieur* à l'hyperbole lorsqu'il est situé entre les deux branches (F) et (F′); il est dit *intérieur* s'il est placé soit à gauche de la branche (F′), soit à droite de la branche (F).

THÉORÈME.

1004. *Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à l'hyperbole, la différence de ses distances aux deux foyers est plus grande ou plus petite que* 2*a* (*fig.* 529).

Fig. 529.



Soit N un point intérieur et supposons, pour fixer les idées, qu'il soit à droite de la branche (F); NF′ coupera cette branche en un point M, et on aura

$$NF < MN + MF, \quad \text{d'où} \quad NF' - NF > NF' - MN - MF,$$

c'est-à-dire

$$NF' - NF > MF' - MF \quad \text{ou} \quad 2a.$$

Soit N′ un point extérieur; N′F coupera la branche (F) en un point M, et on aura

$$N'F' - MN' < MF', \quad \text{d'où} \quad N'F' - MN' - MF < MF' - MF,$$

c'est-à-dire

$$N'F' - N'F < 2a.$$

COROLLAIRE.

1005. Ce théorème, rapproché de la définition de la courbe, fournit un critérium pour juger de la position d'un point quelconque de son plan par rapport à l'hyperbole supposée non tracée. ***Suivant que la différence des distances du point considéré aux deux foyers est inférieure, égale ou supérieure à 2a, ce point est hors de la courbe, sur la courbe ou dans son intérieur.***

THÉORÈME.

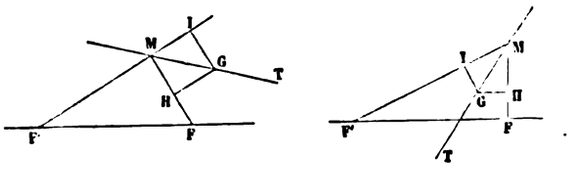
1006. ***La tangente à l'hyperbole est la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs du point de contact*** (*fig.* 530, 531).

Même démonstration que pour l'ellipse (980), en remarquant que dans l'ellipse les rayons vecteurs d'un même point varient en sens contraires, tandis que dans l'hyperbole ils varient dans le même sens.

1007. RÉCIPROQUEMENT, *la courbe dont la tangente fait des angles égaux, extérieurement ou intérieurement, avec les rayons vecteurs menés du point de contact à deux points fixes, est une ellipse ou une hyperbole dont ces points fixes sont les foyers.*

En effet, si l'on abaisse d'un point G de la tangente MT (*fig.* 530) des

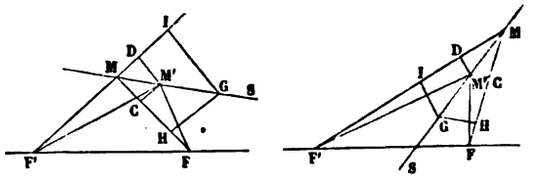
Fig. 530.



perpendiculaires GH et GI sur les rayons vecteurs du point M, les triangles rectangles ainsi formés seront égaux, puisque la tangente est, par hypothèse, la bissectrice de l'angle HMI; on aura donc MH = MI.

Considérons maintenant la sécante MM'S (*fig.* 531) qui coupe la courbe en M et en M', et portons les rayons vecteurs du point M' sur ceux du point M en FC et en F'D. Si l'on mène alors d'un point G quelconque de

Fig. 351.



la sécante les parallèles GH et GI à M'C et à M'D, les quadrilatères M'CMD, GHMI, seront semblables, et l'on aura constamment

$$\frac{MC}{MD} = \frac{MH}{MI}.$$

Mais à la limite, quand le point M' vient en M, la sécante MM'S est remplacée par la tangente MT, et l'on a MH = MI. Donc la limite du rapport $\frac{MC}{MD}$ est aussi l'unité.

Cela posé, soient P et Q deux points quelconques de la courbe, mais tels qu'en allant de P en Q le rayon vecteur relatif au foyer F aille toujours en croissant; alors le rayon vecteur relatif au foyer F' ira toujours en décroissant ou toujours en croissant. Concevons l'arc PQ divisé en n parties telles, que, lorsque n croît indéfiniment, chacune des parties tende vers zéro; désignons par u et v les rayons vecteurs de P, par u' et v' ceux de Q, et par (u_1, v_1), (u_2, v_2), ..., (u_{n-1}, v_{n-1}), ceux des points intermédiaires.

Si les rayons vecteurs $v, v_1, \ldots, v_{n-1}, v'$, relatifs au foyer F', vont en croissant, les rapports

$$\frac{u_1 - u}{v_1 - v}, \quad \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1}, \quad \ldots, \quad \frac{u' - u_{n-1}}{v' - v_{n-1}},$$

auront tous l'unité pour limite, lorsque n croîtra indéfiniment; et comme le rapport

$$\frac{u' - u}{v' - v},$$

obtenu en divisant la somme des numérateurs par celle des dénominateurs, a une valeur comprise entre celles des premiers, il faut qu'on ait

$$\frac{u' - u}{v' - v} = 1, \quad \text{d'où} \quad u' - v' = u - v.$$

La courbe est donc une hyperbole, puisque la différence des rayons vecteurs reste constante.

Si les rayons vecteurs $v, v_1, \ldots, v_{n-1}, v'$ relatifs au foyer F′ vont en décroissant, le raisonnement subsiste, à la condition de changer les signes des dénominateurs; on arrive ainsi à

$$\frac{u'-u}{v-v'} = 1, \quad \text{d'où} \quad u'+v' = u+v.$$

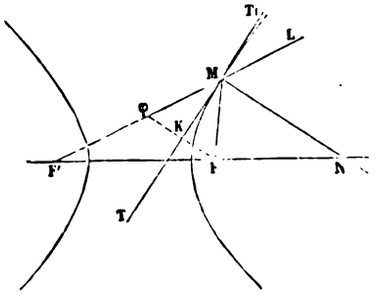
La courbe est donc une ellipse, puisque la somme des rayons vecteurs reste constante.

Enfin, si l'arc PQ était trop étendu pour que les rayons vecteurs relatifs au foyer F varient toujours dans le même sens, on décomposerait cet arc en plusieurs parties satisfaisant à la condition, et la somme (ou la différence) des rayons vecteurs restant constante dans chaque partie serait la même à l'origine P et à l'extrémité Q.

COROLLAIRES.

1008. 1° *La droite* F′φ *qui joint un foyer* F′ *de l'hyperbole au symétrique* φ *de l'autre foyer* F *par rapport à une tangente quelconque* TT₁ *passe par le point de contact de cette tangente et est égale à la longueur* 2*a de l'axe transverse* (*fig.* 532).

Fig. 532.



2° *Tous les points de la tangente* MT, *sauf le point* M, *sont extérieurs à l'hyperbole, qui est, par suite, une courbe convexe.*

Mêmes démonstrations que pour l'ellipse (981, 982), en remplaçant la somme des rayons vecteurs par leur différence.

1009. Si l'on mène au point M (*fig.* 532) une perpendiculaire MN à la tangente MT, les angles FMN, LMN sont égaux

comme compléments d'angles égaux. Donc, *la normale à l'hyperbole est la bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs du point de contact et le prolongement de l'autre rayon.*

La normale en un sommet de l'hyperbole se confond avec l'axe transverse, et la tangente est perpendiculaire à cet axe.

Si une ellipse et une hyperbole ont les mêmes foyers ou sont *homofocales*, elles se coupent à angle droit; car, en l'un quelconque des points d'intersection, la tangente de l'une est la normale de l'autre (980, 983).

Dans le cas de l'hyperbole, les rayons lumineux, sonores ou calorifiques, qui partent de l'un des foyers F, s'éloignent de plus en plus de l'autre foyer F' après leur réflexion sur la courbe; mais toutes leurs directions prolongées viennent y converger.

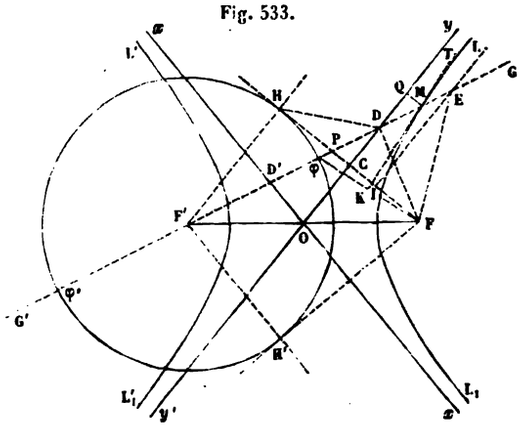
THÉORÈME.

1010. *Le lieu des points symétriques* φ *de l'un des foyers* F *par rapport aux tangentes est un cercle* (*directeur*) *décrit de l'autre foyer* F' *comme centre avec la longueur* 2*a de l'axe transverse pour rayon* (*fig.* 532) [984].

THÉORÈME.

1011. *Le lieu des projections des foyers d'une hyperbole sur ses tangentes est la circonférence décrite sur l'axe transverse comme diamètre* (*fig.* 532).

Fig. 533.



On donne à cette circonférence le nom de *cercle principal*.
Même démonstration que pour l'ellipse (985).

THÉORÈME.

1012. *Le lieu des points équidistants d'un cercle de centre* F′ *et d'un point extérieur* F *est une hyperbole dont les points* F *et* F′ *sont les foyers, et dont l'axe transverse est égal au rayon du cercle* (*fig.* 533).

La tangente en un point quelconque M *du lieu est la perpendiculaire sur le milieu* K *de la droite qui joint le point* F *à l'extrémité du rayon* F′φ *passant par* M.

Comme pour l'ellipse (987).

COROLLAIRE.

1013. De là, pour l'hyperbole, un nouveau tracé donnant à la fois le point et la tangente.

Décrivez le cercle directeur relatif à l'un des foyers F′, c'est-à-dire le cercle dont le centre est F′ et dont le rayon est égal à $2a$; *joignez l'autre foyer* F *à un point quelconque* φ *de ce cercle, et menez la perpendiculaire* KT *sur le milieu de* Fφ; *cette perpendiculaire rencontre le rayon* F′φ *en un point* M *de l'hyperbole et elle est en outre la tangente en ce point.*

Il suit de cette construction que, sur toute droite indéfinie GG′ passant par F′, il y a deux points de l'hyperbole et seulement deux; ils correspondent aux deux points φ et φ′ où le diamètre GG′ coupe le cercle directeur.

SCOLIE.

1014. Une droite OY est dite *asymptote* d'une branche infinie de courbe AL, si la distance MP d'un point quelconque M de la courbe à la droite tend vers zéro quand le point M s'éloigne indéfiniment en restant sur la courbe.

THÉORÈME.

1015. *L'hyperbole a pour asymptotes les perpendiculaires* Ox *et* Oy *abaissées du centre* O *sur les tangentes* FH′, FH, *menées par l'un des foyers* F *au cercle directeur relatif à l'autre foyer* F′ (*fig.* 533).

En effet, remarquons d'abord que tout point de chacune des droites xx' et yy' est extérieur à la courbe, car, soit D, par exemple, un point quelconque de yy'; cette droite, étant parallèle à F'H et passant par le milieu de FF', passe par le milieu de FH; on a donc DF = DH, et, par suite,

$$DF' - DF = DF' - DH < F'H \quad \text{ou} \quad 2a.$$

En second lieu, il est facile de voir que, P désignant le point commun à GG' et HF, le point E où GG' rencontre la perpendiculaire élevée sur le milieu I de PF est intérieur à la courbe. Car on a

$$EF' - EF = EF' - EP = F'P > 2a.$$

On conclut de là, en désignant par D' et D les points où GG' coupe xx' et yy', que les *deux* points (1013) M' et M, où GG' rencontre l'hyperbole, sont situés, l'un entre F' et D', l'autre entre D et E; car, en allant de F' en D', on passe de l'intérieur à l'extérieur, et en allant de D en E, on passe de l'extérieur à l'intérieur.

Cela posé, considérons, par exemple, le point M correspondant au point φ du cercle directeur : pour que ce point s'éloigne indéfiniment sur la courbe, il faut et il suffit que les deux droites F'φ et KT, dont il est l'intersection, deviennent parallèles; et, comme la seconde est sans cesse perpendiculaire à Fφ, il faut et il suffit que Fφ devienne perpendiculaire à F'φ, c'est-à-dire devienne la tangente FH au cercle directeur. Mais lorsque φ tend vers H, PH tend vers zéro, et, comme on a

$$\tfrac{1}{2}PH = \tfrac{1}{2}FH - \tfrac{1}{2}FP = FC - FI = IC,$$

IC tend aussi vers zéro; or, d'après l'alinéa précédent, le point M est situé entre D et E; sa distance MQ à Oy est donc moindre que IC; donc MQ a pour limite zéro, et par suite Oy est asymptote (1).

Scolies.

1016. Il importe de remarquer que *l'asymptote* Oy *est la*

(1) Cette ingénieuse démonstration nous a été communiquée par M. Lenglier, proviseur au lycée Charlemagne.

limite vers laquelle tend la tangente KT *au point* M, *quand* M *s'éloigne indéfiniment sur la courbe;* car la tangente KM, étant sans cesse perpendiculaire sur le milieu de Fφ, devient à la limite la perpendiculaire élevée sur le milieu de FH.

1017. La droite OKy étant parallèle à F'H et égale à sa moitié a, on voit que le cercle principal AA' (*fig.* 534) touche au point K la tangente FH au cercle directeur.

Fig. 534.

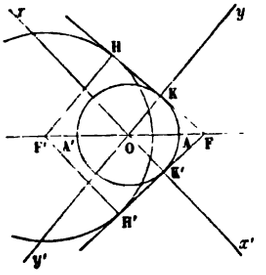
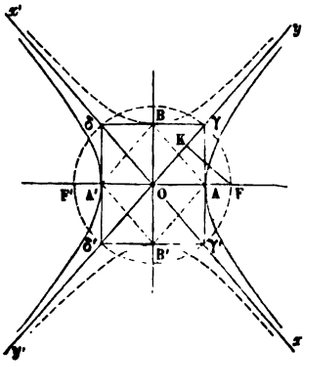


Fig. 535.



Menons (*fig.* 535) Aγ perpendiculaire à FF' jusqu'à sa rencontre avec l'asymptote Oy; puisqu'on a OK $= a =$ OA, les triangles rectangles OAγ, OKF sont égaux, et l'on en conclut Oγ = OF $= c$.

Achevons le rectangle $\gamma\gamma'\delta\delta'$, et soient B et B' les points où l'axe non transverse rencontre $\gamma\delta$ et $\gamma'\delta'$; par analogie avec l'ellipse, on donne à la longueur BB' le nom de *longueur de l'axe non transverse de l'hyperbole,* et on la représente par $2b$.

Les trois longueurs a, b, c sont liées entre elles par la relation $c^2 = a^2 + b^2$. Elles sont liées dans l'ellipse par la relation $c^2 = a^2 - b^2$, qui ne diffère de la précédente que par le changement de b^2 en $-b^2$. Par suite, *les propriétés de l'ellipse et de l'hyperbole qui ne dépendent que des longueurs de leurs axes se déduisent les unes des autres par le simple changement de* b^2 *en* $-b^2$.

Lorsqu'on donne les longueurs des axes de l'hyperbole, il est facile de déterminer graphiquement les foyers. On n'a qu'à élever à l'extrémité A de l'axe transverse une perpendiculaire $A\gamma = b$ (*fig.* 535) et à décrire du point O comme centre, avec $O\gamma$ pour rayon, une circonférence qui coupe l'axe transverse aux deux foyers F et F'. On trouve en même temps l'asymptote $O\gamma$ et sa symétrique $O\gamma'$.

1018. On appelle hyperbole *équilatère* une hyperbole dont les deux axes ont la même longueur. Le rectangle $\gamma\gamma'\delta\delta'$ (*fig.* 535) devenant alors un carré, on voit que *les asymptotes d'une hyperbole équilatère sont à angle droit l'une sur l'autre.*

1019. On entend par *hyperboles conjuguées* deux hyperboles qui, ayant les mêmes axes et, par suite, le même centre, la même distance focale et les mêmes asymptotes, sont situées par rapport à ces asymptotes dans des angles différents; c'est-à-dire que l'axe transverse de l'une est l'axe non transverse de l'autre, et réciproquement (*fig.* 535).

Deux hyperboles conjuguées ne sont identiques et ne peuvent se substituer l'une à l'autre par un quart de révolution, que lorsqu'elles sont équilatères (1018).

PROBLÈME.

1020. *Mener une tangente à l'hyperbole par un point donné.*

Mêmes procédés que pour l'ellipse (989). Ici c'est la troisième des inégalités du n° 989, 2°, qui est satisfaite d'elle-même, puisque a est moindre que c, et que le triangle PFF' donne $2c < PF + PF'$; les deux premières expriment (1005) que *le point* P *doit être extérieur à l'hyperbole.*

COROLLAIRES.

1021. *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hyperbole est une circonférence concentrique à la courbe et ayant pour rayon* $\sqrt{a^2 - b^2}$ (990).

La démonstration directe est la même que pour l'ellipse.

Seulement, la question revient ici à chercher le lieu des milieux des cordes interceptées dans le cercle directeur relatif au foyer F′, par un angle droit dont le sommet F lui est extérieur. Le problème peut alors être impossible, et le lieu cesser d'exister, si l'on a $a < b$.

La tangente de l'angle aigu formé par l'asymptote Oy avec l'axe transverse étant représentée par $\frac{b}{a}$, le problème est impossible quand cet angle est supérieur à 45 degrés ou quand l'angle yOx des deux asymptotes (*fig.* 535) est obtus: il est possible, au contraire, quand cet angle est aigu.

En effet, l'angle des deux asymptotes est précisément (1017) le supplément de celui des deux tangentes qu'on peut mener au cercle directeur F′ par le foyer F. Or, ce n'est que lorsque l'angle de ces deux tangentes est obtus que les deux côtés de l'angle droit dont le sommet est en F peuvent rencontrer à la fois le cercle F′.

Lorsque l'angle des asymptotes est droit, celui des deux tangentes menées du foyer F au cercle directeur F′ est aussi droit, et il n'y a pas d'autre angle droit circonscrit à l'hyperbole que celui de ses asymptotes. Ce résultat limite est d'ailleurs évident; car, la courbe étant alors équilatère (1018), on a $a = b$, et le lieu se réduit au centre de l'hyperbole.

1022. ***Les tangentes*** **PM, PM′,** ***menées à l'hyperbole par un point extérieur*** **P,** ***font des angles égaux avec les droites qui vont du foyer*** **P** ***aux deux foyers; la droite qui va du point*** **P** ***à l'un des foyers est bissectrice de l'angle intérieur ou extérieur des rayons vecteurs qui vont de ce foyer aux deux points de contact*** **M** ***et*** **M′,** ***suivant que les deux tangentes touchent l'hyperbole dans la même région ou dans deux régions différentes.***

Même démonstration que pour l'ellipse (991).

Les propositions des n°s 991 et 1022 conduisent à une démonstration très simple (Darboux, *Bulletin*, t. XIV) de la condition pour qu'un quadrilatère, convexe ou non, soit circonscriptible à un cercle. Cette condition, d'abord mal énoncée par Pitot (*Mémoires de l'Académie*, 1725), puis rectifiée par Steiner (*Journal de Crelle*, t. 32), consiste en ce que :

Dans tout quadrilatère circonscrit, la somme de deux côtés (opposés ou adjacents, suivant les cas) *est égale à la somme des deux autres; et réciproquement.*

La proposition directe est évidente; elle résulte immédiatement de l'égalité des deux tangentes menées à un cercle par un point extérieur. C'est la réciproque seule qui exige quelque attention pour être établie en toute généralité. ABCD étant le quadrilatère considéré, l'hypothèse consistera dans l'une des égalités

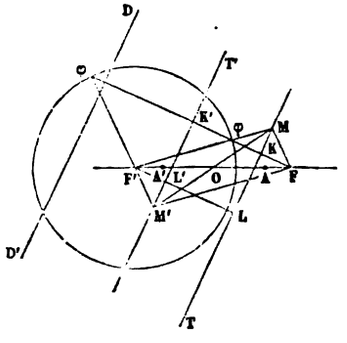
$$AB + BC = AD + DC, \quad AB - BC = AD - DC, \quad AB - BC = DC - AD;$$

mais l'une quelconque de ces égalités exprime qu'il y a une ellipse ou une hyperbole ayant pour foyers les deux sommets opposés A et C et passant par B et D. Les tangentes en B et D à cette courbe se coupent en un point P, et il résulte des théorèmes (991 et 1022) que par ce point P viennent passer une des bissectrices de l'angle A et une des bissectrices de l'angle C; ce point P est donc équidistant des quatre côtés du quadrilatère, et, par suite, il est le centre d'un cercle inscrit à cette figure.

PROBLÈME.

1023. *Mener à l'hyperbole une tangente parallèle à une droite donnée* (*fig.* 536).

Fig. 536.



Même procédé que pour l'ellipse (992). Seulement, le problème n'est pas toujours possible. Il faut que, si l'on mène

par le centre de la courbe une parallèle à la droite donnée, elle ne tombe pas dans les angles des asymptotes qui renferment l'hyperbole. En effet, pour que la perpendiculaire menée du foyer F à la droite donnée rencontre le cercle directeur F', il faut et il suffit que l'angle aigu de Fφ avec l'axe transverse soit moindre que l'angle aigu que fait avec le même axe la tangente menée de F au cercle F'; or ces angles sont respectivement les compléments des angles aigus δ et θ que l'axe transverse forme avec la droite donnée DD' et avec les asymptotes; on doit donc avoir $\frac{\pi}{2} - \delta < \frac{\pi}{2} - \theta$, d'où $\delta > \theta$.

Si la condition est remplie, il y a deux solutions T et T'. Pour $\delta = \theta$, il n'y a plus qu'une solution : c'est l'asymptote à laquelle la droite donnée est alors parallèle.

COROLLAIRES.

1024. *Les deux tangentes parallèles à une droite donnée ont leurs points de contact symétriques par rapport au centre* (993).

1025. *Le produit des distances d'un foyer à deux tangentes parallèles ou le produit des distances des deux foyers à une même tangente est constant.*

Comme pour l'ellipse (995).

Les constructions des nos 1020 et 1023 n'exigent pas que l'hyperbole soit tracée (996).

PROBLÈME.

1026. *Connaissant les foyers* F *et* F' *et l'axe transverse d'une hyperbole, déterminer ses points de rencontre avec une droite donnée.*

Même procédé que pour l'ellipse (997), seulement la discussion exige quelque attention.

Soient *h* l'hyperbole, *d* la droite donnée, δ l'angle aigu de cette droite et de l'axe transverse, θ l'angle aigu des asymptotes et du même axe.

Les points communs à h et à d sont les centres des cercles qui, touchant le cercle directeur F', passent par l'autre foyer F et par le point φ symétrique de F par rapport à d. De plus, un point commun à h et à d appartient à l'une ou à l'autre branche de l'hyperbole, suivant que le cercle directeur F' est extérieur au cercle tangent ou est enveloppé par ce cercle.

Cela posé :

1° *Si δ est inférieur à θ, d coupe h en deux points situés sur deux branches distinctes;* car la droite indéfinie $F\varphi$ étant alors extérieure au cercle F', il y a deux cercles tangents dont un seul enveloppe le cercle F'.

2° *Si δ est supérieur à θ,* la droite indéfinie $F\varphi$ coupe le cercle F', et il y a trois cas à distinguer. *$F'\varphi$ étant inférieur à $2a$, d* ne *rencontre pas h*; car φ est alors intérieur au cercle F', et il n'y a pas de cercle tangent. *$F'\varphi$ étant égal à $2a$, d* touche *h*; car φ est alors sur la circonférence F', et les deux cercles tangents se réduisent à un seul. Enfin, *$F'\varphi$ étant supérieur à $2a$, d coupe h en deux points appartenant à une même branche;* car φ est alors extérieur au cercle F', et il y a deux cercles tangents qui enveloppent tous deux le cercle F' ou auxquels le cercle F' est à la fois extérieur, suivant que F' et φ sont séparés ou non par le cercle F'.

3° *Si δ est égal à θ,* la droite $F\varphi$ est tangente au cercle F', et il y a deux cas. *Si d est une asymptote, elle a deux points communs à l'infini avec h,* puisque le point φ est alors sur la circonférence F' et que les deux cercles tangents se réduisent à la droite $F\varphi$. *Si d n'est que parallèle à une asymptote, elle a avec l'hyperbole deux points communs, dont un seul à distance finie;* car le point φ est alors extérieur au cercle F', et il y a deux cercles tangents dont l'un se réduit à la droite $F\varphi$.

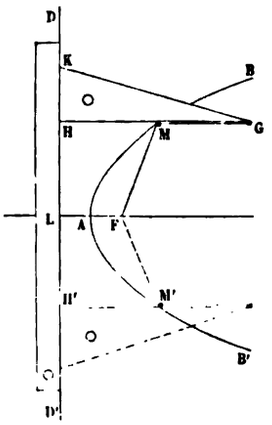
Observons enfin qu'on peut donner d'autres formes aux énoncés des conditions précédentes, en introduisant la considération, soit de la parallèle menée par le centre à la droite donnée, soit des tangentes parallèles à cette droite. Par exemple,

la condition $\delta > \theta$ peut être remplacée par l'une des suivantes : la parallèle à d menée par le centre doit être comprise dans les angles des asymptotes qui ne renferment pas la courbe, ou la courbe doit avoir des tangentes parallèles à d.

§ III. — PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE LA PARABOLE.

1027. La *parabole* est une courbe plane telle, que chacun de ses points est équidistant d'un point fixe et d'une droite fixe donnés dans son plan. Ainsi (*fig.* 537), le point fixe

Fig. 537.



étant F et la droite fixe DD', on aura, pour tout point M de la parabole, en abaissant MH perpendiculaire sur DD', MF = MH. Par sa définition même, la parabole est nécessairement située tout entière du même côté que le point fixe par rapport à la droite fixe.

D'après ce qu'on vient de dire, pour décrire un arc de parabole d'*un mouvement continu*, on fait coïncider l'arête

d'une règle avec la droite DD', et l'on applique contre cette règle le petit côté KH d'une équerre KHG. Un fil, égal en longueur au grand côté HG de cette équerre, est fixé par ses deux extrémités, d'une part au point F, et de l'autre à l'extrémité G du côté HG. Si l'on tend alors constamment ce fil contre le grand côté de l'équerre à l'aide d'un crayon, et si l'on fait en même temps glisser l'équerre le long de la règle, la pointe du crayon décrit un arc de parabole. En effet, pour une position quelconque M de cette pointe, on a

$$GM + MF = GH = GM + MH, \quad \text{d'où} \quad MF = MH.$$

En opérant de cette manière, on trace d'un mouvement continu l'arc BA, qui va du point B de la courbe dont la distance au point F est égale à GH, jusqu'au point A milieu de la perpendiculaire FL abaissée du point F sur la droite DD'. Il faut ensuite retourner l'équerre, comme l'indique la figure, pour décrire l'arc AB'.

On voit que la parabole est formée de deux branches qui s'étendent indéfiniment, à partir du point A, au-dessus et au-dessous de la droite FL; car, si l'on emploie une règle, une équerre et un fil assez longs, rien ne limite l'éloignement des points obtenus sur la courbe. La parabole est donc une courbe à branches infinies, mais sans séparation, et d'un seul côté de la droite fixe.

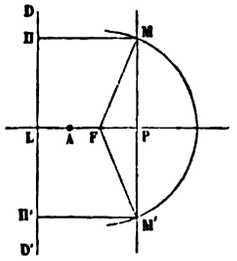
1028. Le point F est le *foyer* de la parabole, la droite DD' est sa *directrice*. La droite MF est le *rayon vecteur* du point M. La distance FL du foyer à la directrice se nomme le *paramètre* de la courbe, et on la représente par p.

1029. On peut aussi tracer la parabole *par points*.

En effet, prenons (*fig.* 538) un point P quelconque sur la perpendiculaire FL abaissée du foyer sur la directrice. Par le point P, menons une perpendiculaire à FL ou une parallèle à la directrice, et du foyer F comme centre, avec PL pour rayon, décrivons une circonférence qui coupera cette parallèle en deux points M et M' appartenant à la parabole, comme équidistants du foyer et de la directrice.

Pour que les points d'intersection M et M′ existent, il suffit que le point P soit à l'intérieur du cercle décrit du foyer F comme centre avec PL pour rayon, c'est-à-dire qu'on ait FP$<$PL. Cette condition sera toujours remplie lorsque le point P sera à droite du foyer F (dans le cas de la figure); mais elle exige, si le point P est à gauche de F, qu'il reste à

Fig. 538.



droite du point A milieu de FL. Si l'on a dans ce cas, comme condition limite, FP$=$PL, le point P se confond avec le point A, et les deux points M et M′ se réunissent en ce point. Le rayon vecteur minimum est donc AF ou $\frac{p}{2}$; il n'y a pas de rayon vecteur maximum, rien ne limitant l'eloignement du point P à droite du foyer F.

THÉORÈME.

1030. *La parabole a pour axe la perpendiculaire menée du foyer sur la directrice* (*fig.* 537).

Même démonstration que pour l'ellipse (975, 1°).

Le point A, commun à la parabole et à son axe, est le *sommet* de la courbe.

THÉORÈME.

1031. *Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à la parabole, sa distance au foyer est moindre ou plus grande que sa distance à la directrice* (*fig.* 539).

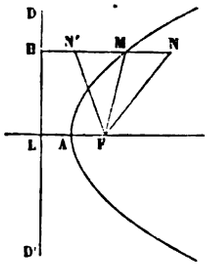
Soit d'abord un point N intérieur à la courbe. Menons la droite NF et la perpendiculaire NH à la directrice, laquelle

coupera la parabole au point M (1027). Le triangle NFM donne alors

$$NF < NM + MF \quad \text{ou} \quad NF < NH, \quad \text{puisque} \quad MF = MH.$$

Soit de même un point N′ extérieur à la courbe. Si le point N′ et le foyer sont de côtés différents par rapport à la directrice, la proposition est évidente. Sinon, menons la

Fig. 539.



droite N′F et la perpendiculaire N′H à la directrice, laquelle, prolongée, coupera la parabole au point M. Le triangle N′FM donne alors

$$N'F > MF - MN' \quad \text{ou} \quad N'F > N'H, \quad \text{puisque} \quad MF = MH.$$

COROLLAIRE.

1032. Ce théorème, rapproché de la définition de la courbe, fournit un critérium pour juger de la position d'un point quelconque de son plan par rapport à la parabole supposée non tracée. *Suivant que la distance du point considéré au foyer est égale, supérieure ou inférieure à sa distance à la directrice, ce point est à la courbe, il lui est extérieur ou intérieur.*

THÉORÈME.

1033. *La tangente à la parabole fait extérieurement des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et avec la parallèle menée à l'axe par le même point.*

Prenons sur la parabole (*fig.* 540) deux points voisins M

et M′; menons la sécante MM′S, abaissons des deux points considérés les perpendiculaires Mφ, M′φ′, sur la directrice DD′, et traçons leurs rayons vecteurs. Portons sur FM une longueur FC = FM′, et sur φM une longueur φE = φ′M′. D'après la définition de la parabole, MC est égal à ME.

Fig. 540.

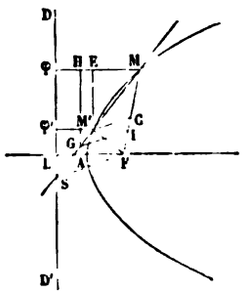
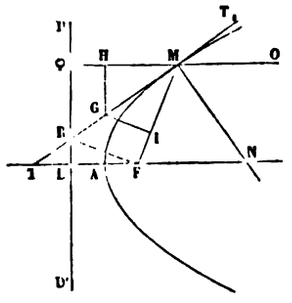


Fig. 541.



D'un point G quelconque de la sécante MM′S, menons à M′C et à M′E, jusqu'à la rencontre de FM et de φM, les parallèles GI et GH. Les deux quadrilatères CM′EM, IGHM sont semblables (208), et l'égalité de MC et de ME entraîne celle de MI et de MH.

A mesure que le point M′ se rapproche du point M, GH reste, comme M′E, perpendiculaire à Mφ, tandis que GI, perpendiculaire à la bissectrice de l'angle au sommet du triangle isocèle M′FC, tend à le devenir au rayon vecteur FM. On a de plus constamment MI = MH. La tangente à la parabole (*fig.* 541) doit donc être telle, que si, d'un point quelconque G pris sur cette droite, on abaisse des perpendiculaires GI et GH sur le rayon vecteur du point de contact M et sur la perpendiculaire abaissée de ce point sur la directrice, on ait MI = MH. Les triangles rectangles MGI, MGH sont donc égaux, ainsi que les angles GMI, GMH. *La tangente à la parabole est* donc *bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et la perpendiculaire abaissée de ce point sur la directrice.*

Mais, l'angle GMH étant l'opposé par le sommet de l'angle

T,MO, les deux angles GMI ou TMF et T,MO sont égaux ; ce qui conduit à l'énoncé adopté.

1034. RÉCIPROQUEMENT, *la courbe dont la tangente est bissectrice de l'angle formé par les droites menées d'un point de la courbe à un point fixe, et perpendiculairement à une droite fixe, est une parabole ayant le point et la droite fixes pour foyer et pour directrice.*

Démonstration analogue à celle donnée pour l'ellipse et l'hyperbole (1007).

COROLLAIRES.

1035. Soit S le point où la sécante MM'S (*fig.* 540) coupe la directrice DD'. On a, à cause des parallèles,

$$\frac{MS}{M'S} = \frac{M\varphi}{M'\varphi'} = \frac{MF}{M'F};$$

la droite SF est donc la bissectrice de l'angle extérieur en F du triangle MFM' (185). *La droite qui joint le foyer d'une parabole au point de rencontre d'une sécante quelconque avec la directrice est donc bissectrice de l'angle extérieur des rayons vecteurs des points d'intersection de la sécante avec la courbe.*

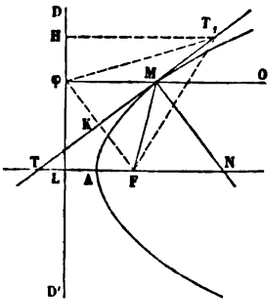
A la limite, quand la sécante devient tangente, c'est-à-dire quand l'angle MFM' devient nul, la droite SF est remplacée (*fig.* 541) par la droite RF bissectrice de l'angle supplémentaire de cet angle nul. Par suite, *la droite qui joint le foyer d'une parabole au point où une tangente quelconque rencontre la directrice est perpendiculaire sur le rayon vecteur du point de contact.*

1036. *Tous les points de la tangente* MT, *sauf le point de contact* M, *sont extérieurs à la parabole* qui, par suite (982), est une courbe convexe (*fig.* 542).

En effet, le triangle FMφ étant isocèle et la tangente étant la bissectrice de son angle au sommet (1033), elle est perpendiculaire sur le milieu K de Fφ. Pour un point T, quelconque de la tangente, on a donc, T, H étant la perpendiculaire abaissée

de ce point sur la directrice, $T_1H < T_1\varphi$ ou $T_1H < T_1F$. Le point T_1 est donc extérieur à la courbe (1032).

Fig. 542.



1037. Si l'on mène au point M (*fig.* 542) une perpendiculaire MN à la tangente MT, les deux angles FMN, OMN sont égaux comme compléments d'angles égaux (1033). Donc, *la normale à la parabole est bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et la parallèle menée à l'axe par ce point.*

Au sommet de la parabole, la normale se confond avec l'axe, et la tangente est perpendiculaire à cet axe.

Soient T et N (*fig.* 542) les points où la tangente et la normale rencontrent l'axe. Les triangles TMF, NMF étant évidemment isocèles, on a $MF = FT = FN$. *Le foyer* F *est* donc *à une distance, soit du pied de la tangente, soit du pied de la normale sur l'axe, égale au rayon vecteur du point de contact.*

1038. Dans le cas de la parabole, les rayons lumineux, sonores ou calorifiques, qui partent du foyer, deviennent tous parallèles à l'axe après leur réflexion sur la courbe. C'est pourquoi l'on emploie des réflecteurs paraboliques, lorsqu'on veut projeter au loin un faisceau de rayons lumineux parallèles (lanternes de voitures, phares). Réciproquement, tout rayon qui vient rencontrer la parabole parallèlement à son axe se réfléchit au foyer de la courbe. De là, par exemple, l'usage des réflecteurs paraboliques dans les télescopes, pour concentrer au foyer les rayons lumineux venant de l'astre observé.

THÉORÈME.

1039. *Le lieu des points symétriques* φ *du foyer* F *par rapport aux tangentes à la parabole est la directrice* (*fig.* 542).

Cette proposition est évidente d'après ce qui a été dit au n° 1036.

Scolies.

1040. *Étant donnés un point* F *et une droite* DD' (*fig.* 542), *si l'on mène des droites* F φ *aux différents points de la droite* DD', *les perpendiculaires élevées à ces droites par leurs milieux enveloppent une parabole qui a pour foyer le point* F *et pour directrice la droite* DD'; *les points de contact de ces tangentes sont à leurs rencontres avec les perpendiculaires menées à la directrice par les points* φ.

C'est là un nouveau procédé pour décrire la parabole par points (1029). En le suivant, on n'obtient qu'un point à la fois; mais on a en même temps la tangente en ce point.

1041. On voit que *les parallèles à l'axe de la parabole ne rencontrent la courbe qu'en un seul point.* Il serait donc faux de dire qu'une droite qui n'a qu'un point commun avec une courbe, même convexe, lui est tangente. Une droite tangente à une courbe convexe n'a qu'un point commun avec elle (982); mais la réciproque n'est pas vraie.

THÉORÈME.

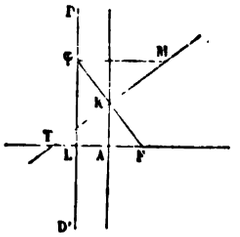
1042. *Le lieu des projections du foyer de la parabole sur ses tangentes est la tangente au sommet.*

MT étant la tangente à la courbe au point M (*fig.* 543), et φ le symétrique du foyer F par rapport à cette tangente, le point K où Fφ coupe la tangente est le milieu de Fφ. D'ailleurs, le sommet A est le milieu de FL. Donc, dans le triangle FLφ, AK est parallèle à la directrice ou se confond avec la tangente au sommet (1037). La projection K du foyer sur une tangente se trouve par suite sur la tangente au sommet.

Réciproquement, K étant un point de la tangente au som-

met, si l'on mène la droite FKφ, le point φ sera le symétrique du foyer F par rapport à la tangente qui passe par le point K

Fig. 543.



(1040) ; le point K sera donc la projection du foyer F sur cette tangente.

COROLLAIRE.

1043. Si l'un des côtés d'une équerre passe constamment par le foyer F, tandis que son sommet parcourt la tangente AK au sommet de la courbe, l'autre côté de l'équerre reste constamment tangent à la parabole.

THÉORÈME.

1044. *Dans toute courbe rapportée à des axes rectangulaires, l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre la sous-tangente et la sous-normale.*

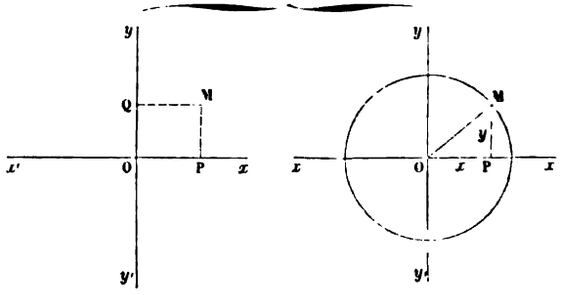
Pour indiquer la position d'un point M sur un plan (*fig.* 544), il suffit de donner ses projections P et Q sur deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$ tracés dans ce plan, ou, ce qui revient au même, les nombres (positifs ou négatifs) qui mesurent les segments OP et OQ. On convient d'ailleurs de fixer le sens positif sur chacun des axes de la manière suivante : après avoir choisi à volonté le sens positif sur l'axe $x'Ox$, on place sur cette droite les lettres x' et x de façon que le sens positif que l'on a adopté soit celui de x' vers x; puis, on place les lettres y' et y sur l'autre axe de telle sorte qu'une rotation de 90°, autour de O, dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, amène la demi-droite Oy sur la demi-droite

Ox, et l'on adopte pour sens positif sur $y'Oy$ le sens de y' vers y.

La valeur algébrique du segment OP, ou de son égal QM, reçoit le nom d'*abscisse* du point M, et l'on nomme *ordonnée* de ce même point la valeur algébrique du segment OQ ou de son égal PM. L'abscisse et l'ordonnée d'un point sont les *coordonnées* de ce point; les axes $x'Ox$, $y'Oy$ sont les *axes des coordonnées* et O est l'*origine des coordonnées*.

Quand un point appartient à une courbe donnée, son ordonnée y dépend de son abscisse x, et elle est déterminée

Fig. 544.



par le choix de cette abscisse. Par exemple, l'abscisse x et l'ordonnée y d'un point quelconque d'une circonférence de rayon R rapportée à deux axes rectangulaires passant par son centre (*fig.* 544) sont évidemment liées par la relation

$$y^2 + x^2 = R^2, \quad \text{d'où} \quad y^2 = R^2 - x^2.$$

Le choix des axes coordonnés est arbitraire. On adopte de préférence les droites les plus remarquables du plan relativement à la courbe, telles que ses axes, ses tangentes aux sommets, etc. Dans la parabole, on choisit l'axe et la tangente au sommet.

Cela posé, soit (*fig.* 545) une courbe C rapportée à deux axes de coordonnées rectangulaires xOx', yOy'. Menons en un point quelconque M la tangente MT, la normale MN et

l'ordonnée MP. La projection TP sur l'axe Ox de la portion de tangente MT comprise entre son point de contact M et son pied T sur cet axe s'appelle *sous-tangente;* de même, PN est la *sous-normale.* Le triangle TMN étant rectangle en M, et MP étant perpendiculaire sur l'hypoténuse TN, le théorème énoncé est démontré (222).

Au lieu d'axes rectangulaires, on peut employer des *axes obliques.* Les coordonnées d'un point sont encore ses distances aux deux axes, mais comptées parallèlement à ces axes. Les projections ne sont plus alors orthogonales, mais obliques, et le théorème précédent cesse d'être vrai.

THÉORÈME.

1045. *Dans la parabole :* 1° *la sous-tangente est double de l'abscisse du point de contact;* 2° *la sous-normale est constante et égale au paramètre* (*fig.* 546).

1° Soit la tangente en M à la parabole. Si l'on prend pour axes coordonnés l'axe Ax de la courbe et la tangente au sommet Ay, le point M aura MP pour ordonnée et AP pour abscisse. Le triangle TFM étant isocèle (1037), la projection K du foyer F sur la tangente MT est le milieu de MT. La tangente au sommet AKy étant parallèle à l'ordonnée MP, le sommet A est donc le milieu de la sous-tangente TP, et TP $=$ 2AP.

Fig. 545.

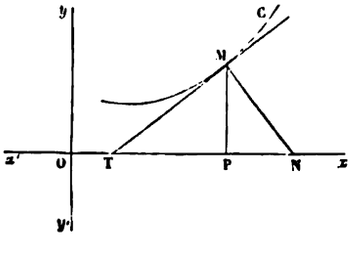
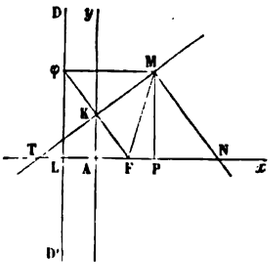


Fig. 546.



2° Soit la normale MN. Elle est perpendiculaire à la tangente MT comme la droite Fφ. La figure MφFN est donc un parallélogramme, et φF $=$ MN. Les deux triangles rectangles MPN, φLF, sont donc égaux, et l'on a PN $=$ LF $= p$.

COROLLAIRE.

1046. *Le carré de l'ordonnée d'un point de la parabole est proportionnel à l'abscisse de ce point* (*fig.* 546).

Soient y et x les coordonnées MP et AP d'un point quelconque M de la parabole. On a (1044, 1045)

$$y^2 = \text{TP}.\text{PN} = 2x.p \quad \text{ou} \quad y^2 = 2px.$$

PROBLÈME.

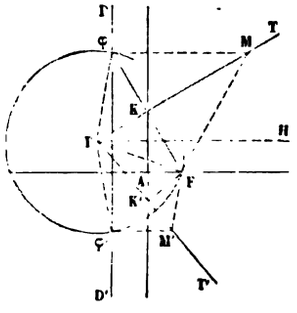
1047. *Mener une tangente à la parabole par un point donné.*

1° *Si le point donné* M *est sur la courbe* (*fig.* 546), on mène le rayon vecteur MF et la perpendiculaire Mφ sur la directrice; puis, la bissectrice de l'angle FMφ, qui est la tangente demandée (1033).

Il vaut mieux prendre sur l'axe, du côté du sommet, une longueur FT égale à MF; en joignant le point T ainsi obtenu au point donné M, on a (1037) la tangente demandée.

2° *Si le point donné* P *est extérieur à la parabole*, on remarque que la question serait résolue si l'on connaissait le symétrique φ du foyer F par rapport à la tangente cherchée; car on aurait alors cette tangente en abaissant du point P une perpendiculaire TP sur Fφ (*fig.* 547). La droite TP coupe-

Fig. 547.



rait d'ailleurs la parallèle menée à l'axe par le point φ, au point de contact M. Or, le point φ se trouve à la fois sur la directrice

DD′ (1039) et sur le cercle décrit du point P comme centre avec PF comme rayon.

Ce cercle et la directrice se coupent toujours, quand le point P est extérieur à la courbe; car il est alors plus près de la directrice que du foyer (1031), et il y a deux solutions, qui se réduisent à une seule quand le point P est sur la parabole, ou disparaissent lorsqu'il est intérieur à la courbe.

Corollaires.

1048. Cherchons la condition pour que les deux tangentes menées du point P à la parabole soient à angle droit.

Ces tangentes étant supposées à angle droit, comme elles sont respectivement perpendiculaires aux milieux des droites $F\varphi$ et $F\varphi'$, l'angle $\varphi F\varphi'$ est aussi droit; par suite, $\varphi\varphi'$ est un diamètre de la circonférence PF, et le point P est sur la directrice. *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole est* donc *la directrice.*

Dans ce cas, l'angle PFM est droit ainsi que l'angle PFM′ (1035); la corde des contacts MM′ passe donc alors par le foyer et est perpendiculaire à PF.

1049. *Les tangentes* PM, PM′, *menées d'un point extérieur* P *à la parabole, font des angles égaux avec la droite qui joint ce point au foyer et avec la parallèle menée à l'axe par ce point; la droite qui va du foyer au point* P *est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs des points de contact* M *et* M′.

Reportons-nous à la *fig.* 547, et soit PH la parallèle menée à l'axe par le point P. La tangente PMT étant perpendiculaire sur le milieu de $F\varphi$, comme la tangente PM′T′ sur le milieu de $F\varphi'$, les deux angles MPH, $F\varphi\varphi'$, ont leurs côtés respectivement perpendiculaires et sont égaux; la droite PM′ est la bissectrice de l'angle φ'PF, et l'angle au centre M′PF, égal alors à l'angle inscrit $F\varphi\varphi'$, l'est aussi à l'angle MPH. De plus, les angles PFM, PFM′ sont respectivement egaux aux angles $P\varphi M$, $P\varphi'M'$. Or, le triangle $\varphi P\varphi'$ étant isocèle, les angles $P\varphi M$, $P\varphi'M'$ sont égaux comme composés d'angles égaux; et leur égalité démontre celle des angles PFM, PFM′.

PROBLÈME.

1050. *Mener à la parabole une tangente parallèle à une droite donnée.*

Tout revient encore à trouver le point φ symétrique du foyer F par rapport à la tangente cherchée. Or, ce point se trouve à l'intersection de la directrice et de la perpendiculaire abaissée du foyer F sur la droite donnée. Il y a toujours une solution, et une seule.

SCOLIE.

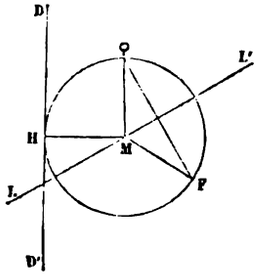
1051. Les constructions des nos 1047 et 1050 n'exigent pas que la courbe soit tracée : il suffit d'en connaître le foyer et la directrice.

PROBLÈME.

1052. *Connaissant le foyer* P *et la directrice* DD' *d'une parabole, déterminer ses points de rencontre avec une droite donnée* LL'.

Supposons le problème résolu, et prenons (*fig.* 548) le symétrique φ du foyer F par rapport à LL'. Si M est l'un des

Fig. 548.



points de rencontre de la droite LL' avec la courbe, on aura $M\varphi = MF = MH$, MH étant la perpendiculaire abaissée du point M sur la directrice. Le cercle décrit du point M comme centre, avec MF pour rayon, passe donc par les points F et φ et est tangent à la directrice. La question est ainsi ramenée à trouver le centre M d'un cercle passant par deux points don-

nés F et φ et tangent à une droite donnée DD'. Nous avons résolu ce problème (262, 1°).

Comme il n'est possible que lorsque les deux points F et φ sont situés d'un même côté de la droite DD', la droite LL' coupera la parabole, lui sera tangente ou ne la rencontrera pas, suivant que le point φ sera du même côté que le foyer par rapport à la directrice, sur cette directrice, ou de l'autre côté de cette droite par rapport au foyer.

COROLLAIRE.

1053. La parabole, ne pouvant être coupée par une droite en plus de deux points, est une courbe convexe (1036).

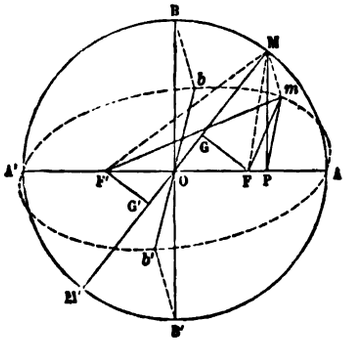
§ IV. — ELLIPSE, CONSIDÉRÉE COMME PROJECTION ORTHOGONALE DU CERCLE.

THÉORÈME.

1054. ***La projection orthogonale d'une circonférence de cercle sur un plan est une ellipse.***

Les projections d'une figure sur deux plans parallèles étant égales, on peut toujours supposer que le plan de projection passe par le centre O du cercle considéré ABA'B'.

Fig. 549.



Soient donc AA' le diamètre situé dans le plan de projection

et bOb' la projection du diamètre BB' perpendiculaire a AA'; l'angle bOA sera droit, puisqu'il est la projection d'un angle droit BOA sur un plan contenant l'un de ses côtés.

M étant un point quelconque du cercle, et m sa projection, prenons, sur AA', OF = OF' égal à la projetante Bb du point B, et abaissons FG, F'G' perpendiculaires sur le diamètre MM'.

Il suffit de prouver que le rayon vecteur mF est égal à MG; car on prouverait de même que mF' est égal à MG', d'où l'on conclurait

$$m\mathrm{F} + m\mathrm{F}' = \mathrm{MG} + \mathrm{MG}' = \mathrm{MG} + \mathrm{M}'\mathrm{G} = \mathrm{MM}' = \mathrm{AA}'.$$

Mais l'égalité mF = MG résulterait de celle des triangles rectangles mFM, GFM et, par conséquent, de l'égalité FG = Mm. Or cette dernière ressort immédiatement de la comparaison des proportions

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{M}m} = \frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{B}b}, \quad \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{FG}} = \frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{OF}} \text{ ou } \frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{B}b},$$

qui sont fournies, la première par les triangles à côtés parallèles MPm, BOb, la deuxième par les triangles rectangles équiangles MOP, GOF.

On voit que le grand axe de l'ellipse obtenue est toujours égal au diamètre du cercle donné. On a, de plus, dans le triangle rectangle BbO (705),

$$\mathrm{O}b = \mathrm{OB}\cos \mathrm{BO}b, \quad \text{ou} \quad b = a\cos \mathrm{V},$$

en désignant par $2a$ et $2b$ les axes AA' et bb' de l'ellipse, et par V l'angle des plans des deux courbes.

Corollaires.

1055. L'ordonnée MP du cercle (*fig.* 549) étant représentée par Y et l'ordonnée correspondante mP de l'ellipse par y, le triangle rectangle MmP donne

$$y = \mathrm{Y}\cos \mathrm{V}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad y = \frac{b}{a}\mathrm{Y}.$$

On passe donc du cercle principal d'une ellipse (985) à cette ellipse, en diminuant toutes les ordonnées du cercle dans le rapport du petit axe au grand axe. Cette remarque fournit un nouveau procédé pour décrire l'ellipse par points.

On trace un cercle sur chacun des axes de l'ellipse comme diamètre (*fig.* 55o); un rayon quelconque coupe ces cercles aux points N et S. Si l'on mène alors l'ordonnée NP du point N et la parallèle SM au grand axe, l'intersection M de ces deux droites est un point de l'ellipse. On a, en effet,

$$MP = \frac{OS}{ON} \cdot NP, \quad \text{c'est-à-dire} \quad MP = \frac{b}{a} NP.$$

1056. Si l'on considère sur l'ellipse et sur le cercle $2b$ deux points M et S ayant la même ordonnée OQ, leurs abscisses x et X sont liées par la relation

$$\frac{x}{X} = \frac{ON}{OS}, \quad \text{d'où} \quad X = \frac{b}{a} x.$$

Pour passer de l'ellipse au cercle ayant le petit axe pour diamètre, il faut donc diminuer les abscisses de l'ellipse dans le rapport de b à a.

L'ellipse peut donc être regardée comme provenant de la contraction ou de la dilatation des cercles qui ont ses axes pour diamètres.

SCOLIE.

1057. On a démontré que le rayon vecteur Fm (*fig.* 549) est égal à MG, c'est-à-dire à a — OG; mais les triangles équiangles MOP, GOF, donnent

$$\frac{OG}{OF} = \frac{OP}{OM}, \quad \text{d'où} \quad OG = \frac{cx}{a};$$

on a donc

$$Fm = a - \frac{cx}{a} \quad \text{et, par suite,} \quad F'm = a + \frac{cx}{a}.$$

PROBLÈME.

1058. *Mener à l'ellipse une tangente par un point donné.*

1° *Soit d'abord le point donné m situé sur la courbe.*

Supposons le problème résolu (*fig.* 551), et soit mT la tangente demandée. Dilatons toute la figure, perpendiculairement à AA', dans le rapport de OB à OA. L'ellipse deviendra le cercle AA', le point m deviendra le point M, le point T ne changera pas, et la droite MT sera la tangente au cercle principal. On déterminera donc réciproquement le point T en

construisant la tangente en M au cercle principal, et, en traçant mT, on aura la tangente à l'ellipse au point m.

Fig. 550.

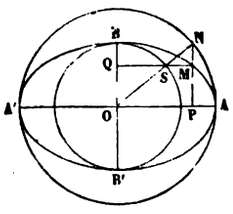
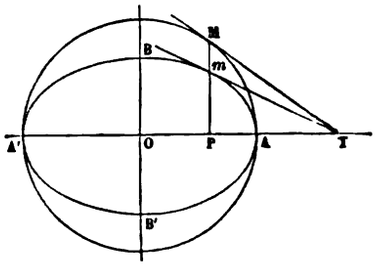


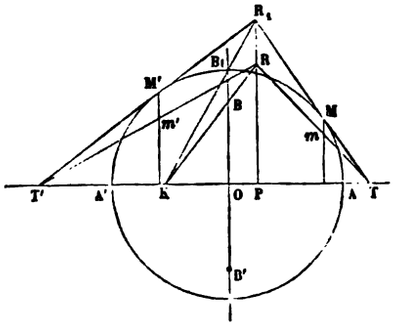
Fig. 551.



2° *Soit maintenant le point donné* R *extérieur à l'ellipse* (*fig.* 552).

Supposons de même le problème résolu (*fig.* 552) et soient RmT, $Rm'T'$ les tangentes qui répondent à la question. Dilatons la figure,

Fig. 552.



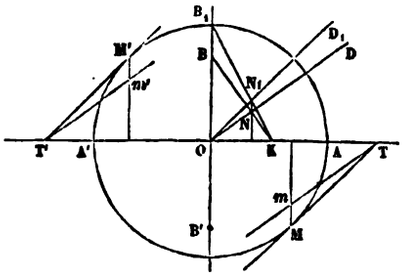
comme dans le premier cas. L'ellipse deviendra le cercle AA', la droite RBK deviendra la droite B_1K, et le point R_1 correspondant au point R, devant se trouver à la fois sur l'ordonnée PR et sur la droite B_1K, sera déterminé. On en déduira les tangentes R_1MT, $R_1M'T'$ au cercle principal et, par suite, les tangentes RmT, $Rm'T'$ à l'ellipse, dont les points de contact m et m' se trouveront d'ailleurs sur les ordonnées des points M et M'.

PROBLÈME.

1059. *Mener à l'ellipse une tangente parallèle à une droite donnée* (*fig.* 553).

Soit OD la droite donnée (*fig.* 553). En suivant toujours le même procédé, on considère la droite quelconque BK qui coupe OD au point N ; à

Fig. 553.



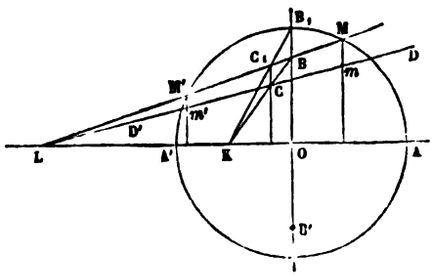
cette droite BK correspond la droite B_1K qui rencontre en N_1 l'ordonnée du point N. La droite ON_1D_1 est donc celle qui correspond à OD. On n'a alors qu'à mener au cercle principal les tangentes MT, M'T', parallèles à ON_1D_1 et à tracer, par les points T et T', des parallèles à OD qui sont les tangentes demandées ; leurs points de contact *m* et *m'* appartiennent aux ordonnées des points M et M'.

1060. Les constructions précédentes (1058, 1059) n'exigent pas que l'ellipse soit tracée : il suffit que ses axes soient donnés.

PROBLÈME.

1061. *Connaissant les axes d'une ellipse, construire ses points d'intersection avec une droite donnée* (*fig.* 554).

Fig. 554.



Soit DD' la droite donnée ; son point L ne changera pas dans la dilatation de l'ellipse. La droite quelconque BK rencontrant DD' au point C et deve-

nant B_1K, le point C devient C_1. La droite LC_1 correspond donc à la droite DD′ et, comme elle coupe le cercle principal aux points M et M′, on n'a plus qu'à ramener ces points sur DD′, par des perpendiculaires à AA′, pour avoir en *m* et en *m′* les points demandés.

THÉORÈME.

1062. *Tous les diamètres de l'ellipse sont des lignes droites passant par son centre.*

On entend par *diamètre* d'une courbe le lieu des milieux des cordes de cette courbe parallèles à une direction donnée. Dans le cercle, tout diamètre est une droite perpendiculaire au système de cordes qu'il divise en deux parties égales (103) ou qui lui est *conjugué*.

Cela posé, tout système de cordes parallèles du cercle a pour projection un système de cordes parallèles de l'ellipse, projection du cercle. Les milieux des cordes du cercle étant sur un même diamètre, les projections de ces milieux ou les milieux des cordes correspondantes de l'ellipse sont sur une même droite, projection du diamètre du cercle, c'est-à-dire passant par le centre de l'ellipse. Le théorème est donc démontré.

1063. RÉCIPROQUEMENT, *toute droite passant par le centre de l'ellipse est un diamètre de la courbe:* car elle est la projection d'un certain diamètre du cercle dont l'ellipse est la projection. Les cordes conjuguées au diamètre de l'ellipse sont les projections des cordes conjuguées au diamètre correspondant du cercle.

COROLLAIRES.

1064. On nomme *diamètres conjugués* deux diamètres tels, que chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre. Pour avoir deux diamètres conjugués dans l'ellipse, il suffit évidemment de projeter deux diamètres rectangulaires du cercle.

1065. La tangente à l'extrémité du diamètre du cercle, étant perpendiculaire à ce diamètre, est parallèle au système de cordes qui lui est conjugué. Il en résulte que *la tangente à l'extrémité d'un diamètre de l'ellipse est parallèle au système de cordes conjugué à ce diamètre.*

1066. Si l'on mène deux tangentes à un cercle par un point extérieur, le diamètre mené à leur point de concours est perpendiculaire sur le milieu de la corde qui joint leurs points de contact. Par suite, *si l'on mène à une ellipse deux tangentes par un point extérieur, le diamètre mené à leur point de concours passe par le milieu de la corde qui unit leurs points de contact.*

Nous renvoyons à l'Appendice pour le développement de la théorie des diamètres dans l'ellipse, l'hyperbole et la parabole.

THÉORÈME.

1067. *L'aire de l'ellipse est la moyenne proportionnelle des aires des cercles construits sur ses deux axes comme diamètres.*

L'ellipse donnée, dont les axes sont $2a$ et $2b$, peut être regardée comme la projection orthogonale d'un cercle de diamètre $2a$, dont le plan fait avec celui de l'ellipse un angle V, tel que $\cos V = \frac{b}{a}$ (1054). D'après un théorème connu (707), on obtiendra alors l'aire de l'ellipse en multipliant l'aire du cercle par $\cos V$. On trouve ainsi, pour l'expression de cette aire,

$$\pi ab, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sqrt{\pi a^2 . \pi b^2}.$$

THÉORÈME.

1068. *Lorsque les extrémités d'une droite* AB *de longueur constante glissent sur deux droites rectangulaires* Ox *et* Oy, *un point quelconque* M *de cette droite décrit une ellipse dont les axes sont dirigés suivant* Ox *et* Oy, *et ont pour demi-longueurs* a *et* b *les distances* MA *et* MB *du point* M *aux extrémités de la droite* AB (*fig.* 555).

Fig. 555.

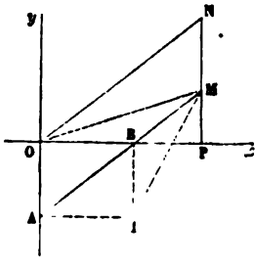
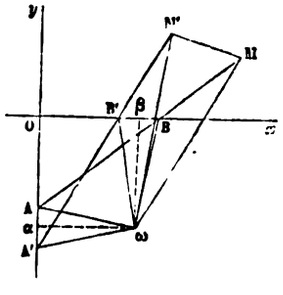


Fig. 556.



Prenons pour axes coordonnés (1044) les deux droites Ox et Oy; les coordonnées du point M seront MP et OP. Par le point O, menons ON parallèle à ABM, jusqu'à la rencontre de l'ordonnée MP. La figure OAMN étant un parallélogramme,

ON sera égale à la longueur constante AM ou a. Les triangles rectangles semblables BPM, OPN, donnent d'ailleurs

$$\frac{MP}{NP} = \frac{BM}{ON} \quad \text{ou} \quad MP = \frac{b}{a} \cdot NP.$$

Le point M décrit donc l'ellipse (1055) dont le cercle ON est le cercle principal, et qui a pour demi-axes a et b, c'est-à-dire les distances MA et MB.

Ce théorème donne un moyen pratique très-simple de construire une ellipse par points, à l'aide d'une bande de papier sur les bords de laquelle on marque les trois points A, B, M. Il existe un *compas elliptique* fondé sur ce même principe.

COROLLAIRES.

1069. Considérons (*fig.* 556) la droite donnée dans les deux positions voisines ABM, A'B'M'. Sur les milieux de AA' et de BB', élevons les perpendiculaires $\alpha\omega$ et $\beta\omega$ qui se coupent en ω. La perpendiculaire élevée sur le milieu de MM' passera par le point ω. En effet, les deux triangles $A\omega B$, $A'\omega B'$ étant égaux, les angles $AB\omega$, $A'B'\omega$ sont égaux. Les angles ωBM, $\omega B'M'$ le sont alors eux-mêmes comme suppléments d'angles égaux. Il en résulte l'égalité des triangles ωBM, $\omega B'M'$ et, par suite, celle des distances ωM, $\omega M'$.

Si l'on suppose maintenant que le point M' se rapproche indéfiniment du point M considéré comme fixe sur l'ellipse qu'il décrit, MM' tendra vers la tangente à la courbe en M, et la perpendiculaire élevée sur le milieu de MM' vers la normale au même point. D'ailleurs, $\alpha\omega$ et $\beta\omega$ ont pour limites les perpendiculaires élevées en A et en B aux axes Oy et Ox. En joignant le point I d'intersection de ces perpendiculaires au point M (*fig.* 555), on aura donc la normale en M à l'ellipse tracée.

1070. Il est utile de remarquer que *la longueur* MI *comptée sur la normale en* M (*fig.* 555), *est égale à la longueur du demi-diamètre qui est conjugué au diamètre* OM.

Soit, en effet (*fig.* 557), OM' le diamètre conjugué au diamètre OM; ce diamètre conjugué est parallèle à la tangente

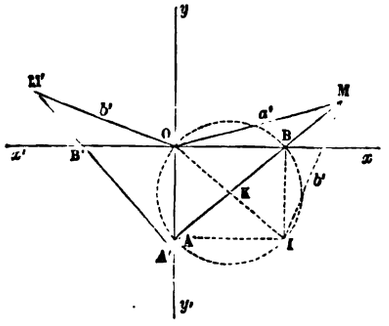
en M (1065), c'est-à-dire que la normale MI lui est perpendiculaire. De plus, le rayon du cercle principal qui correspond à OM est parallèle à la position de la droite AB qui donne le point M de l'ellipse (1068), et le rayon de ce cercle qui correspond à OM′ est de même parallèle à A′B′M′. Les diamètres conjugués de l'ellipse répondant à des diamètres rectangulaires du cercle principal (1064), on en conclut que ABM est perpendiculaire à A′B′M′. Comme BI, d'ailleurs, est perpendiculaire à OB′, les deux triangles MBI, M′B′O, qui ont le côté MB égal au côté M′B′, ont leurs angles égaux (77) et sont égaux ; par suite, MI = OM′.

PROBLÈME.

1071. *Étant donnés deux diamètres conjugués de l'ellipse en grandeur et en direction, construire les axes de la courbe.*

Soient (*fig.* 557) OM et OM′ les demi-diamètres conjugués

Fig. 557.

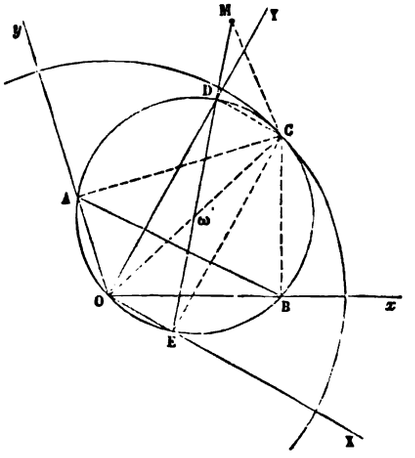


donnés, dont les longueurs sont a' et b'. En menant par le point M une perpendiculaire à OM′ et en prenant sur cette perpendiculaire MI = b', nous aurons le sommet I du rectangle inconnu IAOB (1070). Les sommets B et A de ce rectangle se trouvent à la fois sur le cercle circonscrit dont le diamètre est IO et sur la droite qui unit le point M au centre K de ce cercle : ils sont donc déterminés. En joignant ces points B et A au point O, on a les axes de l'ellipse en direction ; de plus, MA et MB représentent leurs demi-longueurs (1068, 1069).

THÉORÈME.

1072. *Quand les extrémités d'une droite* AB *de longueur constante glissent sur deux droites fixes quelconques* Ox *et* Oy, *un point quelconque* M, *lié invariablement à* AB *dans le plan* AOB, *décrit une ellipse* (*fig.* 558).

Fig. 558.



Considérons une position quelconque de la droite AB et faisons passer un cercle par les trois points A, B, O. Si l'on suppose ce cercle lié à la droite AB et entraîné dans son mouvement, il passera toujours par le point O; car l'angle AOB, ayant pour mesure la moitié de l'arc invariable AB compris entre ses côtés, ne peut pas cesser d'être inscrit. Le diamètre OC de ce cercle, dans la position actuelle de la droite AB, s'obtient en élevant en B et en A, aux axes Ox et Oy, des perpendiculaires qui se coupent au point C.

Le cercle OC changeant de position en même temps que la droite AB, l'arc AD qui sépare le point A d'un point quelconque D de sa circonférence reste constant; par suite, l'angle AOD restant lui-même constant et ayant son côté OA fixe, tout point D du cercle OC décrit une droite OY.

Si l'on trace le diamètre du cercle OC qui passe par le point

donné M, les extrémités D et E de ce diamètre décrivent donc pendant le mouvement de AB les deux droites fixes ODY et OEX. Ces droites étant à angle droit, il résulte du théorème précédent (1068) que le point M décrit une ellipse ayant pour demi-longueurs de ses axes, dirigés suivant OX et OY, les distances ME et MD.

Les perpendiculaires variables élevées en D et en E aux droites OY et OX se coupant au point mobile C, on obtiendra la normale en M à cette ellipse en menant la droite MC (1069).

Scolie.

1073. La position du point C est indépendante de celle du point donné M. Donc, si le point M varie, toutes les normales aux points correspondants des différentes ellipses obtenues viendront, pour une même position de la droite AB, se couper au point C.

D'ailleurs, le lieu du point C est la circonférence décrite du point O comme centre avec la longueur constante OC pour rayon, et le cercle ωC, variable de position, reste constamment tangent au cercle OC dont le rayon est double du sien.

On peut donc se figurer le mouvement du triangle ABM, en le supposant entraîné dans le mouvement du cercle ωC qui roule sans glisser à l'intérieur du cercle fixe OC de rayon double.

On sait que, dans un pareil mouvement, *tout point du cercle mobile décrit un diamètre du cercle fixe* (théorème de de la Hire), résultat qui coïncide avec la remarque sur laquelle la démonstration précédente est fondée. De plus, d'après ce qu'on vient de voir, *tout point* M *lié invariablement au cercle mobile, et situé en dehors ou en dedans de ce cercle, décrit une ellipse;* c'est un autre énoncé de la proposition du n° 1072.

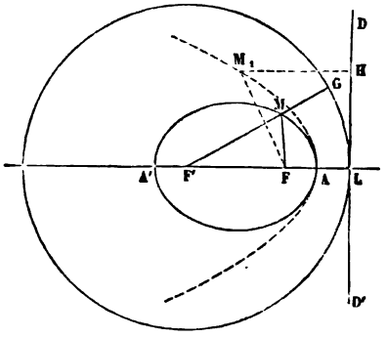
§ V. — PARABOLE CONSIDÉRÉE COMME LIMITE DE L'ELLIPSE.

THÉORÈME.

1074. *La limite d'une ellipse (ou d'une hyperbole) dont un sommet et le foyer voisin restent fixes, tandis que l'autre foyer s'en éloigne indéfiniment dans la direction du grand*

axe (*ou de l'axe transverse*), *est une parabole qui a pour sommet et pour foyer le sommet et le foyer fixes* (*fig.* 559).

Fig. 559.



En effet, le cercle directeur relatif au foyer mobile F′ coupe toujours le grand axe à droite du foyer fixe F, en un même point L déterminé par la condition évidente AL = AF. A mesure que le centre F′ de ce cercle s'éloigne dans la direction AA′, son rayon croît indéfiniment, de sorte qu'il a pour limite la perpendiculaire DD′ menée par le point L au grand axe AA′. D'ailleurs, tout point M de l'ellipse étant également distant du foyer F et du cercle directeur F′ (987), on a constamment MF = MG, c'est-à-dire à la limite, quand l'ellipse se déformant le point M vient en M_1, $M_1F = M_1H$, en désignant par M_1H la perpendiculaire abaissée du point M_1 sur la droite DD′, limite du cercle F′. Le lieu des positions limites des points de l'ellipse donnée est donc une parabole ayant pour foyer et pour sommet les points F et A et, par suite, la droite DD′ pour directrice.

La même démonstration s'applique à l'hyperbole (**1012**). Dans ce cas, la parabole est la limite de la demi-hyperbole de droite à laquelle appartiennent le sommet A et le foyer F; l'autre demi-hyperbole de gauche disparaît à l'infini.

COROLLAIRE.

1075. Le théorème précédent permet de prévoir et de démontrer les propriétés de la parabole, en les déduisant par

voie de transformation des propriétés correspondantes de l'ellipse.

Par exemple, pour démontrer que *la tangente à la parabole fait extérieurement des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et avec la parallèle menée à l'axe par le même point* (1033), il suffit de remarquer que, lorsque l'un des foyers de l'ellipse s'éloigne à l'infini, le rayon vecteur relatif à ce foyer tend à devenir parallèle au grand axe.

De même, pour établir que *le lieu des projections du foyer de la parabole sur ses tangentes est la tangente au sommet* (1042), on n'a qu'à observer que le cercle principal de l'ellipse tend vers la tangente au sommet fixe du grand axe, lorsque l'autre sommet se transporte à l'infini.

Si les propriétés considérées dépendent explicitement des axes a et b de l'ellipse et de sa distance focale c, on substitue à a et à b leurs valeurs en fonction de c et du paramètre $p = 2(a - c)$ de la parabole limite ; puis, en supposant c infini dans les formules obtenues, on passe des propriétés de l'ellipse représentées par ces formules aux propriétés correspondantes de la parabole exprimées en fonction du paramètre p.

THÉORÈME.

1076. *Tous les diamètres de la parabole sont des droites parallèles à l'axe.*

On démontre immédiatement cette proposition en regardant la parabole comme la limite d'une ellipse (1074) dont l'un des foyers et le sommet voisin coïncident avec le foyer et le sommet de la parabole, mais dont l'autre foyer et, par suite, le centre se transportent à l'infini sur le grand axe de la courbe.

Les propriétés de l'ellipse démontrées aux n°s 1065 et 1066 appartiennent aussi à la parabole limite. Ces propriétés vont nous permettre d'établir la proposition suivante.

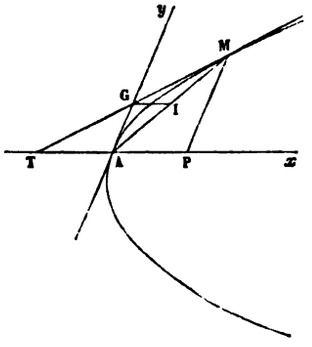
THÉORÈME.

1077. *La parabole étant rapportée au système d'axes obliques formé par un diamètre et la tangente à son extrémité, dans ce nouveau système d'axes, la sous-tangente est encore double de l'abscisse du point de contact* (1045).

En effet, soient (*fig.* 560) la tangente Ay et le diamètre Ax pris pour

axes coordonnés; menons la tangente MT en un point quelconque M de la parabole. Si, par le point d'intersection G des tangentes Ay et MT, on

Fig. 560.

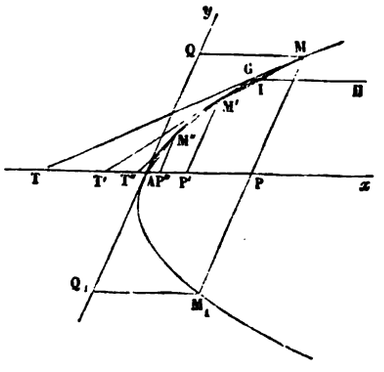


mène une parallèle à Ax, cette parallèle coupera la corde AM en son milieu (1066) : le point G est donc le milieu de TM. AGy étant parallèle à l'ordonnée MP, le point A est alors le milieu de la sous-tangente TP.

THÉORÈME.

1078. *L'aire d'un segment parabolique est les deux tiers du parallélogramme qui a pour côtés la corde et la flèche du segment, cette flèche étant mesurée sur le diamètre conjugué à la corde du segment.*

Fig. 561.



Soit (*fig.* 561) le segment parabolique MAM$_1$ déterminé par la corde

MM_1. Prenons pour axes coordonnés le diamètre Ax conjugué à cette corde et la tangente parallèle Ay. Évaluons d'abord l'aire de la portion MAP.

Inscrivons dans l'arc AM une ligne brisée $MM'M''\ldots A$ et, par les sommets de cette ligne brisée, menons à la courbe les tangentes MT, M'T',..., jusqu'à la rencontre du diamètre Ax; menons aussi les ordonnées MP, M'P',..., des sommets de la ligne brisée.

Comparons le trapèze MM'P'P au triangle correspondant GTT'. Si l'on mène par le sommet G du triangle une parallèle GH à Ax, elle passera par le milieu I de la corde MM' (1076). La perpendiculaire abaissée du milieu du côté MM' sur le côté PP' du trapèze MM'P'P est donc égale à la hauteur du triangle GTT'. Pour avoir le rapport de leurs aires, il suffit d'après cela de comparer le côté PP' du trapèze à la base TT' du triangle. Or (1077)

$$AT = AP \quad \text{et} \quad AT' = AP',$$

d'où

$$TT' = PP'.$$

Le triangle est donc la moitié du trapèze. Et, comme on peut répéter le même raisonnement pour chaque trapèze et pour le triangle correspondant, la somme des trapèzes reste toujours égale au double de la somme des triangles. La limite de la première somme étant l'aire MAP et la limite de la seconde l'aire MAT, l'aire MAP est les deux tiers du triangle total MTP ou du parallélogramme équivalent APMQ.

L'aire M_1AP étant de même les deux tiers du parallélogramme APM_1Q_1, l'aire cherchée MAM_1 est enfin les deux tiers du parallélogramme MQQ_1M_1, qui a pour côtés la corde MM_1 du segment ou le double de l'ordonnée MP, et la flèche de ce segment ou l'abscisse AP.

§ VI. — ORIGINE COMMUNE DES TROIS COURBES. SECTIONS PLANES DU CONE DE RÉVOLUTION.

1079. Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, à chaque foyer F correspond une droite D qu'on nomme *directrice;* c'est la perpendiculaire à l'axe focal élevée par le point E qu'on obtient en portant sur cet axe, à partir du centre O et de O vers F, une longueur OE égale à $\frac{a^2}{c}$ (*fig.* 562).

Dans l'ellipse, a étant plus grand que c, OE est plus grand que OF : le point E tombe donc sur le prolongement de OF; en d'autres termes le foyer est entre la directrice correspondante et le centre. Dans l'hyperbole au contraire, a étant plus petit que c, OE est moindre que OF;

le point E tombe donc entre O et F, en d'autres termes la directrice passe entre le centre et le foyer correspondant.

THÉORÈME.

1080. *La directrice* D *relative à un foyer* F *est :*

1° *La polaire* P *de ce foyer par rapport au cercle principal;*

2° *L'axe radical* R *de ce foyer et du cercle directeur relatif à l'autre foyer.*

En effet :

1° La polaire P est (341) perpendiculaire à OF et située par rapport au centre du même côté que le foyer F, à une distance égale à $\frac{a^2}{c}$ puisque le rayon a du cercle principal est moyen proportionnel entre les distances du centre au pôle F et à la polaire P.

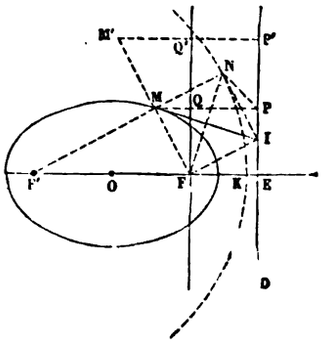
2° L'axe radical R (401, 10°) est perpendiculaire à FF', du même côté que F par rapport au point O et à une distance de ce centre égale à $\frac{(2a)^2}{4c} = \frac{a^2}{c}$, puisque $2a$ est le rayon du cercle directeur (F').

THÉORÈME.

1081. *Dans l'ellipse ou dans l'hyperbole, le rapport des distances d'un point quelconque* M *de la courbe à un foyer* F *et à la directrice correspondante* D *est constant et égal à l'excentricité* $\frac{c}{a}$ (*fig.* 562).

En effet, soient P la projection du point M sur la directrice D, N le point

Fig. 562.



où F'M prolongé rencontre le cercle directeur (F'), et I le point où la tangente en N à ce cercle rencontre D. D'après le théorème précédent,

on a IN = IF; d'ailleurs MN est égal à MF; les deux triangles MNI, MFI ont donc les trois côtés égaux; par suite, l'angle MFI est droit comme l'angle MNI et le cercle décrit sur MI comme diamètre passe par F, N, P. Il résulte de là que l'angle NPM est égal à NFM ou (puisque le triangle MNF est isocèle) à MNF.

D'ailleurs les angles NMP, NF'F sont égaux comme correspondants. Les triangles NMP, F'NF sont donc équiangles, et l'on a la proportion

$$\frac{MN}{MP} = \frac{FF'}{NF'} \quad \text{ou} \quad \frac{MF}{MP} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},$$

qui exprime le théorème énoncé.

COROLLAIRE.

1082. *Le lieu des points dont les distances à un point fixe et à une droite fixe ont un rapport constant* λ *est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que le rapport* λ *est inférieur, supérieur ou égal à l'unité* (*fig.* 562).

Pour $\lambda = 1$, la proposition résulte de la définition même de la parabole.

Supposons $\lambda < 1$, et considérons l'ellipse qui a pour foyer le point fixe F, pour directrice correspondante la droite fixe D et pour excentricité le rapport λ. Cette ellipse est bien déterminée, car les relations

$$\frac{c}{a} = \lambda, \qquad \frac{a^2}{c} - c = FE,$$

dont les seconds membres sont connus, assignent des valeurs uniques et finies aux éléments a et c. Or, d'après le théorème précédent, tout point de cette ellipse appartient au lieu, et il reste seulement à montrer que tout autre point M' du plan ne saurait faire partie du lieu. Or soient M le point où la demi-droite FM' rencontre l'ellipse, P et P' les projections de M et M' sur la directrice D, et Q et Q' les points où MP et M'P' coupent la parallèle à D menée par le foyer F. On aura

$$\frac{FM}{FM'} = \frac{MQ}{MQ'} = \frac{MP \pm FE}{M'P' \pm FE},$$

les signes se correspondant. Mais, d'après un théorème connu sur les fractions dont on augmente ou on diminue les termes d'une même quantité, le dernier rapport est, par suite, le premier, diffère de $\frac{MP}{M'P'}$; donc les rapports $\frac{FM}{MP}$, $\frac{F'M'}{M'P'}$ sont inégaux; comme le premier est égal à λ,

le second ne saurait l'être et, par suite, le point M' n'appartient pas au lieu.

Le raisonnement subsiste pour $\lambda > 1$; il n'y a qu'à substituer au mot *ellipse* le mot *hyperbole*.

D'après ce corollaire, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole ont une même origine; aussi leur a-t-on donné une dénomination commune. Le nom qui a prévalu est celui de *conique*, que nous adopterons désormais, et dont nous allons montrer tout à l'heure l'origine.

THÉORÈME.

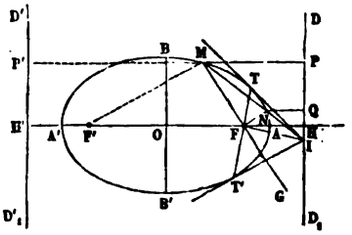
1083. *La droite* FI *qui joint le foyer d'une conique au point où une corde quelconque* MN *rencontre la directrice est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs* FM *et* FN *ou de son supplément, suivant que les deux points* M *et* N *appartiennent à des branches différentes ou à une même branche* (*fig.* 563).

En effet, P et Q étant les projections de M et N sur la directrice D, les rapports

$$\frac{\text{IM}}{\text{IN}}, \frac{\text{FM}}{\text{FN}}$$

sont égaux entre eux comme étant égaux respectivement à $\frac{\text{MP}}{\text{NQ}}$. Donc la droite FI bissecte l'angle MFN ou son supplément, suivant que le

Fig. 563.



point I est situé entre M et N ou sur le prolongement de MN. Or le premier cas ne peut se présenter que si la courbe est une hyperbole et si M et N appartiennent à des branches différentes.

Corollaires.

1084. *Si d'un point quelconque* I *de la directrice* D *on mène des tangentes* IT, IT' *à une conique, la droite des contacts* TT' *passe par le*

foyer F *correspondant et est perpendiculaire à la droite qui joint le point* I *au foyer.*

En effet, supposons que dans le théorème précédent les points M et N viennent se confondre, auquel cas M et N appartiennent forcément à la même branche, la ligne FI sera la bissectrice de la limite du supplément de l'angle MFN, c'est-à-dire la perpendiculaire à la droite FT qui représente les deux rayons vecteurs confondus. On verrait de même que FT′ est perpendiculaire à FI. Donc les trois points T, F, T′ sont sur une même perpendiculaire à FI.

1085. Le même théorème fournit une solution simple du problème qui consiste à *construire une conique connaissant un foyer* F *et trois points* A, B, C.

Tout revient à trouver la directrice D relative au foyer F. Or on obtient deux points de cette droite en appliquant successivement la proposition (1083) aux deux cordes AB et BC.

On verra aisément qu'il y a quatre solutions et que, des quatre coniques obtenues, trois sont certainement des hyperboles; la quatrième est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant la disposition des données.

THÉORÈME.

1086. *La section d'un cône circulaire droit par un plan est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.*

1° Supposons que *le plan sécant rencontre toutes les génératrices du cône sur une même nappe* (*fig.* 564).

Menons le plan méridien (869, 3°) du cône qui est perpendiculaire au plan sécant AMA′; il coupera le cône suivant les deux génératrices SA et SA′ qui font entre elles l'*angle au sommet* de la surface, et le plan sécant suivant la droite AA′. Dans le plan méridien considéré, construisons les circonférences O et O′ qui, situées de part et d'autre de AA′, sont à la fois tangentes aux génératrices SA et SA′ et à la droite AA′ qu'elles touchent aux points F et F′. Si l'on fait tourner le plan méridien autour de l'axe SO, ces deux circonférences engendreront deux sphères tangentes à la surface conique suivant les parallèles (869, 3°) BC et B′C′, et tangentes au plan sécant en F et en F′.

Cela posé, prenons un point M quelconque sur la courbe d'intersection; menons les droites MF, MF′ et la génératrice SM qui coupera en G et en G′ les parallèles BC, B′C′. La droite MF étant tangente à la sphère O (787), on a (788) MF = MG. On a de même, par rapport à la sphère O′, MF′ = MG′.

Par suite,

$$MF + MF' = MG + MG' = GG' = BB' = \text{const.}$$

D'ailleurs, en vertu des propriétés rappelées, on a

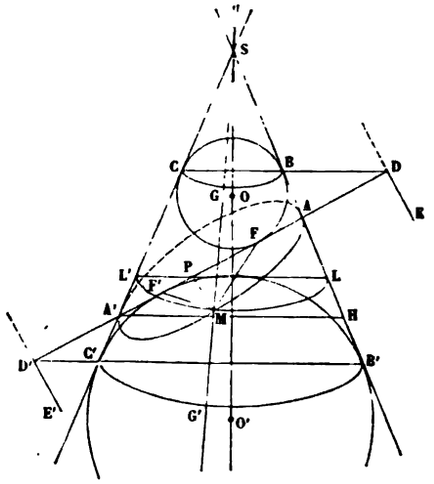
$$BB' = AB + AB' = AF + AF' \quad \text{et} \quad BB' = CC' = CA' + A'C' = A'F + AF'.$$

Il en résulte évidemment

$$AF = A'F' \quad \text{et} \quad BB' = AA'.$$

La courbe obtenue est donc *une ellipse ayant* AA' *pour grand axe et les points* F *et* F' *pour foyers.*

Fig. 564.



Si l'on trace A'H parallèle à BC, AH est la *distance focale* de cette ellipse. En effet,

$$AF' = AB' \quad \text{et} \quad HB' = A'C' = AF.$$

Les plans des parallèles BC, B'C', prolongés jusqu'à la rencontre du plan sécant, le coupent suivant deux droites DE, D'E', perpendiculaires au plan méridien considéré (561). Si l'on mène le parallèle LL' de la surface qui passe par le point M, son intersection avec le plan sécant

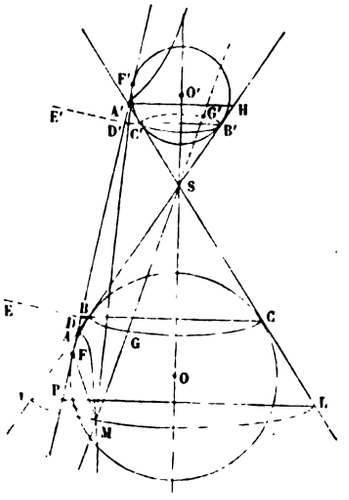
est de même dirigée suivant l'ordonnée MP de ce point par rapport au grand axe AA′, et PD représente la distance du point M à la droite DE. Les triangles APL, ADB, AA′H, évidemment semblables, donnent alors

$$\frac{\text{BL ou MF}}{\text{PD}} = \frac{\text{AB}}{\text{AD}} = \frac{\text{AH}}{\text{AA}'} = \text{const.}$$

Ainsi, les distances de chaque point de l'ellipse trouvée au foyer F et à la droite DE sont entre elles dans un rapport égal à l'excentricité (973) de la courbe. La même démonstration s'applique au foyer F′ et à la droite D′E′. Les droites DE, D′E′, sont donc les *directrices* de la section.

2°. Supposons que *le plan sécant rencontre les deux nappes du cône* (*fig.* 565).

Fig. 565.



On a alors

$$MF' - MF = MG' - MG = GG' = BB' = \text{const.};$$

d'ailleurs,

$$BB' = AB' - AB = AF' - AF \quad \text{et} \quad BB' = CC' = A'C - A'C' = A'F - A'F'.$$

Il en résulte évidemment

$$AF = A'F' \quad \text{et} \quad BB' = AA'.$$

La courbe obtenue est donc *une hyperbole, ayant* AA' *pour axe transverse et les points* F *et* F' *pour foyers.*

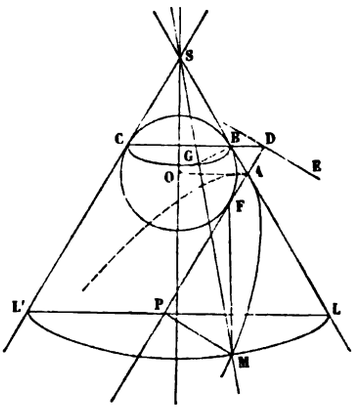
Si l'on trace A'H parallèle à B'C', AH est la *distance focale* de cette hyperbole. En effet,

$$AB' = AF' \quad \text{et} \quad B'H = C'A' = A'F'.$$

Les droites DE et D'E', intersections des parallèles BC, B'C', avec le plan sécant, sont les *directrices* de l'hyperbole. Le rapport des distances du point M au foyer F et à la droite DE est égal à l'excentricité de la courbe. C'est ce que les triangles semblables APL, ADB, AA'H, montrent immédiatement.

3° Supposons le *plan sécant parallèle à l'une des génératrices du cône* (*fig.* 566).

Fig. 566.



Ayant mené le plan méridien LSL' perpendiculaire au plan sécant, ce dernier se trouve parallèle à la génératrice SL' et est alors coupé par le plan méridien suivant une droite AP parallèle (495, 1°) à cette génératrice. Dans le plan méridien, construisons la circonférence O, tangente aux génératrices principales en B et en C, et la droite AP au point F. Si l'on fait tourner la figure autour de l'axe SO, la sphère engendrée par

la circonférence O est tangente au cône suivant le parallèle BC et touche en F le plan sécant.

Cela posé, prenons un point quelconque M sur la courbe d'intersection ; menons la droite MF et la génératrice SM qui coupe en G le parallèle BC de la surface ; menons également le parallèle LL′ de la surface qui passe par le point M et qui rencontre le plan sécant suivant l'ordonnée MP de ce point par rapport à AP. On aura toujours

$$MF = MG = BL.$$

D'ailleurs, l'intersection du plan sécant et du parallèle BC est une droite DE perpendiculaire au plan méridien, et PD représente la distance du point M à la droite DE. Les deux triangles APL, ABD étant isocèles, puisqu'ils sont tous deux semblables au triangle SLL′, on a

$$PD = BL, \quad \text{c'est-à-dire} \quad MF = PD.$$

La courbe obtenue est donc *une parabole ayant le point* F *pour foyer et la droite* DE *pour directrice.*

Scolie.

1087. Les sphères considérées dans la démonstration précédente peuvent, tout en restant inscrites au cône, cesser d'être tangentes au plan sécant qui les coupe alors suivant deux cercles. Les mêmes raisonnements étant applicables à ce cas, on arrive à cette proposition : *Le lieu des points tels, que le rapport qui existe entre les tangentes menées de ces points à un cercle fixe et les distances de ces mêmes points à une droite fixe soit constant, est une section conique dont la nature dépend de la valeur de ce rapport comparée à l'unité* (1086).

THÉORÈME.

1088. *Placer une ellipse, une hyperbole ou une parabole donnée sur un cône de révolution donné.*

1° Si l'on se reporte à la *fig.* 564, on voit qu'on connaît dans le triangle AA′H le grand axe AA′ de l'ellipse donnée et sa distance focale AH, ainsi que l'angle AHA′, complément du demi-angle au sommet du cône donné. La question revient donc à construire un triangle avec deux côtés et l'angle opposé à l'un deux. Comme l'angle donné est opposé au plus grand des deux côtés donnés, ce triangle est complètement déterminé (146). Quand il sera construit, on élèvera une perpendiculaire sur

le milieu de A'H, et la surface conique engendrée par AH en tournant autour de cette perpendiculaire sera coupée suivant l'ellipse donnée par un plan mené suivant AA' perpendiculairement au plan du triangle AA'H. *On peut donc toujours placer une ellipse donnée sur un cône donné.*

2° Si l'on se reporte à la *fig.* 565, on voit qu'on connaît dans le triangle AA'H l'axe transverse AA' et la distance focale AH de l'hyperbole donnée, ainsi que l'angle AHA', complément du demi-angle au sommet du cône donné. Comme cet angle est opposé ici au plus petit des deux côtés donnés, le problème peut avoir deux solutions ou n'en avoir aucune (146). Pour qu'il soit possible, il faut que AA' surpasse la perpendiculaire abaissée du point A sur HA', c'est-à-dire qu'on ait, en appelant 2β l'angle au sommet du cône et en posant (1000) $AA' = 2a$, $AH = 2c$,

$$2a > 2c\cos\beta \quad \text{ou} \quad \cos\beta < \frac{a}{c}.$$

Mais, si l'on appelle 2θ l'angle des deux asymptotes de l'hyperbole proposée, on a évidemment (1015)

$$\frac{a}{c} = \cos\theta.$$

La condition cherchée est donc

$$\cos\beta < \cos\theta,$$

ou, puisqu'il s'agit d'angles inférieurs à un droit,

$$\beta > \theta \quad \text{ou} \quad 2\beta > 2\theta.$$

Donc, *pour pouvoir placer une hyperbole donnée sur un cône de révolution donné, il faut que l'angle au sommet du cône surpasse celui des deux angles des asymptotes de l'hyperbole qui comprend la courbe.*

3° S l'on se reporte à la *fig.* 566, on voit que la droite OA est perpendiculaire à l'axe SO, d'après la détermination du point O et le parallélisme des droites SL' et AP. Dans le triangle rectangle OBA, on connaît par suite le côté $AB = AD = \frac{FD}{2}$, demi-paramètre de la parabole donnée (1028), et l'angle BAO, complément du demi-angle au sommet du cône donné. Ce triangle est donc complètement déterminé (32). L'ayant construit, on élèvera OS perpendiculaire sur OA, et la surface conique

engendrée par la rotation de AB autour de SO sera coupée suivant la parabole donnée par un plan mené perpendiculairement à celui du triangle OBA et passant par la droite AP, tracée de manière que AO soit la bissectrice de l'angle SAP. *On peut* donc *toujours placer une parabole donnée sur un cône donné.*

SCOLIE.

1089. Le sommet d'un cône de révolution s'éloignant à l'infini dans la direction de l'axe, ce cône dégénère en cylindre de révolution. *Un cylindre circulaire droit est* donc *coupé suivant une ellipse par un plan sécant quelconque* (1086, 1°).

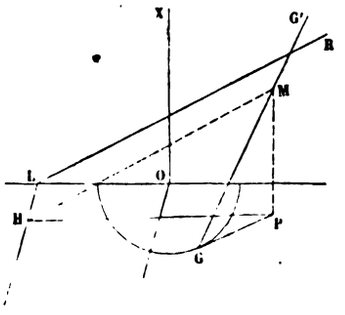
C'est ce qu'on démontrera, du reste, directement en adoptant la même marche que précédemment. Cette marche permettra de déterminer le grand axe, le foyer et les directrices de la section proposée. On en déduira facilement que *toutes les ellipses trouvées en coupant par un plan quelconque un cylindre de révolution ont pour petit axe le diamètre de ce cylindre.*

On peut toujours placer une ellipse donnée sur un cylindre de révolution donné (1088, 1°), *lorsque le petit axe de l'ellipse est égal au diamètre du cylindre.*

THÉORÈME.

1090. *Si l'on coupe une surface gauche de révolution par un plan, la projection de l'intersection sur un plan perpendiculaire à l'axe de la surface est une section conique* (*fig.* 567).

Fig. 567.



On appelle *surface gauche de révolution* la surface engendrée par une droite non située dans un même plan avec l'axe autour duquel elle tourne.

Le plus petit parallèle de la surface, engendré par la plus courte distance de la génératrice à l'axe (538), porte le nom de *cercle de gorge* de la surface. La projection de la génératrice sur le plan du cercle de gorge est tangente à ce cercle, car, cette génératrice étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon du cercle de gorge, il en est de même de sa projection (531).

Cela posé, représentons la surface par son axe OX, son cercle de gorge OG et l'une de ses génératrices GG'. Coupons-la par un plan HLR. Si ce plan rencontre en M la génératrice GG', M sera un point de la courbe d'intersection. Sa projection sur le plan du cercle de gorge sera en P, sur la tangente GP à ce cercle. La génératrice faisant un angle constant avec le plan du cercle de gorge, le rapport de PG à MP reste constant.

Menons par le point M la ligne de plus grande pente MH (555, 556) du plan HLR par rapport au plan du cercle de gorge, et traçons la droite PH. La droite MH faisant de même un angle constant avec le plan du cercle de gorge, le rapport de PH à MP reste constant; le rapport de PG à PH est donc aussi constant, et le théorème est démontré (1087).

COROLLAIRES.

1091. Si le rayon du cercle de gorge devient nul, la surface gauche de révolution dégénère en un cône. Donc, *la projection d'une section conique sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône de révolution sur lequel elle est placée est une section conique, dont l'un des foyers est la projection du sommet de cône sur le plan de projection et dont la directrice correspondante est la projection sur le même plan de l'intersection du plan sécant avec le plan mené par le sommet du cône parallèlement au plan de projection.*

PROBLÈME.

1092. *Construire une ellipse ou une hyperbole dont on connaît l'excentricité* $\frac{c}{a}$, *l'un des foyers, et deux points ou deux tangentes, ou une tangente et son point de contact.*

Nous résolvons ce problème pour montrer de quelle utilité peut être la considération des directrices.

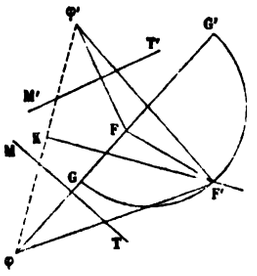
1° Soient F le foyer donné, A et B les deux points donnés; déterminons les longueurs r et r' par les conditions

$$\frac{AF}{r} = \frac{c}{a}, \quad \frac{BF}{r'} = \frac{c}{a},$$

puis décrivons deux circonférences des points A et B comme centres avec les rayons r et r'. La directrice correspondant au foyer F sera une tangente commune aux circonférences décrites. En abaissant sur cette tangente DE une perpendiculaire FD et en marquant sur cette perpendiculaire les deux points A et A' qui la divisent dans le rapport $\frac{c}{a}$, on aura l'axe focal AA' de la section conique ; sa distance focale FF' s'obtiendra en prenant dans le sens convenable, suivant la valeur de $\frac{c}{a}$, $A'F' = AF$. La question sera alors ramenée à construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant ses axes.

2° Soient F le foyer donné, MT, M'T', les deux tangentes données (*fig.* 568). Déterminons les points φ et φ' symétriques du foyer par rapport à ces tangentes. La perpendiculaire indéfinie KF' élevée à $\varphi\varphi'$ par son milieu K est un lieu de second foyer F' (984, 1010). Ce second foyer fait également partie du lieu dont le rapport des distances aux deux points fixes F et φ est égal à $\frac{c}{a}$. Nous déterminerons donc les points G et G' qui divisent $F\varphi$ dans ce même rapport, et sur GG' comme diamètre nous décrirons (187) une circonférence qui coupera KF' au point cherché. Il ne restera plus qu'à construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant la distance focale FF' et l'axe focal $F'\varphi$ de la courbe.

Fig. 568.



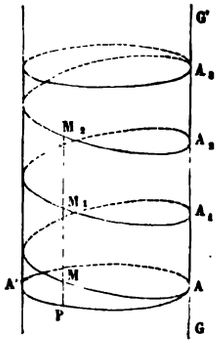
3° Soient F le foyer donné et MT la tangente donnée qui doit toucher la conique au point donné M. Déterminons le symétrique φ du foyer par rapport à MT ; en joignant φM, nous aurons un lieu du second foyer F' (987. 1012). Divisons comme précédemment (2°) $F\varphi$, aux points G et G', dans le rapport donné $\frac{c}{a}$. La circonférence décrite sur GG' comme diamètre viendra couper en F' la droite φM prolongée, et le problème sera résolu.

§ VII. — PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'HÉLICE.

1093. Soit un cylindre droit à base quelconque, mais fermée. On peut déterminer un point quelconque de la surface de ce cylindre à l'aide de coordonnées définies de la manière suivante.

Considérons une section droite AA′ (*fig.* 569) qui coupe au

Fig. 569.



point A la génératrice GG′, et prenons ce point A pour *origine* des arcs comptés sur le périmètre de cette section droite. Ces arcs seront positifs dans un sens, négatifs en sens opposé.

Cela posé, soient M un point quelconque de la surface cylindrique, et MP la génératrice qui passe par ce point et qui rencontre en P la section AA′ : la longueur MP est l'*ordonnée y du point* M et l'arc AP est *son abscisse curviligne x*.

Comme le point M peut appartenir à une courbe qui décrit plusieurs circonvolutions autour du cylindre, son abscisse peut dépasser le périmètre de la section AA′ et comprendre ce périmètre un nombre quelconque de fois.

En suivant la courbe proposée à partir de son premier point de rencontre avec la génératrice GG′ et en comptant combien de fois elle coupe cette génératrice avant qu'on parvienne au

point M, on devra ajouter le périmètre de AA′ ce même nombre de fois à l'arc qui sépare le point A du pied de l'ordonnée du point M, pour avoir l'abscisse curviligne de ce point.

1094. Parmi toutes les courbes qu'on peut ainsi tracer sur la surface d'un cylindre droit, l'*hélice* est définie par cette condition que *l'ordonnée d'un point est proportionnelle à son abscisse curviligne.*

L'équation de l'hélice, dans le système de coordonnées adopté (1093), est donc

$$y = kx.$$

Désignons par C le périmètre de la section droite AA′ (*fig.* 569). x variant de zéro à C, on a un premier arc d'hélice qui part du point A et qui, après avoir coupé toutes les génératrices du cylindre, vient rencontrer de nouveau en A_1 la génératrice GG′. x variant de C à 2C, de 2C à 3C, ..., on a de nouveaux arcs de courbe allant de A_1 à A_2, de A_2 à A_3, ... Les valeurs extrêmes de y sont, en même temps, 0, kC, 2kC, 3kC, ... Les distances AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., qui séparent les points où l'hélice vient rencontrer une même génératrice GG′, sont donc égales. Cette distance, constante quelle que soit la génératrice considérée, est ce qu'on appelle le *pas* de l'hélice. Les arcs de courbe AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., sont de même égaux entre eux; ils ne sont évidemment que la reproduction du premier arc AA_1 qu'on ferait glisser successivement le long du cylindre d'une hauteur égale au pas. Ces arcs égaux, dans lesquels l'hélice se trouve ainsi naturellement partagée, constituent les *spires* de la courbe.

THÉORÈME.

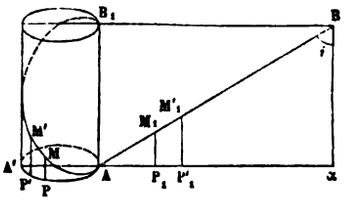
1095. *Lorsqu'on effectue le développement d'une surface cylindrique sur l'un de ses plans tangents, toute hélice tracée sur la surface se développe suivant une ligne droite* (*fig.* 570).

Soit (*fig.* 570) l'hélice AMB_1; pour deux points quelconques M et M′ de cette courbe, on a la relation

$$\frac{MP}{AP} = \frac{M'P'}{AP'}.$$

Si l'on suppose qu'on développe la surface du cylindre dans le plan tangent suivant la génératrice AB_1 (744, 873), la circonférence de la section droite en A s'appliquera sur la droite $A\alpha$ menée perpendiculairement à AB_1 dans ce plan, et les arcs

Fig. 570.



AP et AP′ seront rectifiés en AP_1 et AP'_1. Les points M et M′ viendront d'ailleurs se placer en M_1 et en M'_1 sur les perpendiculaires élevées à $A\alpha$ en P_1 et en P'_1, et l'on aura

$$M_1P_1 = MP, \quad M'_1P'_1 = M'P'.$$

Puisque par hypothèse $\frac{MP}{AP} = \frac{M'P'}{AP'}$, on aura aussi

$$\frac{M_1P_1}{AP_1} = \frac{M'_1P'_1}{AP'_1},$$

et les points A, M_1, M'_1, seront en ligne droite. Si l'on développe une seule spire, $A\alpha$ représente le périmètre de la section AA′ et αB le pas de l'hélice.

THÉORÈME.

1096. *La sous-tangente en un point de l'hélice est égale à l'abscisse curviligne de ce point* (*fig.* 571).

La *sous-tangente* en un point de l'hélice est la projection, sur le plan de la section droite prise pour base, de la portion de tangente en ce point comprise entre son point de contact et sa trace sur le plan de la base.

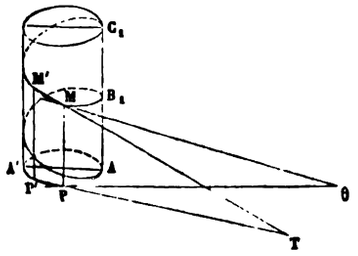
Considérons sur la courbe les deux points voisins M et M′,

dont les ordonnées sont MP et M′P′ et les abscisses curvilignes AA′AP et AA′AP′. On a (1094)

$$(1) \qquad \frac{MP}{AA'AP} = \frac{M'P'}{AA'AP'}.$$

Prolongeons la corde MM′ jusqu'au point T où elle rencontre forcément le plan de la base, puisque l'on a M′P′ > MP. Ce

Fig. 571.



point T appartiendra au prolongement de la corde PP′ de la base. Les deux triangles semblables MTP, M′T′P′, donnent alors

$$\frac{MP}{TP} = \frac{M'P'}{TP'}.$$

Par suite, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{TP}{AA'AP} = \frac{TP'}{AA'AP'}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{TP' - TP}{AP' - AP} = \frac{TP'}{AA'AP'}.$$

On peut écrire cette dernière égalité sous la forme

$$\frac{TP'}{AA'AP'} = \frac{\text{corde } PP'}{\text{arc } PP'}.$$

Lorsque le point M′ se rapproche indéfiniment du point M regardé comme fixe, le point P′ se rapproche indéfiniment du point P. La sécante M′MT devient la tangente Mθ à l'hélice au point M; la sécante P′PT devient à la fois la tangente en P

à la base et la sous-tangente $P\theta$ au point M. La limite du rapport $\frac{\text{corde } PP'}{\text{arc } PP'}$ étant l'unité (292), on a finalement

$$\lim. \frac{TP'}{AA'AP'} = \frac{P\theta}{AA'AP} = 1;$$

ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRES.

1097. Le rapport $\frac{r}{x}$ étant constant (1094), *le rapport de l'ordonnée d'un point à la sous-tangente de ce point est aussi constant.* Le triangle $MP\theta$ étant alors toujours semblable à lui-même, *la tangente à l'hélice fait un angle constant, aussi bien avec les génératrices du cylindre qu'avec le plan d'une section droite.* Ces deux angles sont complémentaires.

Si l'on désigne par h le pas de l'hélice et par C le périmètre de la base, on a (1095)

$$\frac{r}{x} = \frac{h}{C};$$

si l'on désigne par i (*fig.* 570) l'angle suivant lequel les génératrices du cylindre sont coupées par l'hélice, on a

$$\text{tang } i = \frac{C}{h}.$$

Pour construire la tangente en un point M de l'hélice, il suffit donc de mener, dans le plan tangent au cylindre en ce point, une droite faisant l'angle i avec la génératrice qui passe par ce point.

On peut aussi prendre, à partir du point P, pied de l'ordonnée du point M, sur la tangente à la base, une longueur $P\theta$ égale à l'arc AP rectifié, et joindre le point θ au point M.

1098. Si l'on enroule un fil sur une courbe quelconque, une de ses extrémités étant fixée en un point de la courbe, puis qu'on le déroule en le tendant constamment dans la direction des tangentes à la courbe, son extrémité libre décrit une *déve-*

loppante de la courbe proposée qui, à son tour, est la *développée* de la courbe obtenue.

Le lieu des points θ ou des traces des tangentes à l'hélice sur le plan de la base est *une développante* de cette base. La surface formée par les tangentes elles-mêmes est connue sous le nom d'*hélicoïde développable*.

SCOLIE.

1099. L'hélice que l'on considère le plus souvent dans les applications est tracée sur un cylindre de révolution. Dans ce cas, le périmètre C de la base doit être remplacé par $2\pi r$ et, alors, il est commode d'introduire dans les formules précédentes, au lieu de h, la quantité $\frac{h}{2\pi}$ qu'on désigne par h' et qu'on nomme *pas réduit*.

§ VIII. — APPENDICE.

I. — HOMOGRAPHIE ET INVOLUTION.

DIVISIONS HOMOGRAPHIQUES.

1100. On donne le nom de *division* à une suite quelconque de points situés en ligne droite. Sur cette droite, qu'on appelle *base* de la division, on choisit à volonté une origine fixe a, et l'on indique sans ambiguïté la position d'un point quelconque m en donnant le segment am en grandeur et en signe.

Dans un grand nombre de questions de Géométrie, on est conduit à considérer deux divisions dont les points se correspondent un à un suivant une loi déterminée; on appelle alors *homologues* deux points correspondants quelconques, et on les désigne par une même lettre, non accentuée pour le point de la première division, et affectée d'un accent pour le point de la seconde. Soient L et L' les deux bases (*fig.* 572), m et m' deux points homologues; a l'origine prise sur la base L et b' l'origine choisie sur la base L' (¹); la loi suivant laquelle les points homologues des deux divisions se correspondent s'exprimera alors par une équation entre les segments am et $b'm'$.

On dit que deux divisions sont *homographiques* lorsque l'équation qui exprime la loi de correspondance des points homologues m et m' est du

(¹) Nous supposons, pour plus de généralité, que les origines a et b' ne sont pas nécessairement deux points homologues.

premier degré par rapport à chacun des segments am et $b'm'$, c'est-à-dire est de la forme

$$(1) \qquad A.am.b'm' + B.am + C.b'm' + D = 0,$$

A, B, C, D, étant des constantes données.

Deux divisions homographiques d'une troisième sont homographiques entre elles; car soit une autre division homographique de la première; en désignant par c'' l'origine et par m'' l'homologue de m, on aura

$$A_1.am.c''m'' + B_1.am + C_1.c''m'' + D_1 = 0,$$

et, comme l'élimination de am entre les deux relations précédentes conduit évidemment à une équation de même forme entre $b'm'$ et $c''m''$, les deux divisions engendrées par les points m' et m'' sont homographiques.

Souvent, au lieu de donner les quantités A, B, C, D, on donne des couples de points homologues. Or, l'équation (1) ne renferme en réalité que trois coefficients arbitraires, qui sont les rapports de trois quelconques des quantités A, B, C, D, à la quatrième; d'ailleurs, donner un couple de points homologues, c'est donner une valeur de am et la valeur correspondante de $b'm'$, c'est-à-dire une équation du premier degré entre les trois rapports considérés. Pour déterminer ces rapports, il est donc nécessaire et suffisant d'avoir trois équations de ce genre, c'est-à-dire de connaître trois couples de points correspondants. Ainsi, *deux divisions homographiques sont déterminées par trois couples de points homologues.*

1101. Écartons, pour le moment, le cas particulier où A est nul; nous pourrons alors diviser par A, et la relation homographique (1) prendra la forme

$$(2) \qquad am.b'm' - \lambda.am - \mu.b'm' + \nu = 0.$$

Les coefficients λ et μ ont des significations géométriques remarquables. Nous désignerons toujours, dans la suite, par I le point de la première division qui est l'homologue du point situé à l'infini dans la seconde, et par J' le point de la seconde division qui répond à l'infini de la première. Si, dans la relation (2), on fait am infini après avoir divisé par am, on trouve

$$b'J' - \lambda = 0, \quad \text{d'où} \quad \lambda = b'J',$$

et l'on a de même, en faisant $b'm'$ infini,

$$aI - \mu = 0, \quad \text{d'où} \quad \mu = aI.$$

La relation homographique (2) peut être transformée de bien des manières. Voici les deux autres formes les plus utiles :

1° L'équation (2) peut s'écrire

$$(am - \mu)(b'm' - \lambda) = k,$$

k étant une constante; en remplaçant alors λ et μ par les valeurs ci-dessus, on trouve

$$Im.J'm' = k, \tag{3}$$

formule très-usuelle; car, dans les applications, on détermine en général très-aisément les points I et J', auxquels on donne le nom de *points limites*.

2° Soient a, b, c, trois points choisis à volonté dans la première division; a', b', c', leurs homologues dans la seconde, et m, m', un quatrième couple quelconque de points correspondants. La relation (3) donne

$$Ia = \frac{k}{J'a'}, \quad Ic = \frac{k}{J'c'}, \quad \text{d'où} \quad ca = Ia - Ic = -\frac{k}{J'a'.J'c'}\cdot c'a'.$$

En formant les valeurs analogues de cb, ma, mb, et les portant dans l'expression du rapport anharmonique

$$(abcm) \quad \text{ou} \quad \frac{ca}{cb} : \frac{ma}{mb},$$

on trouve

$$(abcm) = (a'b'c'm'). \tag{4}$$

Donc, *pour que deux divisions soient homographiques, il faut et il suffit que tout système de quatre points de la première ait le même rapport anharmonique que les quatre points homologues de la seconde*. C'est cette propriété que M. Chasles prend pour définition dans sa *Géométrie supérieure*.

1102. Examinons maintenant le cas où A est nul. La relation homographique (1) se réduit alors à

$$B.am + C.b'm' + D = 0,$$

ou, comme B et C ne sauraient être nuls à la fois, à

$$am = k(b'm' - h),$$

h et k étant deux constantes. Lorsque m est en a, le premier membre s'annule, et, comme m' coïncide alors avec l'homologue a' de a, on voit que $h = b'a'$ et, par suite, que l'équation précédente peut s'écrire

$$am = k(b'm' - b'a') \quad \text{ou} \quad am = k.a'm'.$$

Donc *les deux droites* L *et* L' *sont divisées en parties proportionnelles.*

On dit, dans ce cas, que les deux divisions homographiques sont *semblables*.

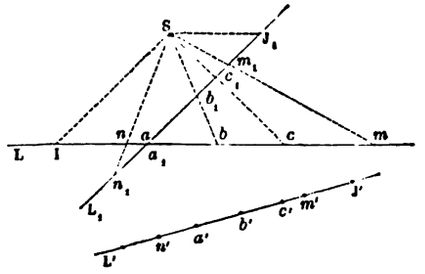
Dans deux divisions semblables, les points à l'infini sont homologues; car, d'après l'équation précédente, am et $a'm'$ deviennent infinis en même temps. Réciproquement, *deux divisions homographiques dont les points à l'infini se correspondent sont semblables*; car, si dans l'équation (1), préalablement divisée par $am.b'm'$, on fait à la fois am et $b'm'$ infinis, on voit que $A = 0$.

Lorsque le coefficient k qui figure dans la relation précédente est égal à $+1$, les deux divisions sont dites *égales*; elles sont *égales et de même sens* pour $k = 1$, *égales et de sens contraires* pour $k = -1$.

Pour deux divisions semblables, la relation (3) n'a plus de sens; mais il est évident que la relation (4) subsiste encore.

1103. Deux divisions $abcmn\ldots, a_1b_1c_1m_1n_1\ldots$, sont dites *homologiques*, lorsqu'elles sont la perspective l'une de l'autre, c'est-à-dire lorsque les droites $bb_1, cc_1, \ldots, mm_1, \ldots$, qui joignent les points homologues concourent en un même point S (*fig.* 572).

Fig. 572.



Deux divisions homologiques sont homographiques, puisque le rapport anharmonique est une expression projective; le point d'intersection (a, a_1) des deux bases L et L_1 est alors un point homologue commun. Réciproquement, *deux divisions homographiques qui ont un point homologue commun sont homologiques*; c'est le théorème fondamental du n° 324 avec un autre énoncé.

On déduit de là un moyen très simple pour *construire deux divisions homographiques dont on donne trois couples de points homologues*. Soient (a, a'), (b, b'), (c, c'), les trois couples donnés, et m' un point quelconque de la deuxième division; il s'agit de trouver le point m de la première division qui est l'homologue de m'. A cet effet, on portera

la division L', à l'aide d'une bande de papier, sur une droite quelconque L_1 passant par a, de façon que a' vienne en a; b_1, c_1, m_1, étant les positions que prennent alors b', c', m', on joindra m_1 au point de concours S des droites bb_1 et cc_1, et l'intersection des droites Sm_1 et L sera le point demandé m. Il est clair, en effet, que le système $abcm$ est homologique du système $a_1b_1c_1m_1$, et, par suite, homographique de son égal $a'b'c'm'$.

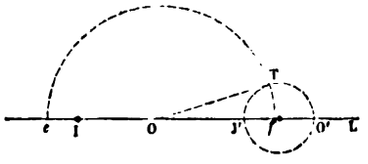
DIVISIONS HOMOGRAPHIQUES DE MÊME BASE.

1104. Deux divisions homographiques peuvent être situées sur une même droite L; on appelle alors *point double* tout point de cette droite qui, considérée comme appartenant à la première division, coïncide avec son homologue de l'autre division.

Deux divisions homographiques de même base, qui ont trois points doubles, coïncident; car a, b, c, étant les trois points doubles, et (m, m') un couple quelconque de points homologues, l'égalité des rapports anharmoniques $(abcm)$ et $(abcm')$ exigent que m et m' coïncident. Il suit de là que *deux divisions homographiques distinctes et tracées sur une même droite ne peuvent avoir plus de deux points doubles.*

1105. Pour étudier plus complétement la question des points doubles, prenons pour origine commune le milieu O de la droite IJ' qui unit les points homologues de l'infini (*fig.* 573); on aura alors OJ' = — OI, c'est-

Fig. 573.



à-dire (1101) $\lambda = -\mu$, et l'homographie des deux divisions s'exprimera par l'équation

$$Om.Om' - \lambda(Om - Om') + \nu = 0,$$

ou

$$Om.Om' + \lambda.mm' + \nu = 0. \qquad (5)$$

Nous savons d'ailleurs que $\lambda = OJ' = -OI$; et, pour avoir la signification géométrique de ν, il suffit de supposer que m est en O; car alors, m' coïncidant avec l'homologue O' de O, l'équation (5) donne $\lambda.OO' + \nu = 0$, d'où $\nu = -OJ'.OO' = OI.OO'$.

Cela posé, pour qu'un point m soit double, c'est-à-dire pour qu'il coïn-

cide avec son homologue m', il faut et il suffit qu'on ait, en vertu de l'équation (5),

$$\overline{Om}^2 + v = 0 \quad \text{ou} \quad Om = \pm\sqrt{OJ'.OO'}.$$

On conclut de là que *deux divisions homographiques de même base ont toujours deux points doubles réels ou imaginaires*, et que *le milieu des points doubles coïncide avec le milieu du segment IJ' formé par les points limites*.

Les points doubles sont imaginaires lorsque les segments OJ' et OO' ont des signes contraires, c'est-à-dire lorsque O' et J' sont de part et d'autre de O. Ils sont réels lorsque O' et J' sont d'un même côté du point O; dans ce cas, en menant par O une tangente au cercle décrit sur OJ' comme diamètre, puis rabattant cette tangente $OT = \sqrt{OO'.OJ'}$ sur la droite L en Oe et en Of, on a les deux points doubles e et f.

1106. *Pour que deux divisions homographiques de même base soient semblables, il faut et il suffit* (1102) *que l'un des points doubles soit à l'infini.*

On voit immédiatement que : 1° *pour que deux divisions soient égales et de même sens, il faut et il suffit que les deux points doubles soient à l'infini ; 2° pour que deux divisions soient égales et de sens contraires, il faut et il suffit que l'un des points doubles soit à l'infini et que le second point double soit le milieu de tous les segments tels formés par deux points homologues quelconques.*

1107. Cette théorie des points doubles nous amène naturellement à dire un mot de la détermination simultanée de deux points et du rôle des imaginaires en Géométrie.

Soient (*fig.* 200) une origine fixe O sur une droite X'X, et A et B deux points quelconques de cette droite. Au lieu de donner les segments OA et OB qui détermineraient individuellement les points A et B (303), on peut donner la demi-somme p et le produit q de ces deux segments, qui sont alors les racines de l'équation du second degré

$$x^2 - 2px + q = 0.$$

Les nombres p et q sont dits les *éléments du couple* (A, B) ; leur connaissance détermine *simultanément* les deux points A et B.

Les nombres p et q étant supposés réels, les segments OA et OB seront réels ou imaginaires (conjugués), selon que la quantité $p^2 - q$ sera positive ou négative ; dans ce dernier cas, les points A et B cessent d'exister, et l'on dit qu'ils sont *imaginaires*.

Deux points imaginaires A et B, ainsi définis, peuvent avoir des rela-

tions réelles avec des points réels ; ce sont des relations contenant d'une manière symétrique les segments imaginaires conjugués OA et OB, de telle sorte que, tous calculs effectués, il ne reste plus dans les équations que les éléments réels p et q du couple (A, B) et les autres quantités réelles étrangères à ce couple. Considérons, par exemple, deux couples de points (A, B), (C, D) situés sur la droite X'X (*fig.* 200) et définis respectivement par les équations

$$x^2 - 2px + q = 0, \quad x^2 - 2p'x + q' = 0.$$

Supposons que ces points soient réels et forment une division harmonique ; on aura alors la relation

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1 \qquad (1)$$

qui, après qu'on y a remplacé les segments CA, CB, ... par leurs valeurs OA — OC, OB — OC, ..., revient, tous calculs effectués, à la suivante :

$$q + q' = 2pp', \qquad (2)$$

dans laquelle les deux couples de points (A, B), (C, D), ne figurent plus que par leurs éléments (p, q), (p', q').

Cela posé, supposons que, le couple (A, B) restant réel, la quantité $p'^2 - q'$ devienne négative ; les points C et D cesseront d'exister, et la relation (1) n'aura plus de sens explicite ; mais rien n'empêchera de la conserver comme manière symbolique d'écrire la relation (2) qui subsiste toujours, et à laquelle la relation (1) se réduit lorsqu'on effectue les calculs d'après les règles de l'Algèbre. Ainsi, au lieu de dire que, lorsque $p'^2 - q'$ est négatif, il n'existe plus de couple de points divisant harmoniquement le segment AB, mais qu'il existe seulement entre les éléments p, q, p', q', la relation (2), on pourra dire que le couple (C, D) des points qui divisent harmoniquement le segment AB devient imaginaire, et employer la forme symbolique (1), qui fait bien plus image que la relation (2) à laquelle elle revient au fond. Les avantages de cette nouvelle manière de voir sont connus du lecteur qui est déjà versé dans l'Analyse algébrique. En Géométrie comme en Algèbre, l'introduction des imaginaires permet de généraliser les énoncés, évite les subdivisions, et leur emploi transitoire fournit des démonstrations rapides et élégantes.

Remarquons en terminant que, si (comme nous le supposons toujours) les éléments p, q, p', q', sont réels, la relation (2) exige que l'une des deux quantités $p^2 - q$, $p'^2 - q'$, soit positive ; car, si l'on avait à la fois

$$p^2 - q < 0, \quad p'^2 - q' < 0,$$

on aurait

$$p^2 + p'^2 - (q + q') < 0,$$

ou, à cause de (2),

$$p^2 + p'^2 - 2pp' < 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad (p - p')^2 < 0,$$

ce qui est absurde. Ainsi, quand *deux couples de points en ligne droite forment une division harmonique, l'un des couples au moins est réel.*

Rappelons enfin la signification géométrique de l'élément p ; cet élément exprime la distance de l'origine O (*fig.* 200) au milieu I du segment AB, puisqu'on a

$$p = \frac{1}{2}(OA + OB) = OI \quad (303).$$

Lorsque le couple (A, B) est imaginaire, les imaginaires disparaissent dans la somme des deux quantités conjuguées OA et OB, de sorte que *le milieu* I *du segment compris entre deux points imaginaires conjugués* A *et* B *est toujours réel.*

FAISCEAUX HOMOGRAPHIQUES.

1108. On dit que deux faisceaux sont *homographiques* lorsqu'on peut trouver deux droites L et L' qui les coupent suivant deux divisions homographiques. Il est clair qu'*alors toute section rectiligne* L_1 *du premier faisceau sera homographique d'une section rectiligne quelconque* L'_1 *du second faisceau;* car les divisions L et L_1, étant en perspective, sont homographiques (1103); il en est de même de L' et de L'_1, et, comme L et L' sont homographiques par hypothèse et que deux divisions homographiques d'une troisième sont homographiques entre elles (1100), les deux divisions L_1 et L'_1 sont homographiques.

Pour que deux faisceaux soient homographiques, il faut et il suffit que quatre droites quelconques du premier aient le même rapport anharmonique que les quatre droites homologues du second (320 et 1101, 2°).

Deux faisceaux homographiques sont déterminés par trois couples de rayons homologues (1100).

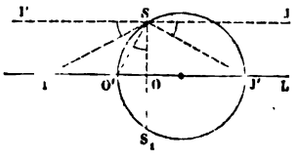
Quand deux faisceaux homographiques ont un rayon homologue commun, les autres rayons homologues se coupent deux à deux sur une ligne droite : c'est le théorème fondamental du n° 322 avec un autre énoncé.

1109. *Deux faisceaux homographiques de même centre ont toujours deux rayons doubles* (*réels ou imaginaires*), c'est-à-dire deux rayons tels, que chacun d'eux, considéré comme appartenant au premier faisceau,

coïncide avec son homologue dans le second faisceau. On obtient ces rayons en joignant le centre commun des deux faisceaux aux points doubles des deux divisions homographiques, déterminées par les deux faisceaux sur une transversale arbitraire.

Lorsqu'un angle tourne autour de son sommet S (*fig.* 574), *ses deux*

Fig. 574.



côtés engendrent deux faisceaux homographiques concentriques, car, les angles du premier faisceau étant respectivement égaux à ceux du second, quatre droites quelconques du premier faisceau ont (321) le même rapport anharmonique que les quatre homologues du second. *Les rayons doubles de ces deux faisceaux sont* évidemment *imaginaires*, et il importe de remarquer que *la position de ces rayons doubles imaginaires est indépendante de la grandeur de l'angle*. En effet, soit L une transversale quelconque et I'SI, O'SO, J'SJ, trois positions de l'angle donné relatives, la première au cas où le second côté est parallèle à L, la seconde au cas où le premier côté est perpendiculaire à L, et la troisième au cas où le premier côté est parallèle à L. Tout revient à trouver les points doubles imaginaires des deux divisions homographiques que les côtés de l'angle tracent sur L. Or I et J' sont les points limites de ces deux divisions, et O, qui est évidemment leur milieu, est le milieu des points doubles; ces points sont donc, de part et d'autre de O, à une distance égale (1103) à

$$\sqrt{\overline{OJ'}.\overline{OO'}} = \sqrt{-\overline{OJ'}.\overline{O'O}}.$$

Mais, puisque O'SO = J'SJ, l'angle O'SJ' est droit, et l'on a

$$\overline{O'O}.\overline{OJ'} = \overline{SO}^2;$$

donc, la distance du point O aux deux points doubles est égale à $SO.\sqrt{-1}$; d'où l'on voit qu'elle dépend de la distance de la transversale L au sommet S de l'angle, mais en aucune manière de la grandeur de cet angle.

Réciproquement, *lorsque deux divisions homographiques de même base ont leurs points doubles imaginaires, on peut considérer ces deux divisions comme tracées par un certain angle de grandeur constante tournant autour de son sommet.* En effet, I et J' étant les homologues de l'infini,

O leur milieu et O′ son homologue, décrivons une circonférence sur O′J comme diamètre, jusqu'à la rencontre S (ou S_1) de la perpendiculaire élevée par O sur la base L. L'angle OSO′, en tournant autour du point S, tracera sur L deux divisions homographiques dont (O, O′), (I, ∞), (∞, J′) seront trois couples de points homologues ; car, si l'on mène l'SJ parallèle à L, les angles OSJ, O′SJ′, I′SO, étant droits, les angles JSJ′, O′SO, I′SI, seront égaux. Donc ces deux divisions, ayant trois couples de points homologues communs avec les deux divisions proposées, ne diffèrent pas de celles-ci.

INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE. — POINTS CYCLIQUES D'UN PLAN.

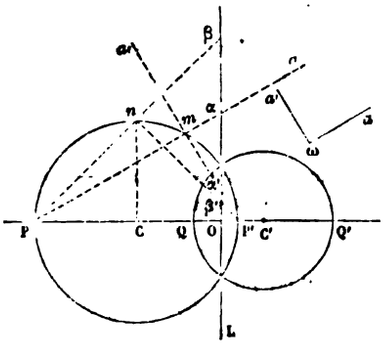
1110. Il résulte du n° 321 que : 1° *lorsqu'un point mobile m décrit un cercle, les droites* P*m*, P′*m*, *qui joignent ce point à deux points fixes,* P *et* P′, *pris à volonté sur la circonférence, forment deux faisceaux homographiques ;* 2° *lorsqu'une droite mobile enveloppe un cercle, elle trace sur deux tangentes fixes de ce cercle deux divisions homographiques.*

Une droite quelconque L *du plan d'un cercle* C *rencontre toujours la circonférence en deux points* (*réels ou imaginaires*) ; car, les deux divisions homographiques tracées sur L par les rayons P*m*, P′*m*, des deux faisceaux, ont toujours deux points doubles (réels ou imaginaires). *Le milieu des deux points d'intersection est toujours réel : c'est la projection* O *du centre* C *du cercle sur la droite* L ; car, si l'on choisit pour les points P et P′ (*fig.* 575) les extrémités du diamètre perpendiculaire à L, les deux points I et J′, homologues de l'infini dans les deux divisions homographiques $\alpha\beta\ldots$, $\alpha'\beta'\ldots$, tracées sur L, coïncident avec O, de sorte que O est le milieu des deux points doubles. *Le carré de la distance des deux points d'intersection au point* O *est égal à la puissance du point* O *par rapport au cercle, changée de signe.* Car, puisque I et J′ sont confondus avec O, le produit $O\alpha.O\alpha'$ est constant (1105), et le carré de la distance du point O aux deux points doubles est égal à cette constante ; or, si β et β' sont les deux points homologues qui répondent au point *n*, milieu du demi-cercle P*m*P′, Oβ et Oβ' sont en valeur absolue égaux à OP et à OP′, et la constante est égale à — OP′.OP.

1111. Considérons un cercle C (*fig.* 575) et la droite à l'infini située dans son plan. P et P′ étant deux points fixes pris à volonté sur la circonférence C, les rayons P*m* et P′*m* tracent sur la droite de l'infini, quand le point *m* décrit le cercle, deux divisions homographiques dont les points doubles imaginaires appartiennent à la fois à la droite et au cercle. Or,

si ω est un point pris à volonté dans le plan du cercle, les parallèles à Pm et P'm, menées par ce point, vont couper la droite de l'infini aux mêmes points a et a' que les rayons Pm et P'm; d'ailleurs, l'angle $a\omega a'$ de ces

Fig. 575.



parallèles est constant, puisque, en vertu de la propriété de l'angle inscrit, l'inclinaison mutuelle des droites Pm et P'm ne varie pas; donc, les points d'intersection du cercle et de la droite de l'infini sont les points doubles imaginaires des deux divisions homographiques tracées sur cette droite par un angle de grandeur constante tournant autour du point ω.

En faisant varier la position et la grandeur du cercle ainsi que la position des points P et P' sur le cercle, on ne fait que changer la grandeur de l'angle qui tourne autour du point fixe ω, et, comme la situation des points doubles imaginaires est indépendante (1109) de la grandeur de l'angle, on arrive à cette conclusion : *Tous les cercles situés dans un plan ont les deux mêmes points imaginaires communs avec la droite à l'infini de ce plan.* Nous donnerons à ces deux points, dont la considération est souvent utile, le nom de *points cycliques* du plan.

Deux cercles quelconques, C et C', admettent donc la droite de l'infini pour corde commune. L'*axe radical* L des deux cercles est une seconde corde commune; en effet, les points réels ou imaginaires où cet axe rencontre l'un quelconque des deux cercles sont de part et d'autre du point O, à une distance égale à la racine carrée de la puissance, prise en signe contraire, du point O par rapport au cercle considéré (1110); et comme, si L est l'axe radical, le point O a la même puissance par rapport aux deux cercles, on voit que l'axe radical coupe ces cercles aux deux mêmes points.

Ainsi, *deux cercles quelconques ont toujours quatre points d'intersection situés deux à deux sur deux cordes communes réelles, qui sont l'axe*

radical et la droite de l'infini. Les deux points d'intersection situés sur l'axe radical peuvent être tous deux réels ou tous deux imaginaires. Quand les cercles sont concentriques, l'axe radical passe à l'infini, les deux cordes communes se confondent, *et les deux cercles ont un double contact imaginaire à l'infini.* Ces dernières idées ont été émises d'abord par Poncelet (*Propriétés projectives,* 1re Section, Chapitre II); mais, depuis cette époque, l'introduction des imaginaires en Géométrie a donné lieu à de remarquables travaux (SMITH, *Annales de Tortolini,* 1869; LAGUERRE, *Nouvelles Annales,* 1870, etc.).

DIVISIONS ET FAISCEAUX HOMOGRAPHIQUES EN INVOLUTION.

1112. On dit que deux divisions homographiques de même base L forment une *involution,* lorsqu'on peut trouver sur la droite L un point a qui, considéré successivement comme appartenant à l'une ou à l'autre division, a toujours pour homologue le même point a'.

L'homographie de deux divisions de même base s'exprime (1105) par la relation générale

$$(1) \qquad Om.Om' + OJ'.mm' + \nu = 0,$$

O étant le milieu des points I et J' dont les homologues sont à l'infini.

Pour que l'égalité

$$Oa.Oa' + OJ'.aa' + \nu = 0$$

ne change pas quand on permute a et a', il faut et il suffit que $OJ' = 0$. Donc, *pour que deux divisions homographiques forment une involution, il faut et il suffit que les points* I *et* J', *homologues de l'infini, coïncident.*

La relation (1) se réduit alors à

$$(2) \qquad Om.Om' = \text{const.},$$

et la symétrie de cette équation, par rapport à Om et à Om', montre que tous les couples de points homologues jouissent de la même propriété que le couple (m, m'). Ainsi, *dans deux divisions homographiques en involution, tout point considéré successivement comme appartenant à la première et à la seconde division a toujours le même homologue.*

Le point O, où sont réunis les points I et J' et dont le conjugué est à l'infini, reçoit le nom de *point central de l'involution.*

1113. L'équation (2), très-commode à cause de sa simplicité, est trop particulière. Lorsqu'on veut prendre pour origine commune des deux divisions, non plus le point central O, mais un point quelconque a de la

base, il suffit d'exprimer dans la relation (1101)

$$am.am' - \lambda.am - \mu.am' + \nu = 0$$

que les points I et J' coïncident, c'est-à-dire, puisque (1101) $\lambda = aJ'$ et $\mu = aI$, que $\lambda = \mu$. L'équation d'involution est alors

$$am.am' - \lambda(am + am') + \nu = 0. \tag{3}$$

On voit qu'elle ne renferme que deux coefficients arbitraires λ et ν, de sorte qu'*il suffit de deux couples de points homologues pour déterminer une involution.*

Soient (a, a'), (b, b'), (c, c'), trois couples de points homologues de deux divisions en involution : *quatre quelconques de ces six points ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points homologues ;* ainsi l'on a, par exemple, $(abcb') = (a'b'c'b)$, car les deux systèmes $abcb'$, $a'b'c'b$, sont homographiques. Réciproquement, *pour que trois couples de points* (a, a'), (b, b'), (c, c'), *en ligne droite, soient en involution,* c'est-à dire pour que les points c et c' soient deux points homologues des deux divisions homographiques en involution déterminées par les deux couples (a, a') et (b, b'), *il suffit que quatre de ces points aient leur rapport anharmonique égal à celui de leurs homologues ;* car, si l'on a, par exemple, $(abcb') = (a'b'c'b')$, les deux divisions $abcb'$, $a'b'c'b$, sont homographiques, et au point b, considéré tour à tour comme appartenant à la première et à la seconde division, répond toujours le même point b'.

Il résulte de là que *l'involution est une propriété projective.*

1114. On sait que deux divisions homographiques de même base ont deux points doubles réels ou imaginaires, dont le milieu coïncide avec le milieu des points I et J' homologues de l'infini. Donc, *toute involution a deux points doubles e et f, réels ou imaginaires, dont le milieu est le point central* O ; cela résulte d'ailleurs de la relation (2) qui donne, pour les segments Oe et Of relatifs aux *points doubles*,

$$Oc = +\sqrt{Oa.Oa'}, \quad Of = -\sqrt{Oa.Oa'},$$

(a, a') étant un couple quelconque de points homologues.

Ces expressions montrent encore que *le segment ef, formé par les deux points doubles réels ou imaginaires, est divisé harmoniquement par chaque couple de points homologues* (a, a'), (b, b'), ... (1). Le point central, ayant même puissance par rapport à tous les couples (a, a'), (b, b'), ... de

(1) Il résulte de là que, lorsque l'un des points doubles e est à l'infini, l'autre point double f est le milieu de tous les segments aa', bb', cc', ...

radical et la droite de l'infini. Les deux points d'intersection situés sur l'axe radical peuvent être tous deux réels ou tous deux imaginaires. Quand les cercles sont concentriques, l'axe radical passe à l'infini, les deux cordes communes se confondent, *et les deux cercles ont un double contact imaginaire à l'infini.* Ces dernières idées ont été émises d'abord par Poncelet (*Propriétés projectives,* 1re Section, Chapitre II); mais, depuis cette époque, l'introduction des imaginaires en Géométrie a donné lieu à de remarquables travaux (SMITH, *Annales de Tortolini,* 1869; LAGUERRE, *Nouvelles Annales,* 1870, etc.).

DIVISIONS ET FAISCEAUX HOMOGRAPHIQUES EN INVOLUTION.

1112. On dit que deux divisions homographiques de même base L forment une *involution,* lorsqu'on peut trouver sur la droite L un point a qui, considéré successivement comme appartenant à l'une ou à l'autre division, a toujours pour homologue le même point a'.

L'homographie de deux divisions de même base s'exprime (1103) par la relation générale

$$(1) \qquad Om.Om' + OJ'.mm' + \nu = 0,$$

O étant le milieu des points I et J' dont les homologues sont à l'infini.

Pour que l'égalité

$$Oa.Oa' + OJ'.aa' + \nu = 0$$

ne change pas quand on permute a et a', il faut et il suffit que $OJ' = 0$. Donc, *pour que deux divisions homographiques forment une involution, il faut et il suffit que les points* I *et* J', *homologues de l'infini, coïncident.*

La relation (1) se réduit alors à

$$(2) \qquad Om.Om' = \text{const.},$$

et la symétrie de cette équation, par rapport à Om et à Om', montre que tous les couples de points homologues jouissent de la même propriété que le couple (m, m'). Ainsi, *dans deux divisions homographiques en involution, tout point considéré successivement comme appartenant à la première et à la seconde division a toujours le même homologue.*

Le point O, où sont réunis les points I et J' et dont le conjugué est à l'infini, reçoit le nom de *point central de l'involution.*

1113. L'équation (2), très-commode à cause de sa simplicité, est trop particulière. Lorsqu'on veut prendre pour origine commune des deux divisions, non plus le point central O, mais un point quelconque a de la

base, il suffit d'exprimer dans la relation (1101)

$$am.am' - \lambda.am - \mu.am' + \nu = 0$$

que les points I et J' coïncident, c'est-à-dire, puisque (1101) $\lambda = aJ'$ et $\mu = aI$, que $\lambda = \mu$. L'équation d'involution est alors

$$(3) \qquad am.am' - \lambda(am + am') + \nu = 0.$$

On voit qu'elle ne renferme que deux coefficients arbitraires λ et ν, de sorte qu'*il suffit de deux couples de points homologues pour déterminer une involution.*

Soient (a, a'), (b, b'), (c, c'), trois couples de points homologues de deux divisions en involution : *quatre quelconques de ces six points ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points homologues ;* ainsi l'on a, par exemple, $(abcb') = (a'b'c'b)$, car les deux systèmes $abcb'$, $a'b'c'b$, sont homographiques. Réciproquement, *pour que trois couples de points* (a, a'), (b, b'), (c, c'), *en ligne droite, soient en involution,* c'est-à dire pour que les points c et c' soient deux points homologues des deux divisions homographiques en involution déterminées par les deux couples (a, a') et (b, b'), *il suffit que quatre de ces points aient leur rapport anharmonique égal à celui de leurs homologues ;* car, si l'on a, par exemple, $(abcb') = (a'b'c'b')$, les deux divisions $abcb'$, $a'b'c'b$, sont homographiques, et au point b, considéré tour à tour comme appartenant à la première et à la seconde division, répond toujours le même point b'.

Il résulte de là que *l'involution est une propriété projective.*

1114. On sait que deux divisions homographiques de même base ont deux points doubles réels ou imaginaires, dont le milieu coïncide avec le milieu des points I et J' homologues de l'infini. Donc, *toute involution a deux points doubles e et f, réels ou imaginaires, dont le milieu est le point central* O ; cela résulte d'ailleurs de la relation (2) qui donne, pour les segments Oe et Of relatifs aux *points doubles*,

$$Oe = +\sqrt{Oa.Oa'}, \quad Of = -\sqrt{Oa.Oa'},$$

(a, a') étant un couple quelconque de points homologues.

Ces expressions montrent encore que *le segment ef, formé par les deux points doubles réels ou imaginaires, est divisé harmoniquement par chaque couple de points homologues* (a, a'), (b, b'), ... (1). Le point central, ayant même puissance par rapport à tous les couples (a, a'), (b, b'), ... de

(1) Il résulte de là que, lorsque l'un des points doubles e est à l'infini, l'autre point double f est le milieu de tous les segments aa', bb', cc', ...

points homologues, appartient à l'axe radical de deux cercles quelconques ayant respectivement pour cordes deux segments quelconques aa', bb',.... Donc : 1° *si sur les divers segments* aa', bb', cc',... *formés par chaque couple de points homologues, on décrit des circonférences passant toutes par un même point quelconque extérieur à la base, ces circonférences ont un second point commun et leur corde commune coupe la base au point central;* 2° *les circonférences décrites sur les divers segments* aa', bb', cc',... *comme diamètres, ont pour axe radical commun la perpendiculaire à la base élevée par le point central.*

Nous avons déjà trouvé la plupart de ces résultats au n° **381** où nous avons ébauché en quelque sorte la théorie de l'involution en prenant pour point de départ la relation (2) ci-dessus. Nous renverrons à ce numéro, pour ce qui concerne l'influence de la réalité ou de l'imaginarité des points doubles sur la disposition des points d'une division involutive.

1115. *Les points doubles* e *et* f *de deux divisions homographiques quelconques,* $abc,\ldots$, $a'b'c',\ldots$, *de même base, forment une involution avec chaque système de deux couples tels que* ab' *et* $a'b$; car on a

$$(abef) = (a'b'ef) = (b'a'fe) \quad (318),$$

de sorte que les deux figures $abef$, $b'a'fe$, sont homographiques, et que le point e, considéré tour à tour comme appartenant à l'une et à l'autre, a toujours le même homologue f.

On conclut de là (**1114**) que : 1° *les trois circonférences, menées par un même point* g *quelconque extérieur à la base et par les trois segments* ab', ba', ef, *passent toutes trois par un second point commun;* 2° *les circonférences décrites sur* ab', ba', ef, *comme diamètres, ont même axe radical.*

RELATIONS MÉTRIQUES ENTRE TROIS SEGMENTS EN INVOLUTION.

1116. Soient (a, a'), (b, b'), (c, c'), trois couples de points (réels ou imaginaires) situés en ligne droite, et

$$x^2 - 2p_1x + q_1 = 0, \quad x^2 - 2p_2x + q_2 = 0, \quad x^2 - 2p_3x + q_3 = 0,$$

les équations qui les représentent, en adoptant pour origine commune un point A arbitraire de la base. Pour que les trois couples

forment une involution, il faut et il suffit (1113) que chacun d'eux satisfasse à la relation

$$\mathrm{A}m.\mathrm{A}m' - \lambda(\mathrm{A}m + \mathrm{A}m') + \nu = 0;$$

de là, les trois équations

$$q_1 - 2p_1\lambda + \nu = 0, \quad q_2 - 2p_2\lambda + \nu = 0, \quad q_3 - 2p_3\lambda + \nu = 0,$$

qui doivent être satisfaites par les mêmes valeurs de λ et de ν. La condition d'involution résulte donc de l'élimination de λ et de ν entre ces trois équations ; on trouve

$$(1) \qquad q_1(p_2 - p_3) + q_2(p_3 - p_1) + q_3(p_1 - p_2) = 0.$$

Cette équation (1) résulterait pareillement de l'élimination du paramètre arbitraire k entre les deux relations

$$p_3 = \frac{p_1 + kp_2}{1 + k}, \quad q_3 = \frac{q_1 + kq_2}{1 + k},$$

qui peuvent dès lors remplacer la condition (1).

En vertu de ces valeurs, l'équation $x^2 - 2p_3x + q_3 = 0$ peut s'écrire

$$x^2 - 2p_1x + q_1 + k(x^2 - 2p_2x + q_2) = 0;$$

telle est l'équation qui détermine le troisième couple (c, c') en fonction des éléments des deux premiers (a, a') et (b, b').

1117. Dans les applications, il est souvent plus commode de substituer aux éléments $p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3$, les segments $\mathrm{A}a$, $\mathrm{A}a'$, $\mathrm{A}b$, $\mathrm{A}b'$, $\mathrm{A}c$, $\mathrm{A}c'$; or, si α, β, γ, désignent respectivement les milieux des segments aa', bb', cc', on a

$$p_1 = \mathrm{A}\alpha, \quad p_2 = \mathrm{A}\beta, \quad p_3 = \mathrm{A}\gamma,$$

et, par suite, la condition d'involution (1) s'écrit

$$(2) \qquad \mathrm{A}a.\mathrm{A}a'.\beta\gamma + \mathrm{A}b.\mathrm{A}b'.\gamma\alpha + \mathrm{A}c.\mathrm{A}c'.\alpha\beta = 0.$$

Cette équation fondamentale en donne beaucoup d'autres. Par exemple, si l'on fait coïncider successivement l'origine arbitraire A avec chacun des points a, a', b, b', c, c', on obtient le groupe

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{ab.ab'}{ac.ac'} = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}, & \dfrac{a'b.a'b'}{a'c.a'c'} = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}, \\ \dfrac{bc.bc'}{ba.ba'} = \dfrac{\beta\gamma}{\beta\alpha}, & \dfrac{b'c.b'c'}{b'a.b'a'} = \dfrac{\beta\gamma}{\beta\alpha}, \\ \dfrac{ca.ca'}{cb.cb'} = \dfrac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}, & \dfrac{c'a.c'a'}{c'b.c'b'} = \dfrac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}. \end{cases}$$

En remarquant que les équations écrites sur la même horizontale ont le même second membre, on a encore

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{ab.ab'}{ac.ac'} = \dfrac{a'b.a'b'}{a'c.a'c'}, \\ \dfrac{bc.bc'}{ba.ba'} = \dfrac{b'c.b'c'}{b'a.b'a'}, \\ \dfrac{ca.ca'}{cb.cb'} = \dfrac{c'a.c'a'}{c'b.c'b'}. \end{cases}$$

Enfin, en multipliant entre elles de toutes les manières possibles trois des six équations (3), prises de telle façon que le produit des seconds membres soit égal à 1, on obtient

$$(5)\qquad \begin{cases} ab'.bc'.ca' = -a'b.b'c.c'a, \\ ab'.bc.c'a' = -a'b.b'c'.ca, \\ ab.b'c'.ca' = -a'b'.bc.c'a, \\ ab.b'c.c'a' = -a'b'.bc'.ca. \end{cases}$$

FAISCEAUX EN INVOLUTION.

1118. On dit que deux faisceaux homographiques de même centre sont *en involution* ou forment *un faisceau involutif*, lorsqu'on peut trouver une droite qui les coupe suivant deux divisions en involution. Alors toute autre section rectiligne des deux faisceaux donnera deux divisions en involution (1113).

Dans un faisceau involutif, tout rayon considéré tour à tour comme appartenant à l'un et à l'autre faisceau a toujours le même homologue. Inversement, *deux faisceaux homographiques de même centre sont en involution s'il existe un rayon qui, considéré successivement comme appartenant au premier et au second faisceau, ait toujours le même homologue* (1112).

Un faisceau involutif est déterminé par deux couples de rayons homologues.

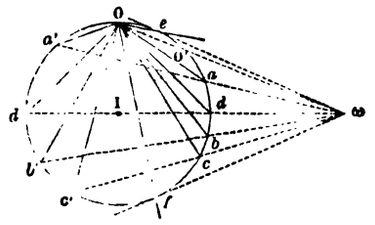
Six rayons issus d'un même point et conjugués deux à deux sont en involution si quatre d'entre eux, convenablement choisis, ont même rapport anharmonique que leurs conjugués; et alors, quatre quelconques de ces rayons auront même rapport anharmonique que leurs conjugués (1113).

Dans tout faisceau involutif, il y a toujours deux rayons doubles réels ou imaginaires; les rayons doubles forment un faisceau harmonique avec deux rayons homologues quelconques (1111).

Un angle droit tournant autour de son sommet engendre un faisceau involutif dont les rayons doubles sont imaginaires (381, 2°).

1119. *Quand plusieurs cordes* aa', bb', cc', ..., *d'un cercle passent par un même point* ω, *les couples de droites menées d'un point quelconque* O *de la circonférence aux extrémités de chaque corde sont en involution* (*fig.* 576).

Fig. 576.



Il suffit de démontrer l'égalité des rapports anharmoniques $(O.abca')$, $(O.a'b'c'a)$. Or, si l'on désigne par O' le second point d'intersection du cercle et de la droite $O\omega$, on voit que le rapport anharmonique $(O'.a'b'c'a)$ est égal à chacun des deux qui précèdent. Il équivaut au premier, puisque les droites Oa, Ob, Oc, Oa', coupent respectivement les droites $O'a'$, $O'b'$, $O'c'$, $O'a$, sur la polaire du point ω (341) ; et il équivaut au second, d'après l'observation faite au n° 321, 1°.

Réciproquement, *si par le centre commun* O *d'un faisceau involutif on fait passer un cercle quelconque, les cordes interceptées dans ce cercle par les couples de rayons homologues concourent en un même point* ω. Car, si ω est l'intersection des deux cordes aa' et bb', et si l'on désigne pour un instant par c'' le second point où la droite ωc rencontre le cercle, les droites Oa, Oa', Ob, Ob', Oc, Oc'', seront en involution d'après le théorème direct ; or, Oa, Oa', Ob, Ob', Oc, Oc', sont en involution par hypothèse ; donc, Oc' et Oc'' coïncident, et, par suite, les points c'' et c' ; la corde $c'c$ passe donc par ω.

De là résulte immédiatement cette proposition très-importante :

Dans tout faisceau involutif, il existe toujours un couple de rayons homologues rectangulaires. Ce sont les deux rayons Od, Od', qui aboutissent aux extrémités du diamètre qui passe par ω. Toutefois, si le point ω était au centre du cercle, tous les couples de rayons homologues seraient rectangulaires. Ainsi *le couple de rayons homologues rectangulaires est unique, à moins que tous les couples ne soient rectangulaires ;* dans ce cas particulier, les rayons doubles sont imaginaires : cela résulte du n° 381, 2° ; on peut aussi le voir directement, car les rayons doubles correspondent

en général aux points de contact des tangentes menées au cercle par le point ω ; or ces tangentes sont imaginaires quand le point ω est au centre du cercle.

PROPRIÉTÉS INVOLUTIVES DU QUADRILATÈRE.

1120. *Toute transversale* L *menée dans le plan d'un quadrilatère* ABCD *rencontre les quatre côtés et les deux diagonales en six points, a et a', b et b', c et c', qui sont en involution* (*fig.* 577) ; car les faisceaux homographiques (AB, AC, AD, Ac'), (CB, CA, CD, Cc'), déterminent sur L deux divisions homographiques, et l'on a

$$(acb'c') = (bca'c') \quad \text{ou (321)} \quad (acb'c') = (a'c'bc),$$

d'où l'on conclut (1113) que les segments aa', bb', cc', sont en involution.

Les six droites menées d'un point quelconque O *du plan d'un quadrilatère* ABCD *aux sommets et aux points de concours* E *et* F *des côtés opposés, sont en involution ;* car le quadrilatère OAFB, dont OF et AB sont les diagonales, détermine, d'après le théorème précédent, six points en involution sur la transversale DC ; donc, les droites OA et OC, OB et OD, OE et OF, qui passent par ces six points, sont en involution.

En plaçant le point O à l'intersection des deux circonférences décrites sur AC et BD comme diamètres, les couples de rayons homologues OA et OC, OB et OD, seront rectangulaires ; donc, le troisième couple OE et OF le sera aussi (1119), et, par suite, la circonférence décrite sur EF comme diamètre passera par les deux points communs aux deux premières ; donc, *les trois circonférences décrites sur les trois diamètres* AC, BD, EF, *d'un quadrilatère complet comme diamètres, se coupent aux deux mêmes points ;* d'où l'on peut conclure immédiatement le théorème du n° 317.

1121. *Quand un quadrilatère* ABCD *est inscrit dans un cercle, une transversale quelconque* L *située dans son plan rencontre les deux couples de côtés opposés et le cercle en trois couples de points* (a, a'), (b, b'), (e, f), *qui sont en involution* (*fig.* 577).

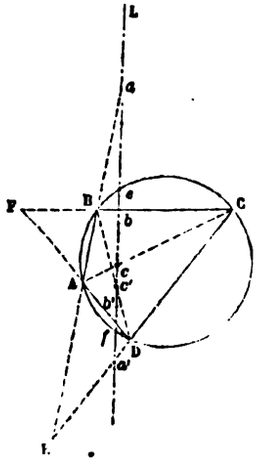
En effet, les droites qui joignent aux points fixes A et C un point mobile qui décrit la circonférence, forment deux faisceaux homogra-

1122. *Quand un quadrilatère abcd est circonscrit à un cercle, si d'un point* O *situé dans son plan on mène des droites* Oa, Ob, Oc, Od, *à ses sommets et deux tangentes* OE, OF, *à la courbe, les trois couples de droites* Oa *et* Oc, Ob *et* Od, OE *et* OF, *sont en involution* (*fig.* 578).

En effet, une tangente, en roulant sur le cercle, trace sur les tangentes fixes ab et cd deux divisions homographiques (1110). Les droites

phiques (1110); par suite, ces faisceaux tracent sur L deux divisions homographiques dont e et f sont les points doubles. D'ailleurs, comme AB et BC, AD et CD, sont deux couples de rayons homologues des deux faisceaux, a et b, b' et a', seront deux couples de points homologues des deux divisions. Donc (1115) les trois couples (a, a'), (b, b'), (e, f), sont en involution.

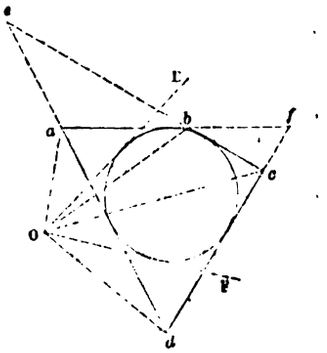
Fig. 577



Au lieu de prendre les deux couples de côtés opposés, on pourrait prendre un couple de côtés opposés et les deux diagonales; le théorème subsisterait, car ces quatre droites forment aussi un quadrilatère inscrit au même cercle.

Il résulte du théorème précédent que, *si un quadrilatère inscrit à un cercle se déforme de telle sorte que trois de ses côtés tournent autour de* menées du point O à ces divers points forment donc deux faisceaux homographiques dont OE et OF sont les rayons doubles. D'ailleurs, comme a et d, b et c, sont deux couples de points homologues des deux divisions, Oa et Od, Ob et Oc, sont deux couples de rayons homologues des deux faisceaux. Donc (1118) les trois couples Oa et Oc, Ob et Od, OE et OF, sont en involution.

Fig. 578.



Au lieu de prendre les deux couples de sommets opposés, on pourrait prendre un couple de sommets opposés et les deux points de concours e et f des côtés opposés; le théorème subsisterait, car ces quatre points sont aussi les sommets d'un quadrilatère circonscrit au même cercle.

Il résulte du théorème précédent que, *si un quadrilatère circonscrit à un cercle se déforme de telle sorte que trois de ses sommets glissent sur*

en général aux points de contact des tangentes menées au cercle par le point ω ; or ces tangentes sont imaginaires quand le point ω est au centre du cercle.

PROPRIÉTÉS INVOLUTIVES DU QUADRILATÈRE.

1120. *Toute transversale* L *menée dans le plan d'un quadrilatère* ABCD *rencontre les quatre côtés et les deux diagonales en six points, a et a', b et b', c et c', qui sont en involution* (*fig.* 577) ; car les faisceaux homographiques (AB, AC, AD, A*c'*), (CB, CA, CD, C*c'*), déterminent sur L deux divisions homographiques, et l'on a

$$(acb'c') = (bca'c') \quad \text{ou (32°)} \quad (acb'c') = (a'c'bc),$$

d'où l'on conclut (1113) que les segments *aa'*, *bb'*, *cc'*, sont en involution.

Les six droites menées d'un point quelconque O *du plan d'un quadrilatère* ABCD *aux sommets et aux points de concours* E *et* F *des côtés opposés, sont en involution ;* car le quadrilatère OAFB, dont OF et AB sont les diagonales, détermine, d'après le théorème précédent, six points en involution sur la transversale DC ; donc, les droites OA et OC, OB et OD, OE et OF, qui passent par ces six points, sont en involution.

En plaçant le point O à l'intersection des deux circonférences décrites sur AC et BD comme diamètres, les couples de rayons homologues OA et OC, OB et OD, seront rectangulaires ; donc, le troisième couple OE et OF le sera aussi (1119), et, par suite, la circonférence décrite sur EF comme diamètre passera par les deux points communs aux deux premières ; donc, *les trois circonférences décrites sur les trois diamètres* AC, BD, EF, *d'un quadrilatère complet comme diamètres, se coupent aux deux mêmes points ;* d'où l'on peut conclure immédiatement le théorème du n° 317.

1121. *Quand un quadrilatère* ABCD *est inscrit dans un cercle, une transversale quelconque* L *située dans son plan rencontre les deux couples de côtés opposés et le cercle en trois couples de points* (*a*, *a'*), (*b*, *b'*), (*e*, *f*), *qui sont en involution* (*fig.* 577).

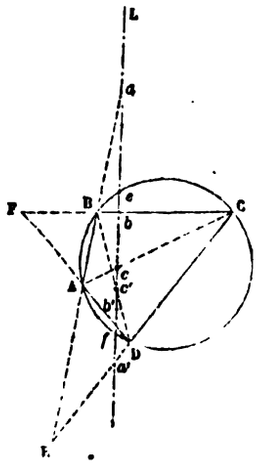
En effet, les droites qui joignent aux points fixes A et C un point mobile qui décrit la circonférence, forment deux faisceaux homogra-

1122. *Quand un quadrilatère abcd est circonscrit à un cercle, si d'un point* O *situé dans son plan on mène des droites* O*a*, O*b*, O*c*, O*d*, *à ses sommets et deux tangentes* OE, OF, *à la courbe, les trois couples de droites* O*a et* O*c*, O*b et* O*d*, OE *et* OF, *sont en involution* (*fig.* 578).

En effet, une tangente, en roulant sur le cercle, trace sur les tangentes fixes *ab* et *cd* deux divisions homographiques (1110). Les droites

phiques (1110); par suite, ces faisceaux tracent sur L deux divisions homographiques dont e et f sont les points doubles. D'ailleurs, comme AB et BC, AD et CD, sont deux couples de rayons homologues des deux faisceaux, a et b, b' et a', seront deux couples de points homologues des deux divisions. Donc (1115) les trois couples (a, a'), (b, b'), (e, f), sont en involution.

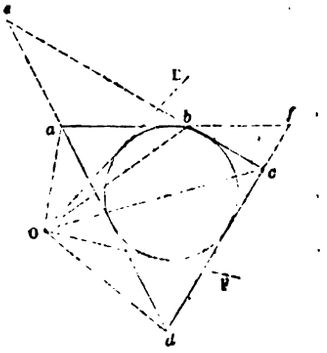
Fig. 577



Au lieu de prendre les deux couples de côtés opposés, on pourrait prendre un couple de côtés opposés et les deux diagonales; le théorème subsisterait, car ces quatre droites forment aussi un quadrilatère inscrit au même cercle.

Il résulte du théorème précédent que, *si un quadrilatère inscrit à un cercle se déforme de telle sorte que trois de ses côtés tournent autour de* menées du point O à ces divers points forment donc deux faisceaux homographiques dont OE et OF sont les rayons doubles. D'ailleurs, comme a et d, b et c, sont deux couples de points homologues des deux divisions, Oa et Od, Ob et Oc, sont deux couples de rayons homologues des deux faisceaux. Donc (1118) les trois couples Oa et Oc, Ob et Od, OE et OF, sont en involution.

Fig. 578.



Au lieu de prendre les deux couples de sommets opposés, on pourrait prendre un couple de sommets opposés et les deux points de concours e et f des côtés opposés; le théorème subsisterait, car ces quatre points sont aussi les sommets d'un quadrilatère circonscrit au même cercle.

Il résulte du théorème précédent que, *si un quadrilatère circonscrit à un cercle se déforme de telle sorte que trois de ses sommets glissent sur*

trois points en ligne droite, le quatrième côté tourne aussi autour d'un point fixe de cette droite.

On déduirait aisément de là une solution de ce problème : *Inscrire dans un cercle un triangle dont les trois côtés passent par trois points en ligne droite.*

trois droites passant par un même point, le quatrième sommet décrit aussi une droite passant par ce point.

On déduirait aisément de là une solution de ce problème : *Circonscrire à un cercle un triangle dont les sommets reposent sur trois droites données et passant par un même point.*

Le théorème du n° 1121 est dû au célèbre géomètre français Desargues (première moitié du XVIIe siècle); toutefois, les anciens (*Collections mathématiques de Pappus*) en ont connu des cas particuliers.

1123. Voici les deux cas particuliers les plus intéressants :

En supposant un ou deux côtés infiniment petits et remplacés par des tangentes, on a ces énoncés :

Quand un triangle est inscrit dans un cercle, les points où une transversale rencontre la courbe, deux côtés du triangle, le troisième côté et la tangente au sommet opposé, sont en involution.

Quand un angle est circonscrit à un cercle, les points où une transversale rencontre la courbe, les deux côtés de l'angle et la corde de contact, forment une involution dont le dernier point est un point double.

En supposant que le quadrilatère circonscrit se réduise à un triangle ou à un angle, on a ces énoncés :

Quand un triangle est circonscrit à un cercle, si d'un point quelconque de son plan on mène les deux tangentes au cercle, les deux droites qui aboutissent à deux sommets, et les deux droites qui aboutissent, l'une au troisième sommet, l'autre au point de contact du côté opposé, on obtient un faisceau involutif.

Quand un angle est circonscrit à un cercle, si d'un point quelconque de son plan on mène les deux tangentes au cercle, les deux droites qui aboutissent aux points de contact des côtés de l'angle et la droite qui passe par le sommet de l'angle, on obtient un faisceau involutif dont la dernière droite est un rayon double.

CONSTRUCTIONS RELATIVES A L'HOMOGRAPHIE ET A L'INVOLUTION.

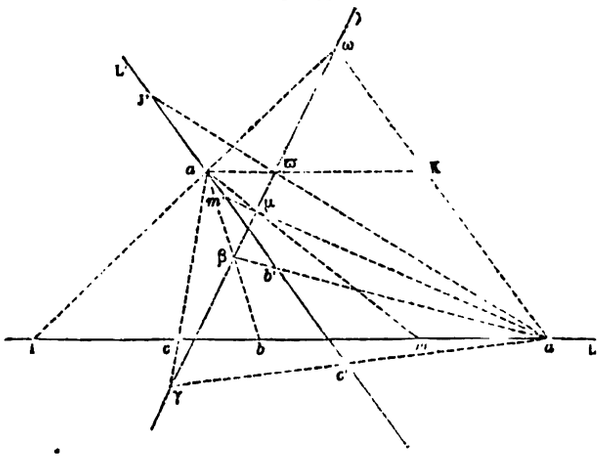
1124. *Construire deux divisions homographiques, connaissant trois couples de points homologues.*

Nous avons déjà donné une première solution de ce problème (1103). En voici deux autres.

Supposons les deux divisions tracées sur deux droites différentes L et L′ et soient (a,a'), (b,b'), (c,c') trois couples de points homologues.

1° Prenons l'intersection β de ab' et de $a'b$, l'intersection γ de ac' et de $a'c$, et tirons la droite $\beta\gamma$ que nous désignerons par λ; m étant un point quelconque de la division L, menons $a'm$ et joignons au point a le point μ, où $a'm$ coupe λ; la droite $a\mu$ rencontrera L′ au point m' homologue de m. En effet, en désignant par α le point où λ coupe aa', on voit que les divisions $abcm$, $a'b'c'm'$ sont homographiques comme étant homologiques de la division $\alpha\beta\gamma\mu$ (*fig.* 579).

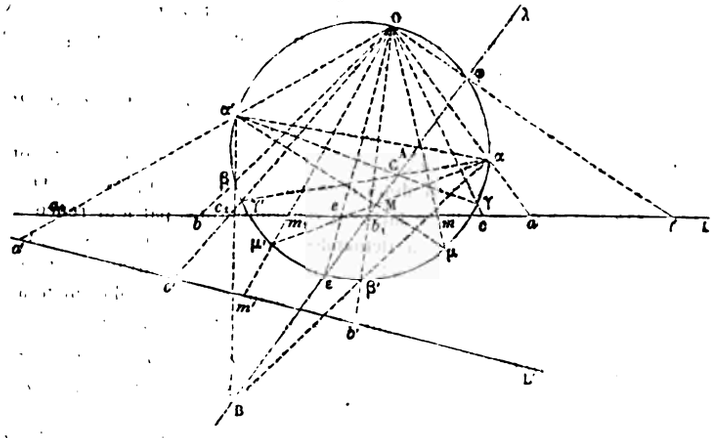
Fig. 579.



2° Décrivons un cercle quelconque dans le plan des droites L et L′ (*fig.* 580) et joignons à un point quelconque O de la circonférence les points $a,b,c,\ a',b',c',\ m$; les droites ainsi obtenues couperont la circonférence en des points que nous désignerons respectivement par $\alpha,\beta,\gamma,$ $\alpha',\beta',\gamma',\mu$. B étant le point commun à $\alpha\beta'$ et $\alpha'\beta$, C le point commun à $\alpha\gamma'$ et $\alpha'\gamma$, tirons la droite BC que nous désignerons par λ. En joignant le point α au point de rencontre M de λ et de $\alpha'\mu$, on obtient une droite αM qui coupe le cercle en μ', et il suffit de mener Oμ' jusqu'à sa rencontre avec L′ pour avoir l'homologue m' de m. En effet, si m' désigne l'homologue de m, les faisceaux (O, $abcm$), et (O, $a'b'c'm'$) ou (O, $\alpha\beta\gamma\mu$), (O, $\alpha'\beta'\gamma'\mu'$), sont homographiques; donc (1108) il en est de même des faisceaux $(\alpha,\alpha'\beta'\gamma'\mu')$ et $(\alpha',\alpha\beta\gamma\mu)$; mais, comme ces derniers faisceaux ont un rayon

homologue commun $\alpha\alpha'$, les intersections B, C, M, des autres couples de rayons homologues sont en ligne droite; donc, les rayons $\alpha\mu'$ et $\alpha'\mu$

Fig. 580.



se croisent sur la droite BC ou λ; en d'autres termes, la droite qui joint α au point M, où $\alpha'\mu$ rencontre λ, passe par le point μ', où Om' coupe le cercle.

Cette dernière construction s'applique au *cas où les deux divisions* (a, a_1), (b, b_1) (c, c_1) *sont sur la même droite* L, et elle donne aisément les *points doubles* e et f; il suffit, en effet de joindre le point O aux points ε et φ où λ coupe le cercle et de prolonger les droites Oε et Oφ jusqu'à leurs rencontres avec L; si la droite λ est extérieure au cercle, les points doubles sont imaginaires.

1125. *Construire un faisceau involutif, connaissant deux couples* (Oa et Oa'), (Ob et Ob'), *de rayons homologues.*

On tracera (*fig.* 576) un cercle quelconque passant par le point O, et l'on déterminera le point ω de concours des cordes aa', bb', interceptées par les deux angles aOa', bOb'. Cela posé, on obtiendra :

1° Le rayon Oc', homologue d'un rayon donné quelconque Oc, en joignant le point ω au point c où Oc rencontre le cercle, puis le point O au second point c' d'intersection du cercle et de la droite ωc (1119);

2° Les rayons doubles, en joignant le point O aux points de contact des tangentes menées par ω;

3° Le système des deux rayons rectangulaires, en joignant le point O aux extrémités du diamètre qui passe par ω.

1126. *Deux faisceaux involutifs de même sommet étant donnés chacun*

par deux couples (Oa, Oa'), (Ob, Ob') *et* (Oa_1, Oa'_1), (Ob_1, Ob'_1) *de rayons homologues, construire les rayons conjugués communs aux deux faisceaux.*

On déterminera, comme ci-dessus, les points ω et ω_1 relatifs aux deux faisceaux et à un même cercle passant par O, et l'on joindra au point O les points où le cercle rencontre la droite $\omega\omega_1$.

1127. *Construire une involution de points sur une droite* L, *connaissant deux couples* (α, α'), (β, β'), *de points homologues.*

On joindra aux points α, α', β, β', un point quelconque O, et l'on construira le faisceau involutif déterminé par les deux couples $(O\alpha, O\alpha')$, $(O\beta, O\beta')$. Les rayons de ce faisceau détermineront, par leur rencontre avec la droite L, l'involution demandée. Aux rayons doubles $O\iota$, $O\iota'$, répondront les points doubles θ et θ'. Quant au point central φ, il répondra au rayon homologue de celui qui est mené par O, parallèlement à la droite L, attendu que le point central est le conjugué de l'infini.

1128. *Étant donnés sur une droite* L, *deux couples de points* (α, α'), (β, β'), *trouver les deux points* θ *et* θ' *qui divisent harmoniquement les deux segments* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$.

Ces deux points sont (1114) les points doubles de l'involution déterminée par les deux couples (α, α'), (β, β').

1129. *Étant données, sur une droite* L, *deux involutions, chacune par deux couples de points homologues* (a, a'), (b, b') *et* (a_1, a'_1), (b_1, b'_1), *trouver le segment commun aux deux involutions.*

On joindra les points donnés à un point arbitraire O; on aura alors deux faisceaux involutifs de même sommet, dont on déterminera (1126) les rayons conjugués communs; ces rayons intercepteront sur la droite L le segment demandé.

II. — COURBES DU SECOND ORDRE.

GÉNÉRATION ET CLASSIFICATION DES CONIQUES; LEUR IDENTITÉ AVEC LES COURBES DU SECOND ORDRE.

1130. Nous donnerons désormais le nom de *conique* à toute section plane d'un cône quelconque à base circulaire.

On sait que :

Lorsqu'un point mobile décrit un cercle, les droites qui joignent ce point à deux points fixes de la circonférence, forment deux faisceaux homographiques.

Lorsqu'une droite mobile enveloppe un cercle, elle trace, sur deux tangentes fixes de ce cercle, deux divisions homographiques.

Une conique n'étant que la projection d'un cercle, et l'homographie de deux divisions ou de deux faisceaux se conservant en projection, on voit que :

Lorsqu'un point mobile décrit une conique, les droites qui joignent ce point à deux points fixes de cette conique, forment deux faisceaux homographiques.

Lorsqu'une droite mobile enveloppe une conique, elle trace, sur deux tangentes fixes de cette conique, deux divisions homographiques.

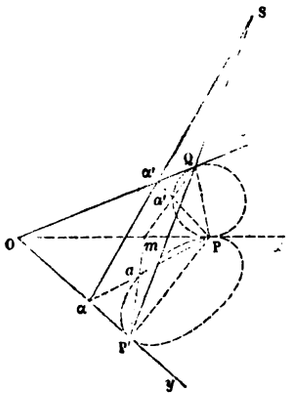
1131. RÉCIPROQUEMENT :

La courbe, lieu des intersections des rayons homologues de deux faisceaux homographiques (situés dans un même plan), est une section conique.

Soient P et P' les centres des deux faisceaux (*fig.* 581). Observons :

1° Qu'*une droite quelconque du plan rencontre la courbe en deux points* (réels ou imaginaires) ; car, les deux divisions déterminées sur cette droite par les deux faisceaux sont homographiques ; elles ont donc

Fig. 581.

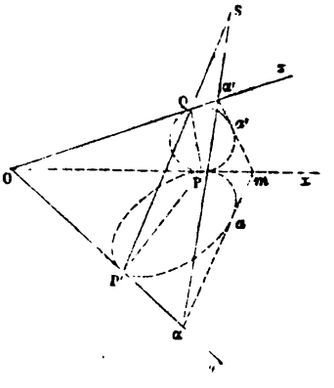


La courbe, enveloppe des droites qui joignent des points homologues de deux divisions homographiques (dont les bases sont dans un même plan), est une section conique.

Soient Ox et Oy les bases des deux divisions (*fig.* 582). Observons :

1° Que, *par un point quelconque du plan, on peut mener à la courbe deux tangentes* (réelles ou imaginaires) ; car les deux faisceaux concentriques qu'on obtient en joignant ce point aux divers points des deux

Fig. 582.



deux points doubles réels ou imaginaires.

2° Que *la courbe passe par les centres* P *et* P′ *des deux faisceaux;* car la droite PP′, considérée comme un rayon du faisceau P, rencontre en P′ le rayon homologue du faisceau P′. On voit de même que la courbe passe en P.

3° Que *la tangente en* P *est le rayon du faisceau* P, *qui est l'homologue de la droite* P′P *considérée comme rayon du faisceau* P′; car, lorsque le point *a* de la courbe vient en P, le rayon P*a* devient tangent en P et son homologue P′*a* vient se confondre avec P′P. De même, *la tangente en* P′ *est le rayon du faisceau* P′ *qui est l'homologue de la droite* PP′ *considérée comme rayon du faisceau* P.

Cela posé, « par le point de concours O des tangentes en P et » en P′ à la courbe considérée P*a* P′, » menons dans l'espace une droite » quelconque O*z*; dans l'angle *z*OP, » inscrivons un cercle tangent à OP » au point P, et désignons par Q le » point où ce cercle touche O*z*.

» *a* étant un point quelconque de » la courbe P*a* P′, menons P′*a* qui » coupe OP en *m*, puis Q*m* qui ren» contre le cercle en *a′*. Quand le » point *a* décrit la courbe, les » droites P′*a* et Q*a′* engendrent » deux faisceaux homographiques; » mais les faisceaux décrits par P*a′* et » Q*a′* sont homographiques (1130), » et il en est de même par hypothèse, sont homographiques; ils ont donc deux rayons doubles (réels ou imaginaires).

2° Que *la courbe est tangente aux bases* O*x* *et* O*y* *des deux divisions;* car la droite O*x* unit deux points homologues des deux divisions, savoir : le point O considéré comme appartenant à la division O*y* et le point homologue de la division O*x*. On voit de même que la courbe touche O*y*.

3° Que *le point de contact* P *de la tangente* O*x* *est le point qui, sur cette droite, répond au point* O *considéré comme appartenant à la division* O*y*; car, lorsque la tangente *xam* se confond avec O*x*, le point *a* devient le point de contact P et son homologue α arrive en O. De même, *le point de contact* P′ *de la tangente* O*y* *est l'homologue du point* O *considéré comme appartenant à la division* O*x*.

Cela posé, par le point O menons dans l'espace une droite quelconque O*z*; inscrivons dans l'angle *z*O*x* un cercle tangent à O*x* en P, et désignons par Q son contact avec O*z*.

a étant un point quelconque de la courbe P*a* P′, menons la tangente correspondante qui coupe O*x* en *m* et O*y* en α; puis, par *m*, menons la tangente *ma′* au cercle Q*a′*P, et désignons par α′ le point où cette tangente coupe O*z*. Quand le point *a* décrit la courbe P*a*P′, les points α et *m* tracent sur O*y* et O*x* deux divisions qui, par hypothèse, sont homo-

« thèse des faisceaux engendrés par » Pa et P$'a$. Donc les droites Pa » et Pa' engendrent deux faisceaux » homographiques, et, par suite, les » points α et α', où les rayons mo- » biles Pa et Pa' rencontrent les » droites fixes OP$'$ et OQ, forment » sur ces droites deux divisions ho- » mographiques. Les points P$'$ et Q » sont deux points homologues de » ces deux divisions (m est alors » en O); de plus, le point O est un » point correspondant commun (m » est alors en P). Donc (1103) la » droite $\alpha\alpha'$ coupe la droite fixe QP$'$ » en un point fixe S.

graphiques; les divisions tracées sur Ox et Oz par m et α' sont aussi homographiques (1130); donc les points α et α' décrivent sur Oy et Oz deux divisions homographiques. Les points P$'$ et Q sont deux points homologues de ces deux divisions (m est alors en O); de plus, le point O est un point correspondant commun (m est alors en P). Donc, la droite mobile $\alpha\alpha'$ coupe (1103) la droite fixe QP$'$ en un point fixe S.

» Par conséquent, l'œil étant placé » en S, la droite P$'m$ sera la pro- » jection de Qm, et Pα sera celle » de Pα'; donc a sera la projection » de a' et, enfin, la courbe propo- » sée PaP$'$ sera la projection du » cercle Pa'Q (1).

Par conséquent, l'œil étant placé en S, la droite αm sera la projection de $\alpha' m$, et, comme la première enveloppe la courbe PaP$'$ et que la seconde enveloppe le cercle Qa'P, on voit que la courbe PaP$'$ est la projection du cercle Pa'Q.

1132. Les principales propriétés des coniques résultent aisément de ce double mode de génération. Ces deux générations, l'une par point, l'autre par enveloppe, étant *corrélatives*, lorsque, en partant de l'une d'elles, on aura démontré un théorème, il suffira, pour démontrer le théorème corrélatif, de partir de l'autre mode de génération et de faire des raisonnements corrélatifs des premiers.

Cinq points déterminent une conique; car, après avoir pris deux de ces points pour centres des deux faisceaux générateurs, il suffit de joindre chacun d'eux aux trois autres points pour avoir trois couples de rayons homologues.

Cinq tangentes déterminent une conique; car, en considérant deux de ces tangentes comme fixes, les trois autres traceront sur elles trois couples de points homologues des deux divisions homographiques qui déterminent la conique.

Il suit de là que *la projection* C$'$ *d'une conique* C *sur un plan quelconque* P *ne passant pas par le centre de projection est encore une conique*. En effet, la courbe C$'$ est le lieu des intersections des rayons

(1) Eugène Rouché, *Bulletin de la Société Philomathique*, 1er juillet 1865.

homologues de deux faisceaux homographiques, qui sont les projections des deux faisceaux générateurs de la conique C. La proposition résulte encore de ce que la courbe C′ est l'enveloppe des droites joignant les points correspondants de deux divisions homographiques, qui sont les projections des deux divisions qui définissent la conique C comme enveloppe.

1133. *Les deux faisceaux homographiques qui déterminent la conique ont deux couples de rayons parallèles* (réels ou imaginaires); car, si l'on transporte l'un des faisceaux parallèlement à lui-même, de façon que son centre coïncide avec le centre de l'autre faisceau, on a deux faisceaux homographiques concentriques qui ont (1109) deux rayons doubles (réels ou imaginaires).

Si les deux couples de rayons parallèles sont imaginaires, la courbe n'a aucun point à l'infini; elle est fermée, et nous lui donnerons le nom d'*ellipse*, en nous réservant de démontrer plus tard son identité avec l'ellipse définie au n° 973.

Si les deux couples de rayons parallèles sont réels, la courbe a deux points à l'infini; nous lui donnerons le nom d'*hyperbole*, et nous démontrerons plus tard son identité avec l'hyperbole définie au n° 999.

Enfin, si les deux couples de rayons parallèles coïncident, la courbe a deux points à l'infini confondus en un seul, et, par suite, elle est *tangente à la droite de l'infini;* nous lui donnerons le nom de *parabole*, et nous démontrerons plus tard son identité avec la parabole définie au n° 1027.

Tels sont les trois *genres* de coniques. Comme *variétés* de ces courbes, on peut avoir :

1° *Deux droites* (réelles, coïncidentes ou imaginaires), lorsque les deux faisceaux sont concentriques (1109), ou lorsque la droite qui unit leurs centres est un rayon homologue commun (1108);

2° *Deux points* (réels, coïncidents ou imaginaires), lorsque les deux divisions ont la même base (1104), ou lorsque le point d'intersection des deux bases est un point homologue commun (1103).

1134. On dit qu'une courbe est *algébrique* ou *transcendante* suivant que son équation en coordonnées rectilignes x et y est algébrique ou transcendante. On appelle *ordre* d'une courbe algébrique le degré en x et y de son équation préalablement rendue rationnelle et entière par rapport à ces variables. Pour que cette définition ne soit pas contradictoire, il faut montrer que le degré de l'équation est indépendant de la position de la courbe par rapport aux axes de coordonnées. C'est ce que nous allons établir.

Considérons une droite située d'une manière quelconque par rapport aux axes coordonnés ox et oy. Soient M, M′, M″, ..., divers points de cette droite, P, P′ P″, ..., les extrémités de leurs abscisses, et Q, Q′, Q″, ...

les extrémités de leurs ordonnées comptées sur oy. Les deux divisions $PP'P'', \ldots$, $QQ'Q'', \ldots$, sont homographiques et semblables, car chacune d'elles est évidemment semblable (1102) à la division $MM'M'', \ldots$; il y a donc entre $x = oP$ et $y = oQ$ une relation homographique privée de termes en xy, c'est-à-dire que les coordonnées d'un point quelconque M de la droite sont liées constamment par une équation du premier degré.

L'équation d'une ligne droite étant du premier degré, quelle que soit la situation de cette droite par rapport aux axes coordonnés, il faut nécessairement que, si x et y sont les coordonnées d'un point par rapport à certains axes yox, et x' et y' les coordonnées du même point par rapport à d'autres axes $y'ox'$, x et y soient des fonctions du premier degré de x' et y'. Par suite, la substitution de ces valeurs de x et y dans une équation algébrique en x et y n'altérera pas le degré de cette équation. En d'autres termes, l'ordre de la courbe représentée par cette équation sera le même, quels que soient les axes auxquels on la rapporte.

Une courbe algébrique d'ordre n est coupée en n points (réels ou imaginaires) par une droite quelconque. En effet, en prenant cette droite pour axe des x, l'équation de la courbe sera toujours du degré n d'après ce qui précède; et, si l'on fait $y = 0$, l'équation se réduira à une équation du degré n en x, qui donnera les abscisses des points communs à la courbe et à la droite; or, on sait par l'Algèbre qu'une équation algébrique rationnelle et entière du degré n à n racines réelles ou imaginaire. Ainsi, *l'ordre d'une courbe algébrique exprime le nombre des points suivant lesquels cette courbe est rencontrée par une droite quelconque.*

Les coniques sont donc des courbes du second ordre (1131). Inversement, *toute courbe du second ordre est une conique;* car, l'équation générale du second degré à deux variables x et y ne renfermant que cinq coefficients arbitraires, on voit que cinq points déterminent une courbe du second ordre; mais, par ces cinq points, on peut faire passer une conique et une seule (1132); et, comme cette conique est du second ordre, elle ne diffère pas de la courbe proposée.

1135. Les théorèmes de Pascal (328) et de Desargues (1121), les propositions corrélatives ainsi que leurs corollaires sont applicables aux coniques; les démonstrations données aux n°s 328, 329, 1121, 1122, subsistent sans modification.

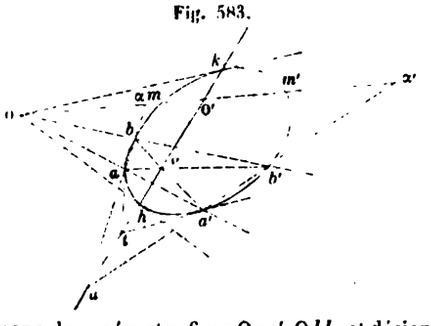
Le théorème de Desargues a été généralisé par Sturm (*Annales de Gergonne*, t. XVII). Considérons une suite de coniques circonscrites à un même quadrilatère : soient aa', bb', cc', ..., les segments que ces coniques interceptent sur une transversale quelconque L, et pp', qq', les segments de cette même droite compris entre les deux couples de côtés opposés du quadrilatère. Les deux couples de points (p, p'), (q, q') déterminent sur la droite L une involution à laquelle appartient, en vertu du théorème de Desargues,

chacun des couples (a, a'), (b, b'), (c, c'), ...; donc ces derniers couples de points forment une involution, et l'on a ce théorème : *Les coniques qui passent par quatre points fixes déterminent sur une transversale quelconque une série de points en involution*. On démontrerait pareillement le théorème corrélatif : *Les tangentes menées d'un même point aux coniques tangentes à quatre droites fixes forment un faisceau en involution.*

PÔLE ET POLAIRE DANS LES CONIQUES.

1136. *Si par un point* O *pris dans le plan d'une conique on mène une sécante qui rencontre la courbe en deux points m et m'* (*réels ou imaginaires*), *et si l'on détermine le conjugué harmonique* O' *du point* O *par rapport au segment mm', le lieu du point* O', *lorsque la sécante tourne autour du point* O, *est une ligne droite* (*fig.* 583).

Fig. 583.



En effet, menons deux sécantes fixes Oaa', Obb, et désignons par α et α' les points où la transversale Omm' coupe les côtés opposés ab et $a'b'$ du quadrilatère inscrit $ab\,b'a'$. D'après le théorème de Desargues (1121), le point O est un point double de l'involution déterminée par les deux couples (m, m'), (α, α'); or, par hypothèse, O' est le conjugué harmonique de O par rapport au segment mm'; c'est donc l'autre point double, et, par suite, il est aussi le conjugué harmonique de O par rapport au segment $\alpha\alpha'$; donc, quand la transversale Omm' tourne autour de O, le point O' décrit la polaire du point O par rapport à l'angle bub' formé par les droites fixes ab et $a'b'$.

Le point O et la droite uO' sont dits *pôle* et *polaire* par rapport à la conique.

En observant que la polaire de O par rapport à l'angle bub' renferme (337) le point d'intersection des droites ab' et ba', on voit, par la démonstration même qui précède, que : *Si par un point* O *pris dans le plan d'une conique on mène deux sécantes* Oaa', Obb', *et si l'on prend les points de rencontre u et v des droites qui joignent deux à deux les extrémités des cordes aa' et bb', le lieu des points u et v, lorsqu'on fait varier les sécantes* Oaa', Obb', *est la polaire du point* O *par rapport à la conique.*

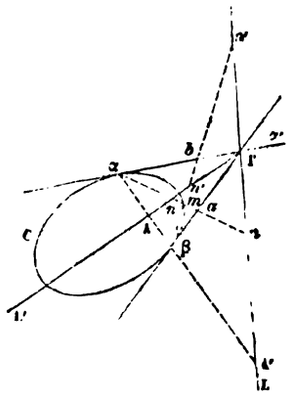
Quand les droites Oaa', Obb', se confondent, les cordes ab, $a'b'$, sont les tangentes en a et a'; donc, *si par un point* O *pris dans le plan d'une conique on mène une sécante* Oaa' *et les tangentes at, a't', aux points a et a' où elle rencontre la conique, le lieu du point de concours t de ces tangentes, lorsque la transversale tourne autour de* O, *est la polaire de ce point* O.

La polaire est la corde de contact des tangentes issues du pôle; car, au point de contact k d'une tangente issue du pôle, les trois points m m', O', sont réunis. Par suite, *la polaire d'un point de la conique est la tangente en ce point*, et, inversement, *le pôle d'une tangente est son point de contact*.

1137. ***Les polaires de tous les points d'une droite passent par le pôle de cette droite***, et, inversement, ***les pôles de toutes les droites qui passent par un point sont situés sur la polaire de ce point.***

En effet, soient (*fig.* 584) un point A et une droite L qui sont pôle et

Fig. 584.



polaire par rapport à une conique C. A' étant un point quelconque de L, la droite AA' coupe la conique en deux points α et β (réels ou imaginaires), et A et A' sont conjugués harmoniques par rapport à $\alpha\beta$; donc le point A appartient à la polaire L' de A'. Ainsi la polaire d'un point quelconque A' de L passe par A, et, inversement, le pôle A d'une droite quelconque L passant par A' est sur la polaire L' du point A'.

Il résulte de là que *toute droite a pour pôle l'intersection des polaires de deux de ses points*, et que *tout point a pour polaire la droite qui joint les pôles de deux droites issues de ce point.*

1138. La polaire d'un point O coupe la conique en deux points réels

ou imaginaires, qui sont les points de contact des tangentes réelles ou imaginaires issues du point O.

Lorsque la polaire du point O coupe la courbe en deux points réels, de ce point O on peut mener à la conique deux tangentes réelles, et le point O est dit *extérieur* à la conique.

Lorsque la polaire du point O rencontre la courbe en deux points imaginaires, les deux tangentes issues du point O sont imaginaires, et le point O est dit *intérieur* à la courbe.

La région intérieure et la région extérieure ont pour ligne de démarcation la conique elle-même qui est le lieu des points dont les polaires touchent la courbe, c'est-à-dire ont chacune avec la courbe deux points communs réels et coïncidents.

Considérons une conique C et un point *extérieur* T (*fig.* 584). La polaire de ce point rencontre la courbe en deux points réels α et β, et les droites $T\alpha$, $T\beta$, sont les tangentes réelles issues du point T. Nous donnerons à l'angle $\alpha T\beta$ formé par les directions $T\alpha$ et $T\beta$ le nom d'*angle des tangentes*, et nous appellerons l'angle $\beta T\alpha'$ formé par la direction $T\beta$ et par la direction $T\alpha'$ opposée à $T\alpha$ *l'angle supplémentaire des tangentes*. Cela posé, prenons les points α et β pour centres des deux faisceaux générateurs de la conique, et considérons une droite quelconque TL ou TL' issue du point T. *Les deux faisceaux traceront sur cette droite deux divisions homographiques en involution;* car le point T, considéré successivement comme appartenant à l'une ou à l'autre de ces divisions, a toujours pour homologue le même point A (ou A'), où la polaire $\alpha\beta$ de T rencontre la transversale TL' (ou TL). Les points doubles, réels ou imaginaires de cette involution, seront les points réels ou imaginaires communs à la transversale et à la conique. Or il est aisé de voir que ces points sont réels tant que la transversale est, comme TL', située dans l'angle $\alpha T\beta$ des tangentes, et imaginaires lorsque la tranversale est, comme TL, placée dans l'angle $\beta T\alpha'$ supplémentaire des tangentes. En effet, dans le premier cas, le segment TA et le segment nn' formé par deux points homologues de l'involution correspondant à un point quelconque m de la courbe n'empiètent pas l'un sur l'autre et, par suite, les points doubles de l'involution sont réels; mais, si TL' tourne autour de T de manière à venir sur TL dans l'angle supplémentaire, les points n et n' glissent sur les droites fixes αa, βb, se croisent en β, et sont ensuite de part et d'autre du point T; les segments nn' et TA' empiétant l'un sur l'autre, l'involution a ses points doubles imaginaires. Ainsi *la courbe est située tout entière dans l'angle* $\alpha T\beta$ *de tangentes issues d'un point extérieur quelconque* T (et dans son opposé par le sommet).

1139. Les propriétés (352, 353) des quadrilatères inscrits et cir-

conscrits, ainsi que leurs démonstrations, s'appliquent aux coniques.

Il en est de même du théorème démontré au n° 1119. Dans cette proposition et dans les tracés (1125) qui en dérivent, on peut substituer au cercle une conique. Il en résulte un théorème que nous n'avons pas énoncé alors, parce qu'il était évident pour le cercle, mais qui est une propriété importante des coniques : *Si autour d'un point d'une conique, comme sommet, on fait tourner un angle droit, la corde variable que ses côtés interceptent dans la conique passe par un point fixe,* car les deux côtés de l'angle droit décrivent un faisceau involutif. Il est évident que le point fixe est situé sur la normale au point considéré, puisque, quand l'un des côtés de l'angle droit devient tangent, la corde interceptée devient normale. Cette proposition, connue sous le nom de *Théorème de Frégier,* fournit donc un moyen simple *pour construire avec l'équerre la normale en un point donné d'une conique.*

Le théorème (1119) étendu aux coniques donne une solution du problème suivant : *Inscrire dans une conique un polygone dont les côtés passent respectivement par des points donnés* A, B, C, . . . , M. Si un sommet a était connu, on tracerait immédiatement le polygone; il suffirait de mener la droite Aa, de joindre au point B le second point b d'intersection de Aa et de la conique, de joindre au point C le second point c d'intersection de la droite Bb et de la conique, et ainsi de suite; la dernière droite Mm couperait pour la seconde fois la conique précisément au point a. Cela posé, prenons arbitrairement un premier point de départ a_1 sur la conique, joignons-le au point A, et opérons comme ci-dessus; nous obtiendrons une ligne brisée inscrite $a_1 b_1 c_1 \ldots m_1 \alpha_1$, mais qui ne se fermera pas, c'est-à-dire telle que la dernière droite Mm_1 rencontrera pour la seconde fois la conique en un point α_1 différent de a_1. Construisons deux autres lignes brisées analogues $a_2 b_2 \ldots \alpha_2$, $a_3 b_3 \ldots \alpha_3$, et soit S un point fixe pris à volonté sur la conique. D'après le théorème du n° 1119, le faisceau (S.$aa_1a_2a_3$) est homographique du faisceau (S.$bb_1b_2b_3$), puisque les cordes $ab, a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3$, passent par le même point A; de même, le faisceau (S.$bb_1b_2b_3$) est homographique du suivant (S.$cc_1c_2c_3$), et ainsi de suite; donc le premier et le dernier faisceau (S.$aa_1a_2a_3$), (S.$a\alpha_1\alpha_2\alpha_3$), sont homographiques, et Sa est un rayon double de ces deux faisceaux. On voit par là qu'il suffira de construire (1126) les rayons doubles des deux faisceaux homographiques déterminés par les trois couples (Sa_1, Sα_1) (Sa_2, Sα_2) (Sa_3, Sα_3); chacun de ces rayons doubles coupera la conique en un point qui pourra être pris pour le sommet a; il y a donc deux solutions.

Le problème corrélatif : *Circonscrire à une conique un polygone dont les sommets soient situés respectivement sur des droites données,* se résoudrait d'une manière analogue en s'appuyant sur le théorème cor-

rélatif de la proposition (1119).

Quand des angles circonscrits à une conique ont leurs sommets en ligne droite, les segments qu'ils interceptent sur une tangente quelconque à la courbe forment une involution; ce théorème et sa réciproque se démontrent par des raisonnements corrélatifs de ceux faits au n° 1119; le lecteur les rétablira sans peine et pourra en déduire des tracés graphiques corrélatifs de ceux exposés aux n°s 1125 et suivants.

1140. Deux points A et A' (*fig.* 584) sont dits *conjugués* par rapport à une conique lorsque la polaire de l'un passe par l'autre. Ces points sont *conjugués harmoniques* par rapport aux deux points (réels ou imaginaires) α et β suivant lesquels la droite AA' qui les joint rencontre la conique. Lorsque les points α et β sont réels, l'un des points A et A' est intérieur et l'autre extérieur à la courbe.

Plusieurs couples de points conjugués sur une même droite forment une involution dont les points doubles sont les points où la droite coupe la conique (1114). Quand ces points doubles sont imaginaires, il existe de chaque côté de la droite un point d'où l'on voit sous un angle droit chaque couple de points conjugués.

Deux droites L et L' sont dites *conjuguées* par rapport à une conique lorsque le pôle de l'une est situé sur l'autre. Ces deux droites sont *conjuguées harmoniques* par rapport aux deux tangentes réelles ou imaginaires issues de leur point d'intersection; l'une au moins des droites conjuguées rencontre toujours la courbe.

Plusieurs couples de droites conjuguées issues d'un même point forment un faisceau en involution dont les rayons doubles sont les tangentes (réelles ou imaginaires) issues de ce point. Donc (1119), *par un point quelconque du plan d'une conique passe toujours un couple de droites conjuguées rectangulaires;* et il n'en passe en général qu'un seul, à moins que tous les couples de droites conjuguées passant par ce point ne soient rectangulaires, ce qui a lieu pour certains points remarquables dont nous parlerons plus tard.

Les deux propositions qui précèdent fournissent des solutions simples des deux problèmes suivants :

Trouver les points d'intersection d'une conique et d'une droite de son plan.

On prend deux points *a* et *b* sur la droite; on détermine leurs polaires et l'on prend les points *a'* et *b'* où ces polaires coupent la droite; les points cherchés sont les

Mener les tangentes à une conique par un point de son plan.

On mène deux droites A et B par le point; on cherche leurs pôles. puis, en les joignant au point donné, on obtient deux nouvelles droites A' et B'. Les tangentes cherchées

points doubles (réels ou imaginaires) de l'involution déterminée par les deux couples (a, a'), (b, b').

sont les rayons doubles (réels ou imaginaires) du faisceau involutif déterminé par les deux couples (A, A'), (B, B').

On dit qu'un triangle est *autopolaire* ou *conjugué* par rapport à une conique lorsque chaque sommet est le pôle du côté opposé.

Il est évident que, dans le plan d'une conique, il existe une infinité de triangles autopolaires : il suffit de prendre pour les deux premiers sommets deux points conjugués quelconques a et b par rapport à la conique et pour troisième sommet c le pôle de ab; en effet, la polaire de a devant passer par b qui est conjugué de a et aussi par c qui est le pôle de ab sera la droite bc, et l'on verrait de même que la polaire de b est ac.

Dans tout triangle autopolaire abc, deux sommets quelconques sont conjugués aussi bien que deux côtés quelconques. *L'un des sommets est intérieur à la conique, et les deux autres sont extérieurs;* car, des deux points conjugués a et b, l'un au moins, a par exemple, est extérieur: sa polaire bc coupe donc la courbe et, par suite, les points conjugués b et c sont l'un intérieur, l'autre extérieur.

1141. *Les polaires* OA, OB, OC, OD, *de quatre points a, b, c, d, situés sur une même droite* L, *forment un faisceau dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre points.*

En effet, soient a', b', c', d', les points où la droite D rencontre le faisceau (O, ABCD). Comme le centre O du faisceau est le pôle de la droite L (1137), les points a et a', b et b', c et c', d et d', sont conjugués; ils forment donc une involution, et, par suite, le rapport anharmonique ($abcd$) est égal au rapport anharmonique ($a'b'c'd'$), qui n'est autre que le rapport anharmonique du faisceau (O, ABCD).

DIAMÈTRES ET CENTRE.

1142. Les deux points de rencontre α et β d'une conique et d'une droite sont réels ou imaginaires, mais le point milieu du segment $\alpha\beta$ est toujours réel; c'est le conjugué harmonique par rapport à $\alpha\beta$ du point situé à l'infini sur la droite considérée (1114). Il résulte de là que *le lieu des milieux des cordes d'une conique parallèles à une direction donnée est une ligne droite;* c'est la polaire du point à l'infini commun à toutes les cordes. Cette droite, qui passe évidemment par les points de contact des tangentes parallèles à la direction donnée, a reçu le nom de *diamètre*.

A chaque direction des cordes répond un diamètre. Tous les diamètres

passent par un point unique, pôle de la droite de l'infini (1137), et qu'on nomme *centre* de la conique.

La polaire du centre étant la droite de l'infini, les tangentes réelles ou imaginaires issues du centre ont leurs points de contact à l'infini; on leur donne le nom d'*asymptotes*.

Quand un angle est circonscrit à une conique, la droite qui joint le sommet au milieu de la corde de contact est un diamètre; car c'est la polaire du point à l'infini situé sur cette corde.

1143. On dit que deux *diamètres* sont *conjugués* lorsque le pôle de l'un est situé sur l'autre. Le pôle d'un diamètre étant à l'infini sur la direction des cordes correspondantes, on voit que, *si deux diamètres sont conjugués, chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre.*

La polaire L *d'un point p est parallèle au diamètre conjugué* O*b* *de*

Fig. 585.

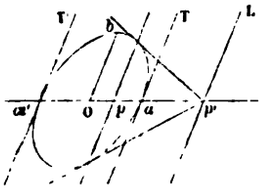
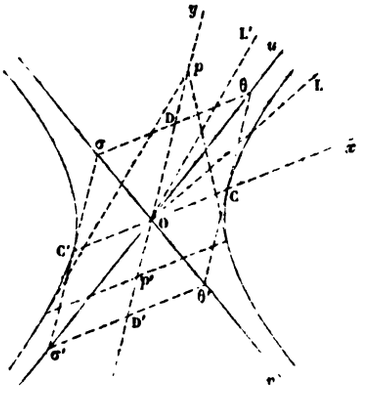


Fig. 586.



celui qui passe par ce point p (*fig.* 585); car ce diamètre doit passer par le pôle du diamètre O*a* et ce pôle est à l'infini sur O*b*.

En particulier, *si le diamètre a*O*a' rencontre la courbe, les tangentes* T *et* T' *aux extrémités de ce diamètre sont parallèles à son conjugué* O*b*.

1144. *Plusieurs couples de diamètres conjugués forment un faisceau en involution* (1140); les axes de symétrie de la courbe forment le couple de rayons homologues rectangulaires.

Dans l'ellipse (*fig.* 585), le sommet du faisceau, c'est-à-dire le centre de la courbe étant intérieur, il n'y a pas de rayons doubles; un couple quelconque de diamètres conjugués est alors séparé par tout autre couple. D'ailleurs tout diamètre coupe la courbe en deux points.

Dans l'hyperbole (*fig.* 586), le centre étant extérieur, le faisceau a pour rayons doubles les tangentes issues de ce point, c'est-à-dire les deux asymptotes. De là résultent diverses conséquences :

1° Le diamètre conjugué d'une asymptote est cette asymptote elle-même.

2° Deux diamètres conjugués quelconques OL et OL′ divisent harmoniquement l'angle uOv des asymptotes.

3° De deux couples de diamètres conjugués (Ox, Oy) (OL, OL′), l'un est toujours compris dans l'autre.

4° De deux diamètres conjugués Ox et Oy, l'un rencontre la courbe, l'autre ne la rencontre pas.

5° *La portion* $\theta\theta'$ *d'une tangente quelconque comprise entre les asymptotes est divisée en deux parties égales par le point de contact* C; car $\theta\theta'$ est parallèle au diamètre conjugué Oy de OC, c'est-à-dire au rayon Oy du faisceau harmonique (Oy, Ou, Ox, Ov) (*fig.* 586).

A cause de la symétrie par rapport au centre, la portion $\sigma\sigma'$ de la tangente en C′ comprise entre les asymptotes est égale et parallèle à $\theta\theta'$ et la figure $\theta\sigma\sigma'\theta'$ est un parallélogramme. Par analogie avec ce qui a été dit pour l'axe non transverse (1017), on donne à la partie DD′ du diamètre non transverse Oy, qui est comprise dans le parallélogramme $\theta\sigma\sigma'\theta'$, le nom de *longueur de ce diamètre;* mais ce n'est là qu'une dénomination introduite pour faciliter le langage, et il faut bien se garder de croire que les points D et D′, quoique portant le nom d'*extrémités du diamètre non transverse* Oy, appartiennent à la courbe; il n'y a pas de points de la courbe sur $y'oy$.

1145. La polaire d'un point quelconque p du plan d'une ellipse ou d'une hyperbole rencontre le diamètre passant par le pôle p en un point p' qui est conjugué de p par rapport à la conique (1143). Les couples de points tels que p et p' (*fig.* 585 et 586) forment sur ce diamètre une involution dont le point central est le centre O de la conique, puisque le conjugué de O est à l'infini (1112). Si ce diamètre est transverse (ellipse ou hyperbole), ses extrémités sont les points doubles de l'involution, et l'on a, en appelant a' la demi-

longueur de ce diamètre,

$$(1) \qquad Op.Op' = a'^2.$$

Si le diamètre est non transverse (hyperbole), il n'y a pas de points doubles; mais alors les points D et D', que nous sommes convenus d'appeler les extrémités de ce diamètre, sont évidemment conjugués, car le pôle de Dθ est sur la polaire de θ, c'est-à-dire sur la droite CD' qui, étant parallèle à l'asymptote, est la corde de contact des tangentes θu et θC; on a dans ce cas

$$(2) \qquad Op.Op' = -b'^2,$$

b' étant la demi-longueur OD du diamètre non transverse.

1146. On nomme *cordes supplémentaires* deux cordes qui, partant d'un même point m de la conique (*fig.* 587), aboutissent aux extrémités d'un même diamètre AA'. *Deux cordes supplémentaires* Am, A'm, *sont parallèles à un système de diamètres conjugués.* En effet, soient OC et OD deux diamètres respectivement parallèles à A'm et à Am. OC, passant par le milieu O de AA', passe par le milieu h de Am; il divise donc en deux parties égales les cordes parallèles à OD, et par suite OC et OD sont conjugués. Inversement, *deux droites* Am *et* A'm *menées par les extrémités d'un diamètre* AA', *parallèlement à deux diamètres conjugués quelconques* OD *et* OC, *se coupent sur la conique.* Car désignons par μ le point où la corde Am parallèle à OD coupe la conique, et menons μA'; les cordes supplémentaires Aμ, A'μ, sont parallèles à deux diamètres conjugués, et, comme Aμ est parallèle à OD, A'μ doit être parallèle à OC; elle ne diffère donc pas de A'm et les points m et μ se confondent.

Cela posé, considérons séparément l'ellipse, l'hyperbole et la parabole.

1147. L'*ellipse* n'ayant aucun point à l'infini, la droite de l'infini est extérieure à la courbe, et son pôle O, c'est-à-dire le centre de l'ellipse, est à l'intérieur de la courbe. Tous les diamètres rencontrant la courbe en deux points réels sont limités; et, comme les tangentes issues du centre sont imaginaires, le faisceau en involution formé par les divers couples de diamètres conjugués n'a pas de rayons doubles; donc, un couple quelconque (OA, OB) de deux diamètres conjugués est *séparé* par tout autre couple (OC, OD); en d'autres termes, si OC est situé dans l'angle BOA (*fig.* 587), OD est extérieur à cet angle.

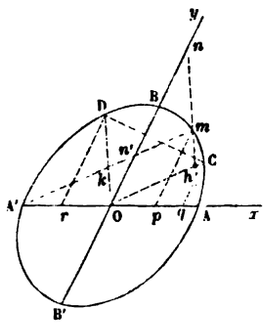
Le diamètre AA' étant la polaire du point à l'infini sur le diamètre

conjugué OB, les cordes supplémentaires Am et Am' tracent sur OB, quand m se déplace sur la courbe, une involution dont B est un point double (1133). On a donc, en appelant n et n' les points où OB rencontre Am et Am', la relation

$$On.On' = \overline{OB}^2. \tag{1}$$

Prenons pour axe des x le demi-diamètre OA, dont nous désignerons la longueur par a', et pour axe des y le demi-diamètre OB, dont nous désignerons la longueur par b' : y et x étant les coordonnées mp et Op d'un point quelconque m de la conique, on a, en considérant d'abord les

Fig. 587.



triangles semblables nOA et mpA, puis les triangles semblables n'O$\backslash$ et mpA',

$$\frac{y}{a'-x} = \frac{On}{a'}, \quad \frac{y}{a'+x} = \frac{On'}{a'};$$

en multipliant membre à membre et en ayant égard à la relation (1), on obtient pour l'équation de l'ellipse

$$\frac{y^2}{a'^2-x^2} = \frac{b'^2}{a'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1. \tag{2}$$

Si l'on désigne par x', y', et par x'', y'' les coordonnées des extrémités C et D des diamètres OC et OD parallèles aux cordes A'm et Am, on a, en considérant d'abord les triangles semblables OCq et A'n'O, puis les triangles semblables ODr, AnO,

$$\frac{y'}{x'} = \frac{On'}{a'}, \quad \frac{y''}{-x''} = \frac{On}{a'};$$

en multipliant membre à membre et en ayant égard à la relation (1), on trouve

$$\frac{y'}{x'}\frac{y''}{x''} = -\frac{b'^2}{a'^2}. \tag{3}$$

Le rapport $\frac{y'}{x'}$ reçoit le nom de *coefficient angulaire* du diamètre OC, de même $\frac{y''}{x''}$ est le coefficient angulaire du diamètre OD.

Lorsqu'on prend pour axes de coordonnées les axes mêmes de la courbe, on a, en désignant par a le demi grand axe dirigé suivant Ox et par b le demi petit axe dirigé suivant Oy,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4}$$

$$\frac{y'}{x'}\frac{y''}{x''} = -\frac{b^2}{a^2}; \tag{5}$$

les coordonnées étant alors rectangulaires, le coefficient angulaire $\frac{y'}{x'}$ est égal à tang COA, et $\frac{y''}{x''}$ est égal à tang DOA.

Il est facile d'exprimer les coordonnées x'', y'' de l'extrémité D d'un diamètre OD en fonction des coordonnées x', y', de l'extrémité C de son conjugué OC. En effet, le point C étant sur la courbe, ses coordonnées x' et y' satisfont à l'équation (4); on peut donc poser

$$x' = a\cos\varphi', \quad y' = b\sin\varphi', \tag{6}$$

et de même

$$x'' = a\cos\varphi'', \quad y'' = b\sin\varphi'. \tag{7}$$

La relation (5) devient alors

$$\cos(\varphi'' - \varphi') = 0, \quad \text{d'où} \quad \varphi'' = \frac{\pi}{2} + \varphi'$$

et, par suite,

$$x'' = -a\sin\varphi' = -\frac{a}{b}y', \quad y'' = b\cos\varphi' = \frac{b}{a}x'; \tag{8}$$

pour avoir les coordonnées de l'autre extrémité D' du diamètre OD, il suffirait de changer les signes.

Les relations (6) et (8) donnent

$$x'^2 + x''^2 = a^2, \quad y'^2 + y''^2 = b^2;$$

donc *la somme des carrés des projections orthogonales des deux demi-diamètres conjugués* OC *et* OD *sur chaque axe est constante.*

En ajoutant les deux égalités précédentes, on a

$$(x'^2 + y'^2) + (x''^2 + y''^2) = a^2 + b^2 \quad \text{ou} \quad \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = a^2 + b^2;$$

donc, *la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués est constante.*

Le triangle OCD est la moitié du parallélogramme construit sur les deux demi-diamètres conjugués OC et OD. Il est égal au trapèze CDη, diminué de la somme des deux triangles rectangles OCq, ODr; son aire a donc pour expression

$$\frac{1}{2}(y' + y'')(x' - x'') - \frac{1}{2}(-x''y'') - \frac{1}{2}x'y' = \frac{1}{2}(x'y'' - x''y')$$

ou $\frac{1}{2}ab$, eu égard aux formules (6) et (8). *Donc, l'aire du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués est constante.*

Les deux derniers théorèmes sont dus à Apollonius.

La proposition précédente peut s'écrire, d'après une expression bien connue de l'aire du triangle,

$$OC \cdot OD \sin COD = ab.$$

L'angle obtus COD de deux diamètres conjugués est maximum quand son sinus est minimum, c'est-à-dire quand le produit OC.OD ou son carré est maximum; ce qui a lieu pour OC = OD, puisque $\overline{OC}^2 + \overline{OD}^2$ est constant. Ainsi, *les diamètres conjugués qui font le plus grand angle sont les diamètres conjugués égaux.* Le carré de leur demi-longueur commune est $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, et l'on a

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2) = x'^2 + y'^2 = a^2\cos^2\varphi' + b^2\sin^2\varphi'.$$

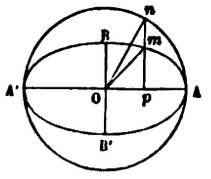
On déduit de là $\sin\varphi' = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\varphi'$; par suite, les coordonnées x' et y' du point C sont alors proportionnelles à a et b; de sorte que *les diamètres conjugués égaux sont dirigés suivant les diagonales du rectangle construit sur les axes.*

L'angle COD de deux demi-diamètres conjugués est droit lorsque OC coïncide avec le grand axe, puis il augmente jusqu'à ce que OC soit dirigé suivant une diagonale du rectangle des axes; il diminue ensuite et redevient droit lorsque OC reprend la position du petit axe.

Quand les axes a et b de l'ellipse sont égaux entre eux, l'équation (4) se réduit à $x^2+y^2=a^2$; tous les points de la courbe sont donc à une distance du centre égale à a; en d'autres termes, l'ellipse dégénère en un cercle.

Pour une même abscisse Op (*fig.* 588), c'est-à-dire pour une même

Fig. 588.



valeur de l'angle φ', l'ordonnée mp de l'ellipse est $b\sin\varphi'$, et celle np du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre est $a\sin\varphi'$; le rapport $\frac{mp}{np}$ est donc constant et égal à $\frac{b}{a}$.

Remarquons enfin que l'angle auxiliaire φ', dont l'emploi est si commode, est précisément l'angle nOp.

1148. L'*hyperbole* ayant deux points réels sur la droite de l'infini, son centre est extérieur à la courbe (1133); les tangentes $O\alpha$, $O\nu$, issues du centre, c'est-à-dire les asymptotes, sont donc réelles; ce sont les rayons doubles du faisceau en involution formé par les deux couples de diamètres conjugués. Il suit de là que *deux diamètres conjugués quelconques divisent harmoniquement l'angle des asymptotes* et qu'aucun couple de diamètres conjugués n'est *séparé* par aucun autre. Enfin, de deux diamètres conjugués, l'un rencontre réellement la courbe et l'autre ne la rencontre pas (1144).

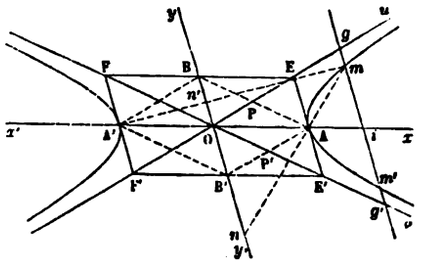
Les portions AE, AE' (*fig.* 589) *d'une tangente comprise entre l'hyperbole et ses asymptotes sont égales;* car les asymptotes Ou et Ov, le diamètre OAx et son conjugué Oy forment un faisceau harmonique, et la tangente EAE', étant parallèle au rayon Oy de ce faisceau (1143), est divisée en deux parties égales par les autres rayons. Il suit de là que, si l'on mène AP et AP' parallèles aux asymptotes, P est le milieu de OE et P' le milieu de OE'; donc, *lorsqu'on prend les asymptotes pour axes de*

coordonnées, *la sous-tangente* OE' *est double de l'abscisse* OP' *du point de contact*.

Les portions gm et g'm' d'une sécante gg', comprises entre l'hyperbole et ses asymptotes, sont égales. En effet, soit EAE' la tangente parallèle à *gg'*, et OA le diamètre qui passe au point de contact; ce diamètre divise la corde *mm'* de l'hyperbole en deux parties *im* et *im'* égales entre elles; mais, puisque A est le milieu de EE', *i* est évidemment le milieu de la parallèle *gg'*; donc $ig = ig'$, et, par suite, $ig - im$ ou gm est égal à $ig' - im'$ ou $g'm'$.

Une tangente quelconque EAE', lorsque son point de contact A se déplace sur la courbe, trace sur les asymptotes (1130) deux divisions ho-

Fig. 589.



mographiques; et, comme le point O correspond évidemment à l'infini dans l'une et l'autre division, le produit OE.OE' est constant; il en est donc de même de l'aire du triangle OEE' et, par suite, de l'aire du parallélogramme OPAP', qui est la moitié de ce triangle. On voit par là que, si l'on désigne par x et y les coordonnées d'un point quelconque A de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, Ou et Ov, on a pour l'équation de cette courbe $xy = \text{const.}$

1149. AOA' étant un diamètre transverse quelconque de l'hyperbole, menons les tangentes en A et A' qui coupent les asymptotes, la première en E et E', l'autre en F et F'. Les triangles OAE, AO'F', sont égaux, puisqu'ils ont leurs angles respectivement égaux et que OA = OA'; donc AE = A'F'; par suite, les droites EE', FF', sont égales, et, comme elles sont parallèles (1143), la figure EFF'E' est un parallélogramme dont O est le centre. Soient B et B' les points où le diamètre yOy' conjugué de OA rencontre EF et E'F'; B est le milieu de EF, B' celui de E'F', les droites AB', A'B, sont parallèles à l'asymptote Ou, et les droites AB et A'B' à l'asymptote Ov.

Cela étant, posons OA = a', OB = b', et prenons les deux demi-diamètres conjugués OAx, OBy, pour axes des coordonnées; m étant un

point quelconque de l'hyperbole, les deux cordes supplémentaires Am, $A'm$, déterminent sur le diamètre $\gamma O\gamma'$ deux points n et n' qui engendrent une involution (1147) dont B et B′ sont évidemment deux points homologues. On a donc

$$On.On' = OB.OB' = -b'^2.$$

Dès lors, tous les raisonnements faits et les résultats obtenus pour l'ellipse subsistent, en changeant b'^2 en $-b'^2$ ou b' en $b'\sqrt{-1}$. Ainsi :

1° L'hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués a pour équation

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Pour $x = 0$, on a $y = \pm b'\sqrt{-1}$; de là le nom de *longueur du demi-diamètre non transverse* attribué à $OB = b'$.

a et b étant les longueurs des deux axes, on a, en prenant ces droites pour axes de coordonnées rectangulaires,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Les triangles semblables giO, EAO, donnent

$$\frac{gi}{Oi} = \frac{EA}{OA} = \frac{b'}{a'} \quad \text{ou} \quad \overline{gi}^2 = \frac{b'^2}{a'^2}\overline{Oi}^2 ;$$

on a d'ailleurs, par l'équation de l'hyperbole,

$$\overline{mi}^2 = \frac{b'^2}{a'^2}\left(\overline{Oi}^2 - a'^2\right) ;$$

donc, en retranchant,

$$\overline{gi}^2 - \overline{mi}^2 = b'^2$$

ou

$$b'^2 = (gi + mi)(gi - mi) = gm.gm' = mg.mg' ;$$

ainsi *le produit des segments d'une sécante, compris entre un point de la courbe et les asymptotes, est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la sécante.*

2° La relation entre les coefficients angulaires de deux demi-diamètres conjugués est

$$\frac{y'}{x'}\cdot\frac{y''}{x''} = \frac{b'^2}{a'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{y'}{x'}\cdot\frac{y''}{x''} = \frac{b^2}{a^2},$$

suivant qu'on prend pour axes de coordonnées les demi-diamètres conjugués a' et b' ou les demi-axes a et b de la courbe.

3° Les coordonnées de l'extrémité d'un demi-diamètre s'expriment en fonction des coordonnées de l'extrémité du demi-diamètre conjugué par les formules

$$x' = \pm \frac{a}{b\sqrt{-1}} y', \quad y' = \mp \frac{b\sqrt{-1}}{a} x',$$

qui sont dues à M. Chasles (*Aperçu historique*, etc.).

4° *La différence des carrés des projections de deux demi-diamètres conjugués sur un axe est constante. La différence des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est constante, ainsi que l'aire du parallélogramme construit sur ces diamètres.*

La relation $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$ montre que, si a est différent de b, a' est différent de b'; *l'hyperbole n'a* donc *pas de diamètres conjugués égaux*.

Si $a = b$, on a $a' = b'$, c'est-à-dire que *tout diamètre est* alors *égal à son conjugué*, et l'hyperbole est dite *équilatère*. Le parallélogramme EE'F'F construit sur deux diamètres conjugués quelconques est dans ce cas un losange, et les asymptotes qui en sont les diagonales sont alors *rectangulaires*.

Nous avons vu (1148) que l'hyperbole rapportée à ses asymptotes a pour équation $xy = K^2$; en supposant que dans la *fig.* 589 les droites OA et OB soient les axes a et b de la courbe, le parallélogramme OAE'B' sera un rectangle, et les coordonnées OP' et P'A du sommet A par rapport aux asymptotes seront l'une et l'autre égales à la moitié de la diagonale $\sqrt{a^2 + b^2}$ de ce rectangle; on a donc

$$K^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

pour une hyperbole quelconque, et, en particulier pour l'hyperbole équilatère, $K^2 = \frac{1}{2} a^2$. On donne souvent à cette constante K^2, que nous venons d'exprimer en fonction des axes, le nom de *puissance de l'hyperbole*.

THÉORÈME.

1150. *Dans l'ellipse et dans l'hyperbole :*

1° *Deux diamètres conjugués quelconques interceptent sur une tangente fixe* ST *deux segments* CT *et* CS *dont le produit est constant.*

2° *Une tangente* TMT' *détermine sur deux tangentes fixes et parallèles deux segments* CT, C'T' *dont le produit est constant* (*fig.* 590).

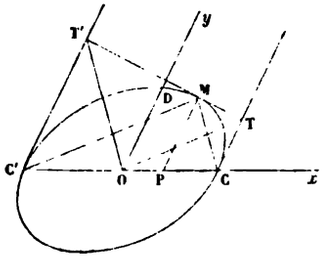
En effet :

1° Le faisceau involutif formé par les divers couples de diamètres conjugués détermine, sur la tangente fixe SCT, une involution. Le point de

contact C est le point central de cette involution, puisque son homologue est à l'infini, attendu que, lorsque S vient en C, T est sur le diamètre OD conjugué de OC, c'est-à-dire parallèle à CT. Le produit CT.CS est donc constant.

2° Les droites OT et OT' étant respectivement les diamètres des cordes parallèles à MC et à MC' sont deux diamètres conjugués, puisque ces cordes sont supplémentaires; d'ailleurs, S désignant le point où T'O

Fig. 590.



prolongée rencontre la tangente CT, les deux segments C'T' et CS, symétriques par rapport au centre, sont égaux et de signe contraire; on a donc

$$CT.C'T' = -CT.CS = \text{const.}$$

1151. Le faisceau involutif des diamètres conjugués n'a pas de rayons doubles dans l'ellipse, tandis qu'il a pour rayons doubles les asymptotes dans l'hyperbole. Donc *le produit*

$$CT.CS$$

est négatif dans l'ellipse et positif dans l'hyperbole. Quant à sa valeur absolue elle est, pour l'une et l'autre courbe, *égale au carré du demi-diamètre* OD *parallèle à la tangente* SCT. En effet, supposons que CT soit égal à OD; alors, dans l'ellipse (*fig.* 590), DT étant parallèle à OC, C'T' et son égal SC sont égaux à OD; dans l'hyperbole (*fig.* 586), T est alors en 0 sur l'asymptote, en vertu de la définition (1144) de la longueur du demi-diamètre non transverse OD, et comme c'est le point double de l'involution, S est aussi en 0 et par suite CT comme CS est égal à OD.

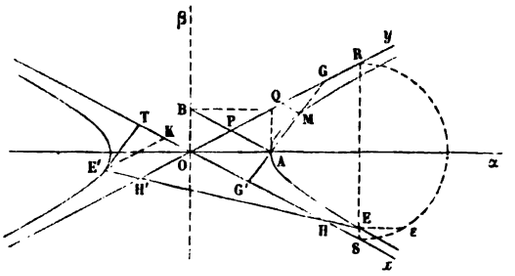
PROBLÈMES.

1152. Voici quelques problèmes usuels relatifs à l'ellipse et à l'hyperbole.

1° *Construire une hyperbole connaissant les asymptotes* Ox *et* Oy *et un point* E (*fig.* 591).

En menant par le point donné E une droite quelconque, prenant les points d'intersection H et H′ de cette droite avec les asymptotes, puis portant $H'E' = EH$, on aura un nouveau point E′ de la courbe (1148). La tangente E′T en ce point s'obtiendra en menant E′K parallèle à Oy, puis en prenant $KT = OK$ (1148). On obtiendra ainsi autant de points que l'on voudra de l'hyperbole et les tangentes en ces points.

Fig. 591.



Les axes seront dirigés suivant les bissectrices $O\alpha$ et $O\beta$ des angles des asymptotes. Le point E et par suite la courbe étant ici situés dans l'angle yOx des asymptotes et dans son opposé par le sommet, ce sera sur la bissectrice $O\alpha$ de l'angle yOx que sera l'axe transverse. En menant par E la parallèle à $O\beta$ jusqu'à ses rencontres R et S avec les asymptotes, et construisant la moyenne proportionnelle $E\varepsilon$ entre les segments RE, ES, on aura (1149) la demi-longueur b de l'axe non transverse; on portera cette longueur de O en B, sur $O\beta$; puis, en menant BA parallèle à Ox, on obtiendra sur $O\alpha$ le point A qui donnera la demi-longueur OA de l'axe transverse.

On pourrait, si l'on voulait, commencer par déterminer a en menant par E une parallèle à $O\alpha$.

2° *Construire les axes d'une hyperbole ou d'une ellipse connaissant en grandeur et position un système de diamètres conjugués.*

Pour l'hyperbole, il faut indiquer en outre quel est celui des deux demi-diamètres donnés qui est transverse; l'extrémité de ce demi-dia-

mètre est alors un point donné de la courbe, et, comme les diagonales du parallélogramme construit sur les diamètres conjugués donnés sont les asymptotes, on voit qu'on est ramené au problème précédent.

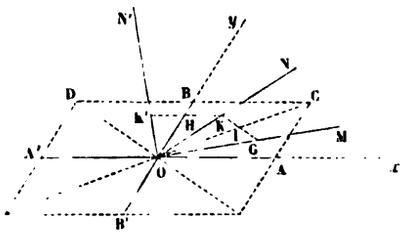
Pour l'ellipse, on déterminera par le procédé du n° 1119 le couple Ox, Oy de rayons homologues rectangulaires dans le faisceau involutif formé d'une part par le couple donné OC et OD de diamètres conjugués et d'autre part par le couple dirigé suivant les diagonales OE et OI du parallélogramme construit sur le premier couple. Puis, pour avoir, par exemple, la longueur de l'axe dirigé suivant Ox, on observera que la projection P de E sur Ox est le pied de la polaire du point T où le côté DE, c'est-à-dire la tangente en E, coupe Ox, en sorte que la longueur cherchée sera la moyenne proportionnelle entre OP et OT.

Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer cette construction; nous avons déjà donné (1071) une autre solution du même problème.

3° *Trouver le diamètre conjugué d'un diamètre donné* OM, *connaissant en grandeur et en position un premier couple de diamètres conjugués* AA', BB' (*fig.* 592).

La solution est très-simple pour l'hyperbole. En menant les diago-

Fig. 592.



nales du parallélogramme construit sur les deux diamètres AA' et BB', on a les asymptotes OC et OD. Or, le diamètre cherché ON est le conjugué harmonique du diamètre donné OM par rapport à l'angle COD des asymptotes; on aura donc un point K de ce diamètre ON, en menant une parallèle à OD, et en portant sur cette ligne, à partir du point I où elle coupe OC, un segment IK égal et opposé au segment IG intercepté dans l'angle COM.

Pour l'ellipse, on opère de même. Seulement, après avoir trouvé le point K, on mène par ce point une parallèle à OA, jusqu'à sa rencontre H avec OB, et l'on prolonge KH d'une quantité égale HK'.

OK′ sera le diamètre conjugué de OM. En effet, prenons pour axes coordonnés les droites OA et OB, et soient x et y les coordonnées d'un point quelconque de OM, x_1 et y_1 les coordonnées du point K, x' et y' les coordonnées du point K′. Puisque OK est le conjugué de OM dans l'hyperbole qui a pour diamètres conjugués

$$OA = a'$$

et

$$OB = b',$$

on a la relation

$$\frac{y_1}{x_1}\frac{y}{x} = \frac{b'^2}{a'^2},$$

qui, à cause des égalités évidentes

$$y' = y_1, \quad x' = -x_1,$$

devient

$$\frac{y'}{x'}\frac{y}{x} = -\frac{b'^2}{a'^2};$$

OK′ et OM sont donc conjugués par rapport à l'ellipse ayant OA et OB pour diamètres conjugués.

PROBLÈME.

1153. *Construire dans l'ellipse ou dans l'hyperbole un couple de diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné.*

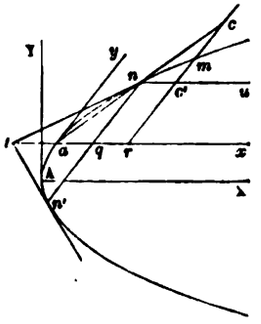
A l'aide d'un cercle C passant par le centre O et conformément aux prescriptions du n° 1119, on construira le point ω relatif au faisceau involutif formé par les divers couples de diamètres conjugués; il suffira pour cela de connaître deux premiers couples, par exemple les deux asymptotes dans l'hyperbole, et dans l'ellipse les axes et les diagonales de leur rectangle. Il restera à mener par ω une sécante détachant dans le cercle une corde pq qui soit vue du point ω sous l'angle donné θ; Op et Oq formeront alors le couple cherché. Or le tracé de la sécante en question revient à inscrire dans C un triangle ayant l'un de ses angles égal à θ, puis à mener par le point ω une tangente à un cercle concentrique au cercle C et tangent au côté du triangle qui est opposé à l'angle θ.

Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer les constructions et de

faire la discussion qui est facile et intéressante et qui montre une fois de plus l'utilité de l'involution.

1154. La *parabole* étant tangente à la droite de l'infini, son centre, qui est le pôle ou le point de contact de cette tangente, disparaît à l'infini. Donc, *tous les diamètres ax, nu*, AX, ..., *sont parallèles*, et *cette courbe n'a qu'un axe* AX à distance finie. Le point A, où cet axe rencontre la courbe, est le *sommet* (*fig.* 593) de la parabole.

Fig. 593.



Une tangente mobile détermine sur deux tangentes fixes d'une conique deux divisions homographiques (1130); dans la parabole, ces deux divisions homographiques sont semblables (1102), puisque, la droite de l'infini étant une des positions de la tangente mobile, les points à l'infini dans les deux divisions sont homologues. Donc, *toutes les tangentes à la parabole divisent deux tangentes fixes en parties proportionnelles*; et réciproquement, *si deux droites fixes sont divisées en parties proportionnelles, l'enveloppe des droites qui joignent les points homologues est une parabole tangente aux deux droites fixes*. Cette propriété est très-utile dans les applications.

Prenons pour axes de coordonnées un diamètre quelconque ax et la tangente ay à son extrémité a; m et n étant deux points quelconques de la parabole, menons les ordonnées mr et nq, la droite an et le diamètre nu qui coupent respectivement mr en c et en c'. On a (1147)

$$\overline{mr}^2 = rc.rc';$$

mais

$$rc' = nq, \quad \text{et} \quad \frac{rc}{ar} = \frac{nq}{aq}.$$

Donc

$$\frac{rc \cdot rc'}{ar} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{mr}^2}{ar} = \frac{\overline{nq}^2}{aq}.$$

En d'autres termes, l'expression $\frac{y^2}{x}$ est constante; en la désignant par $2p$, l'équation de la parabole rapportée aux axes de coordonnées ax et ay est

$$y^2 = 2px.$$

La valeur de p varie avec la position du point a de la courbe, que l'on prend pour origine. Au sommet A, les axes deviennent rectangulaires, et la valeur correspondante de la constante p est ce qu'on appelle le *paramètre* de la parabole.

Soit nt la tangente en n qui coupe ax en t; nq est la polaire du point t (1136); par suite, les quatre points t, a, q, ∞, forment un système harmonique; on a donc $at = -aq$, d'où $tq = 2aq$. Ainsi, *dans la parabole, la sous-tangente* (c'est-à-dire la portion tq du diamètre ax comprise entre les pieds de l'ordonnée et de la tangente) *est double de l'abscisse du point de contact.*

FOYERS ET DIRECTRICES.

1155. On nomme *foyer* tout point du plan d'une conique autour duquel chaque droite est perpendiculaire à sa conjuguée.

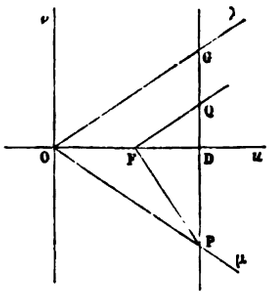
Un foyer ne peut se trouver que sur un axe; car, pour tout autre point du plan, le diamètre qui passe par ce point et la parallèle au conjugué de ce diamètre forment un couple de droites conjuguées non rectangulaires.

Pour prouver qu'un point F d'un axe est un foyer, il suffit de démontrer qu'on peut mener par ce point F un couple de deux droites conjuguées rectangulaires et non parallèles aux axes; car l'axe proposé et la parallèle à l'autre axe menée par le point F formeront un second couple de droites conjuguées rectangulaires, et l'on sait (1119) qu'autour d'un point tous les couples de droites conjuguées sont rectangulaires dès que deux couples le sont.

Cela posé, considérons l'*ellipse*. — Soient O, le centre; Ou et Ov, les directions des deux axes dont nous désignerons les demi-longueurs par α et β; $O\lambda$ et $O\mu$, les directions des diagonales du rectangle construit sur les axes; F, un point quelconque de l'axe Ou, et GDP, la polaire du point F par rapport à l'ellipse (*fig.* 594). Menons FQ parallèle à $O\lambda$. Le pôle de FQ sera sur la polaire GD de F et sur la polaire du point à l'infini de FQ ou de $O\lambda$, c'est-à-dire sur le diamètre $O\mu$ conjugué de $O\lambda$:

ce sera donc le point P commun à GD et à Oμ, de sorte que FP sera

Fig. 594.



la conjuguée de FQ. Donc, pour que F soit un foyer, il faut et il suffit que l'angle QFP soit droit, c'est-à-dire qu'on ait

$$\overline{FD}^2 = PD.DQ = DG.DQ.$$

Mais on a

$$\frac{DQ}{FD} = \frac{DG}{OD} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{d'où} \quad \frac{DG.DQ}{FD.OD} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

On en déduit, par division,

$$\frac{FD}{OD} = \frac{\beta^2}{\alpha^2},$$

d'où

$$\frac{OF}{OD} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}. \tag{1}$$

D'ailleurs, puisque GP est la polaire de F, on a

$$OF.OD = \alpha^2. \tag{2}$$

En multipliant (1) et (2), on obtient

$$\overline{OF}^2 = \alpha^2 - \beta^2, \quad \text{d'où} \quad OF = \pm\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}.$$

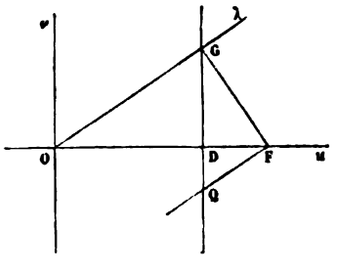
Il y a donc sur Ou deux foyers qui sont réels ou imaginaires, suivant que α est supérieur ou inférieur à β. Ainsi, l'ellipse a deux foyers réels sur le grand axe et deux foyers imaginaires sur le petit axe; et, si l'on désigne par a, b, c, le demi-grand axe, le demi-petit axe et la demi-distance focale OF, on a

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Considérons maintenant l'*hyperbole*. — Soient O le centre; Ou et Ov

les directions des deux axes dont nous désignerons les demi-longueurs (1149) par α et β; $O\lambda$ une asymptote; F un point quelconque de l'axe Ou, et GD la polaire du point F par rapport à l'hyperbole (*fig.* 595). Menons FQ parallèle à $O\lambda$; le pôle de FQ sera sur la polaire GD de F et

Fig. 595.



sur la polaire du point à l'infini de FQ ou de $O\lambda$, c'est-à-dire sur $O\lambda$ puisqu'une asymptote est sa propre conjuguée; ce sera donc le point G commun à $O\lambda$ et à GD, de sorte que FG sera la conjuguée de FQ. Donc, pour que le point F soit un foyer, il faut et il suffit que l'angle GFQ soit droit, c'est-à-dire qu'on ait

$$\overline{DF}^2 = DG.QD.$$

Mais on a

$$\frac{QD}{DF} = \frac{DG}{OD} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

On en déduit, comme ci-dessus,

$$\frac{DF}{OD} = \frac{\beta^2}{\alpha^2},$$

d'où

$$\frac{OF}{OD} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}. \qquad (1)$$

D'ailleurs, puisque GD est la polaire de F, on a

$$OD.OF = \pm\alpha^2, \qquad (2)$$

le signe convenable étant + si Ou est l'axe transverse, et — si Ou est l'axe non transverse. En multipliant (1) et (2), on obtient

$$\overline{OF}^2 = \pm(\alpha^2+\beta^2) \quad \text{d'où} \quad OF = \pm\sqrt{\pm(\alpha^2+\beta^2)}.$$

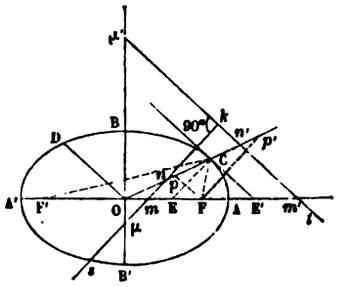
Ainsi, l'hyperbole a deux foyers réels sur l'axe transverse et deux

foyers imaginaires sur l'axe non transverse. En désignant respectivement par a, b, c, le demi-axe transverse, le demi-axe non transverse et la demi-distance focale OF, on a

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

1156. Dans le plan d'une conique à centre, considérons deux droites conjuguées rectangulaires quelconques ks et kt (*fig.* 596).

Fig. 596.



Soient n et n' les points où ces deux droites rencontrent le diamètre OC relatif aux cordes parallèles à kt, m et m' les points où elles coupent l'un des axes de la conique, et enfin F et F' les foyers situés sur cet axe. En menant par F des parallèles à ks et à kt jusqu'à leurs rencontres p et p' avec le diamètre OC, on a

$$\frac{Om'}{On'} = \frac{OF}{Op'}, \quad \frac{Om}{On} = \frac{OF}{Op'},$$

d'où, en multipliant,

$$\frac{Om \cdot Om'}{On \cdot On'} = \frac{\overline{OF}^2}{Op \cdot Op'}.$$

Or les dénominateurs sont égaux l'un et l'autre à $\overline{OC}^2$, puisque n et n' sont conjugués par rapport à la conique aussi bien que p et p'. Les numérateurs doivent donc être égaux, et l'on a

$$(1) \qquad Om \cdot Om' = c^2.$$

Donc *le segment compris entre les deux foyers situés sur un même axe est divisé harmoniquement par tout couple de droites conjuguées rectangulaires*, ou, en d'autres termes, *les divers couples de droites conjuguées rectangulaires déterminent sur chacun des axes de la conique une involution dont le point central est le centre de la conique, et dont les points doubles sont les foyers réels ou imaginaires appartenant à cet axe.*

1137. Quand nous parlerons désormais des deux foyers d'une conique, il s'agira, à moins d'avertissement contraire, des deux foyers réels.

Les deux droites conjuguées rectangulaires qui passent par un point quelconque du plan d'une conique sont les bissectrices des angles formés par les droites qui unissent ce point aux deux foyers. Car ces quatre droites, divisant harmoniquement l'axe focal, forment un faisceau harmonique, et, comme les deux premières sont rectangulaires, elles sont les bissectrices des angles formés par les deux autres.

En particulier, si le point considéré appartient à la conique, les deux droites conjuguées rectangulaires qui passent par ce point sont la tangente et la normale. Donc, *dans toute conique à centre, la tangente et la normale sont les bissectrices des angles que forment les deux rayons vecteurs menés de ce point aux deux foyers.*

Dans l'ellipse comme dans l'hyperbole, les deux foyers réels sont à l'intérieur de la courbe; cela résulte des formules du n° 1135. Quant au centre, on sait qu'il est intérieur pour l'ellipse et extérieur pour l'hyperbole. — Il suit de là que, si M est un point de la conique, et si F et F′ sont ses foyers, le triangle MFF′ est intérieur à l'ellipse, tandis que pour l'hyperbole il est en partie intérieur et en partie extérieur. Donc, si, partant du point M, on veut, en se déplaçant un peu sur les droites MF et MF′, rester à l'intérieur de la courbe, il faudra se déplacer, pour l'ellipse, dans le sens de MF et de MF′, et, pour l'hyperbole, dans le sens de l'une de ces droites et dans le sens opposé à l'autre.

Comme, dans tous les cas, la tangente en M est extérieure à la courbe, on voit que dans l'ellipse la tangente est en dehors de l'angle FMF′ des deux rayons vecteurs, tandis que dans l'hyperbole la tangente est extérieure à l'angle formé par l'un des rayons vecteurs et par le prolongement de l'autre; en d'autres termes, la bissectrice de l'angle FMF′ est dans l'ellipse la normale en M, et dans l'hyperbole la tangente au même point.

1138. La polaire d'un foyer prend le nom de *directrice*.

L'ellipse et l'hyperbole ont donc chacune deux directrices DHD$_1$, D′H′D′$_1$ (*fig.* 597), qui sont perpendiculaires à l'axe A′OA qui contient les foyers réels; elles sont situées de part et d'autre et à égale distance du centre, extérieurement à la courbe, puisque les foyers réels qui en sont les pôles sont intérieurs (1138). Les points A′, F, A, H, formant un système harmonique, on a

$$\overline{OA}^2 = OF.OH,$$

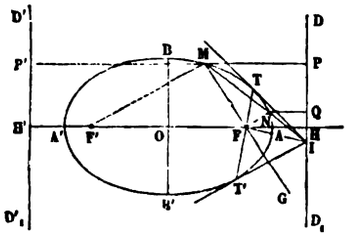
d'où l'on déduit

$$OH = \frac{a^2}{c}$$

pour la distance du centre aux directrices.

De la définition même du foyer et de la directrice, il résulte que *la polaire* TT' *d'un point quelconque* I *de la directrice* DD_1 *passe par le*

Fig. 597.



foyer F *et est perpendiculaire sur la droite qui joint le point* I *au foyer.* Par suite, *si l'on prolonge une corde quelconque* MN *d'une ellipse ou d'une hyperbole jusqu'à sa rencontre en* I *avec la directrice, la droite* IF *et la polaire* FT *du point* I *sont les bissectrices des angles formés par les rayons vecteurs* FM *et* FN; car, d'après la définition même de la polaire, le faisceau (FI, FN, FT, FM) est harmonique, et nous venons de voir que les deux rayons FT et FI sont rectangulaires.

Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, le rapport des distances MF *et* MP *d'un point quelconque* M *de la courbe au foyer* F *et à la directrice correspondante* DD_1 *est constant.* Car, si N est un autre point quelconque de la courbe, et I le point où la corde MN rencontre la directrice, la droite FI est bissectrice de l'angle NFG; on a donc

$$\frac{MF}{NF} = \frac{MI}{NI} \quad \text{ou} \quad \frac{MP}{NQ}.$$

Pour trouver la valeur constante du rapport $\frac{MF}{MP}$, il suffit de considérer le point B; sa distance au foyer est égale à a, et sa distance à la directrice est $OH = \frac{a^2}{c}$: le quotient est $\frac{c}{a}$; on le désigne habituellement par e, et on lui donne le nom d'*excentricité*; il est *moindre que un* pour l'ellipse et *plus grand que un* pour l'hyperbole.

1159. *Dans l'ellipse la somme, et dans l'hyperbole la différence des rayons vecteurs* MF *et* MF', *qui joignent un point quelconque* M *de la courbe aux deux foyers, est constante.*

Car, des relations

$$\frac{MF}{MP} = \frac{c}{a}, \quad \frac{MF'}{MP'} = \frac{c}{a},$$

on déduit

$$(1)\qquad \frac{MF + MF'}{MP + MP'} = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad \frac{MF - MF'}{MP - MP'} = \frac{c}{a}.$$

Or, dans l'ellipse, $MP + MP' = HH' = 2\frac{a^2}{c}$; donc, en vertu de la première des égalités (1),

$$MF + MF' = 2a.$$

Dans l'hyperbole, $MP - MP' = HH' = 2\frac{a^2}{c}$; donc, en vertu de la seconde des égalités (1),

$$MF - MF' = 2a.$$

On retombe ainsi sur les définitions élémentaires de ces courbes, et l'on peut dès lors regarder comme acquises les propriétés et les constructions établies aux §§ I, II, IV du Livre VIII.

1160. Considérons maintenant la parabole.

Le centre, qui est le point central de l'involution tracée sur l'axe AX (*fig.* 593) par les pieds des divers couples de droites conjuguées rectangulaires, étant à l'infini, l'involution a l'un de ces points doubles à l'infini, et l'autre point double est le *foyer* unique de la parabole. *Il divise en deux parties égales* (1114) *le segment intercepté sur le grand axe* par deux droites conjuguées rectangulaires quelconques, et en particulier *par la tangente et la normale en un point quelconque de la parabole*; d'où l'on conclut (339) que *la tangente et la normale en un point quelconque de la parabole sont les bissectrices des angles formés par la parallèle à l'axe menée par ce point et le rayon vecteur mené de ce point au foyer.*

La *directrice* ou polaire du foyer est perpendiculaire à l'axe, et extérieure à la courbe, puisque son pôle est intérieur comme doit l'être tout foyer réel (1135). Le foyer et la directrice sont d'ailleurs à égale distance du sommet (1138).

On voit, comme au numéro précédent, que : 1° *la polaire d'un point quelconque de la directrice est perpendiculaire sur la droite qui joint ce point au foyer*; 2° *la droite qui joint le foyer à l'intersection de la directrice et d'une corde quelconque de la parabole est la bissectrice du supplément de l'angle formé par les rayons vecteurs des points où la corde coupe la parabole.*

On en déduit que *le rapport des distances d'un point quelconque de la parabole au foyer et à la directrice est constant*; comme le sommet est équidistant du foyer et de la directrice, la constante est *égale à un*; donc *tout point de la parabole est équidistant du foyer et de la directrice.* On

retombe ainsi sur la définition de la parabole donnée au n° 1027, et nous pouvons alors regarder comme acquises toutes les propriétés et toutes les constructions données dans les §§ III et V. En particulier, le *paramètre p* représente la distance du foyer à la directrice; il est aussi égal à la *sous-normale comptée sur l'axe*, c'est-à-dire à la partie de l'axe comprise entre les pieds de l'ordonnée et de la normale. (Il importe de remarquer que, lorsque la parabole est rapportée à un diamètre quelconque et à la tangente correspondante, la sous-tangente est toujours double de l'abscisse, mais la sous-normale n'est plus constante et égale au paramètre; cette dernière propriété n'est vraie que dans le cas où la parabole est rapportée à son axe et à la tangente au sommet.)

1161. Lorsque plusieurs coniques ont les deux mêmes foyers, on dit qu'elles sont *confocales*.

Deux coniques confocales ont le même centre, et leurs axes sont dirigés suivant les mêmes droites; elles ont aussi les mêmes systèmes de droites conjuguées rectangulaires (1155).

Deux ellipses, deux hyperboles, une ellipse et une hyperbole peuvent être confocales; mais une parabole ne peut être confocale que d'une parabole.

Si par un point on mène deux tangentes a une conique et deux tangentes à une conique confocale, les angles des deux premières tangentes et les angles des deux autres ont les deux mêmes bissectrices.

Par un point P *du plan d'une conique, on peut mener deux coniques confocales avec la première;* ce sont une ellipse et une hyperbole si la conique primitive est une ellipse ou une hyperbole; ce sont deux paraboles de sens opposés si la première conique est une parabole. — *Ces deux coniques se coupent orthogonalement,* car leurs tangentes au point P sont les bissectrices des angles que forment les droites menées de ce point P aux deux foyers de la conique primitive.

1162. Les foyers jouissent de propriétés caractéristiques autres que celle qui nous a servi à les définir, et qui méritent d'être rapportées, non-seulement parce qu'elles sont très-utiles dans les recherches géométriques, mais encore parce qu'elles permettent de généraliser l'idée de foyer et d'étendre cette conception aux courbes d'ordre quelconque.

1° Considérons une conique quelconque C, intersection d'un cône de révolution par un plan P et une sphère inscrite dans ce cône. Soient Q le plan du cercle de contact de la sphère et du cône, γ le cercle intersection de la sphère et du plan P, et D la droite commune aux plans P et Q. — D'abord, il est aisé de voir que le cercle γ passe par les points I et I′ (réels ou imaginaires) où la droite D rencontre la conique C; en effet, les points I et I′ appartiennent d'une part au plan P, et, d'autre

part, à la sphère, puisque, faisant partie à la fois du cône et du plan Q, ils sont sur le cercle de contact du cône et de la sphère. — En second lieu, la conique C et le cercle γ se touchent en I et en I'; en effet, la tangente en I à la conique est l'intersection du plan P et du plan tangent au cône; la tangente au cercle γ est l'intersection du plan P et du plan tangent en I à la sphère; or, le point I étant sur le cercle de contact du cône et de la sphère, les deux plans tangents en question coïncident.

En résumé, le cercle γ a un double contact (réel ou imaginaire) avec la conique C, et la droite des contacts est la droite D. — Faisons maintenant varier la sphère inscrite jusqu'à ce qu'elle touche le plan P: le rayon du cercle deviendra nul, ce cercle se réduira à un point qui est (1086) un foyer, et la droite D deviendra la directrice relative à ce foyer. On est ainsi conduit à regarder le *foyer d'une conique comme un cercle de rayon nul doublement tangent à la conique; la corde des contacts est la directrice relative à ce foyer.*

2° On sait (1111) que, si l'on a dans un même plan des angles d'une même grandeur et placés d'une manière quelconque, pourvu qu'ils soient formés dans le même sens de rotation, leurs côtés tracent sur la droite à l'infini deux divisions homographiques dont les points doubles sont, quelle que soit la grandeur commune de ces angles, les points cycliques du plan. Si les angles sont droits, les deux divisions homographiques forment une involution; donc, *les points cycliques d'un plan divisent harmoniquement le segment intercepté sur la droite à l'infini par un angle droit situé d'une manière quelconque dans ce plan.*

Cela posé, considérons plusieurs couples de droites conjuguées issues d'un même point du plan d'une conique; ces divers couples forment (1138) un faisceau involutif dont les rayons doubles sont les tangentes réelles ou imaginaires menées à la conique par le point considéré. Si ce point est un foyer, tous les couples de droites conjuguées sont rectangulaires, et, par suite, d'après l'alinéa précédent, les rayons doubles du faisceau, c'est-à-dire les tangentes imaginaires menées à la conique par le foyer, passent par les points cycliques du plan. Ainsi, on peut considérer *les foyers comme des points tels que les tangentes à la conique menées par ces points passent par les points cycliques du plan.*

Des deux points cycliques on peut mener à la conique deux couples de tangentes, dont l'ensemble forme un quadrilatère imaginaire circonscrit à la courbe; les deux diagonales de ce quadrilatère sont les axes, et ses quatre sommets, dont deux réels et deux imaginaires, sont les foyers. La parabole étant tangente à la droite de l'infini, un foyer réel est à l'infini, les deux foyers imaginaires sont les points cycliques, et il ne reste plus qu'un foyer réel à distance finie.

Il résulte de là : 1° que *deux coniques qui ont un foyer commun ont*

deux tangentes communes passant par ce foyer; ce sont les droites qui vont de ce foyer aux points cycliques du plan; les cordes de contact sont les directrices de l'une et de l'autre conique relatives à ce foyer; 2° que *deux coniques confocales*, c'est-à-dire qui ont deux foyers communs, *sont inscrites dans le même quadrilatère imaginaire.*

Cette notion très-féconde des foyers considérés comme des points tels que les tangentes correspondantes passent par les points cycliques du plan est due au géomètre Plücker (*Journal de Crelle*, t. X), qui a ainsi pu étendre l'idée de foyer aux courbes algébriques d'ordre quelconque : *on appelle foyers d'une courbe plane d'ordre quelconque les points communs aux tangentes menées à la courbe par les points cycliques de son plan.*

1163. Voici quelques formules utiles :

1° Considérons une *ellipse* rapportée à son centre O et à ses axes $OA = a$ et $OB = b$ (*fig.* 598) : M étant un quelconque de ses points, soient x et y ses coordonnées OP et MP, ρ et ρ' les deux rayons vecteurs MF et MF', et b' la longueur du demi-diamètre conjugué de OM. Menons la tangente TMT' et la normale MNN', la perpendiculaire MD sur la directrice, et les perpendiculaires OE, FK, F'K', abaissées du centre et des foyers sur la tangente.

On a

$$(1)\qquad \rho = a - ex, \qquad \rho' = a + ex, \qquad b'^2 = a^2 - e^2x^2 = \rho\rho',$$

$$(2)\qquad \mathrm{OT} = \frac{a^2}{x}, \qquad \mathrm{OT'} = \frac{b^2}{y}, \qquad \mathrm{PM} = \frac{a^2 - x^2}{x},$$

$$(3)\qquad \mathrm{ON} = \frac{e^2}{a^2}x, \qquad \mathrm{ON'} = -\frac{e^2}{b^2}y, \qquad \mathrm{PN} = \frac{b^2}{a^2}x,$$

$$(4)\qquad \mathrm{MN} = \frac{b}{a}\sqrt{\rho\rho'} = \frac{bb'}{a}, \quad \mathrm{MN'} = \frac{a}{b}\sqrt{\rho\rho'} = \frac{ab'}{b}, \quad \mathrm{MN}.\mathrm{MN'} = b'^2,$$

$$(5)\qquad \mathrm{FK} = b\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}} = \frac{bb'}{\rho'}, \quad \mathrm{F'K'} = b\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}} = \frac{bb'}{\rho}, \qquad \mathrm{OE} = \frac{ab}{b'}.$$

La première des formules (1) résulte de la relation

$$\mathrm{FM} = e.\mathrm{MD} = e(\mathrm{OH} - \mathrm{OP}).$$

La troisième des formules (1) s'obtient en faisant la somme des carrés des valeurs (8) du n° 1141, et en ayant égard à la position du point M sur l'ellipse. — Les formules (2) sont une conséquence de la théorie des pôles et polaires. — La première formule (3) résulte de la théorie des foyers, et la seconde de la similitude des triangles ONN', NPM. — On obtient la première formule (4) en appliquant la formule du n° 238, et la seconde résulte de la similitude des triangles ONN', NPM. — Enfin, les deux premières formules (5) s'obtiennent à l'aide du théorème du

n° 995 et de la similitude des triangles FMK, F'M K', qui donne le rapport de FK à F'K'; la troisième s'en déduit en prenant la demi-somme.

2° En changeant b^2 en $-b^2$, on a des formules analogues pour l'*hyperbole*.

Fig. 598.

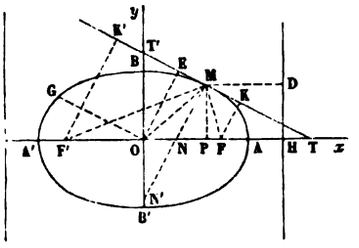
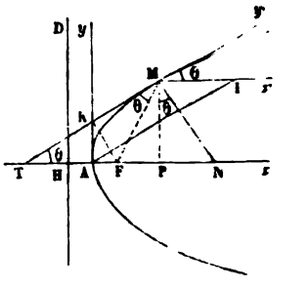


Fig. 599.



3° Considérons une *parabole* rapportée à son axe Ax et à la tangente Ay au sommet (*fig.* 599). M étant un quelconque de ses points, soient x et y ses coordonnées AP et MP, ρ le rayon vecteur MF, p le paramètre FH $= 2$AF, et θ l'inclinaison de la tangente MT sur l'axe. Menons la normale MN, et abaissons la perpendiculaire FK du foyer sur la tangente MT.

On a

$$TP = 2x, \quad PN = p, \quad TN = p + x, \quad \rho = FT = \frac{1}{2}TN = \frac{p}{2} + x.$$

Le triangle rectangle FTK donne ensuite

$$\overline{TK}^2 = TF.TA = \rho x, \quad \overline{KF}^2 = FT.AF = \frac{p}{2}\rho,$$

d'où

$$\overline{MT}^2 = 2\rho x. \quad \overline{MN}^2 = p\rho.$$

Enfin, dans le triangle rectangle TMN, on a

$$\tang\theta = \frac{PN}{PM} = \frac{p}{y}, \quad \sin^2\theta = \frac{\overline{PN}^2}{\overline{MN}^2} = \frac{p^2}{p\rho} = \frac{p}{\rho}.$$

Nous avons vu que la parabole rapportée à un diamètre quelconque Mx' et à la tangente correspondante My' avait pour équation $y'^2 = 2p'x'$. Pour évaluer p', menons AI parallèle à MT, de manière à figurer les coordonnées $x' =$ MI, $y' = -$ AI du sommet A par rapport aux axes y'Mx'; nous aurons alors

$$p' = \frac{y'^2}{2x'} = \frac{\overline{MT}^2}{2AT} = \frac{\overline{MT}^2}{TP} = \frac{2\rho x}{x} = 2\rho,$$

ou encore, d'après ce qui précède,

$$p' = \mathrm{TN}, \quad p' = p + 2x, \quad p' = \frac{p}{\sin^2\theta}.$$

Remarquons que le paramètre p de la parabole, exprimant la distance du foyer à la directrice, est égal à l'ordonnée du foyer. On donne également le nom de *paramètre*, dans l'ellipse et dans l'hyperbole, à l'ordonnée du foyer; pour avoir sa valeur en fonction des axes a et b, il suffit de multiplier par e ou $\frac{c}{a}$ la distance $\frac{a^2}{c} - c$ du foyer à la directrice, ce qui donne $\frac{b^2}{a}$.

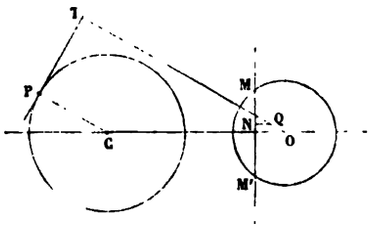
COMPLÉMENT DE LA MÉTHODE DES POLAIRES RÉCIPROQUES.

1161. Nous nous proposons, dans ce paragraphe, de compléter et de généraliser la théorie que nous avons exposée aux n°s 348 et suivants.

Nous nommerons *origine* le centre O du cercle auxiliaire par rapport auquel on prend les pôles et les polaires, et nous désignerons par R son rayon.

La polaire réciproque d'un cercle C *situé d'une manière quelconque par rapport au cercle auxiliaire* O *est une conique qui a pour foyer l'origine* O *et pour directrice la polaire* MM' *du centre* C *du cercle proposé par rapport au cercle auxiliaire* (*fig.* 600).

Fig. 600.



En effet, désignons par ρ le rayon du cercle proposé C et par δ la distance OC de son centre à l'origine. TP étant une tangente quelconque du cercle C et Q son pôle par rapport au cercle O, on a (351, 2°), en désignant par QN la distance du point Q à la droite MM',

$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{QN}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CP}} = \frac{\delta}{\rho}.$$

Le rapport des distances du point variable Q au point fixe O et à la droite fixe MM' est donc constant.

L'excentricité $\frac{\delta}{\rho}$ de la conique obtenue est inférieure, supérieure ou égale à un, suivant que δ est inférieur, supérieur ou égal à ρ. Donc, *la conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'origine* O *est intérieure, extérieure au cercle proposé* C *ou située sur la circonférence de ce cercle.*

Cette proposition, combinée avec le principe du n° 350, permet de déduire de toute propriété du cercle une propriété focale des coniques.

Comme exemple, transformons la propriété de l'angle inscrit : *L'angle* MAB, *formé en joignant un point variable d'une circonférence de cercle à deux points fixes de cette circonférence, est constant et égal à la moitié de l'angle au centre* ACB *correspondant.* Au cercle, répondra une conique ayant pour foyer l'origine O et pour directrice la polaire γ du point C par rapport au cercle auxiliaire O ; aux points A, B, M, répondront deux tangentes fixes α et 6, et une tangente variable μ de la conique. Les points d'intersection de μ et α, de μ et 6, de γ et α, de γ et 6, seront respectivement les pôles des droites MA, MB, CA, CB, et par suite, en vertu du principe du n° 350, on aura ce théorème : *L'angle sous lequel on voit du foyer* O *d'une conique la portion d'une tangente mobile* μ *comprise entre deux tangentes fixes* α *et* 6, *est constant et égal à la moitié de l'angle sous lequel on voit du foyer la portion de la directrice* γ *comprise entre les deux tangentes fixes* α *et* β.

Voici d'autres exemples :

Deux tangentes d'un cercle sont également inclinées sur la corde des contacts.

Le lieu du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à un cercle est un cercle concentrique, et la corde des contacts enveloppe un cercle aussi concentrique.

Si une corde d'un cercle est vue sous un angle constant d'un point

La droite qui joint le foyer d'une conique à l'intersection de deux tangentes divise en deux parties égales l'angle sous lequel on voit du foyer la corde des contacts.

Si une corde d'une section conique est vue du foyer sous un angle constant, cette corde enveloppe une section conique ayant même foyer et même directrice que la proposée; le point de concours des tangentes aux extrémités de cette corde décrit une section conique ayant aussi même foyer et même directrice que la proposée.

Le lieu du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à la

fixe A *de la circonférence, cette corde enveloppe un cercle concentrique.*

Les projections d'un point A *d'une circonférence de cercle sur les côtés d'un triangle inscrit quelconque sont en ligne droite.*

parabole est une conique ayant le même foyer et la même directrice.

Si, par les sommets d'un triangle circonscrit à une parabole, on élève des perpendiculaires sur les droites qui joignent ces sommets au foyer F, *les trois perpendiculaires concourent en un même point* I.

Dans les deux derniers exemples, on a pris pour origine le point A ; et, comme ce point est sur la circonférence, la transformée de cette circonférence est une parabole. Observons, en outre, qu'en vertu du dernier théorème obtenu, si l'on décrit un cercle sur FI comme diamètre, ce cercle passera par les sommets du triangle circonscrit ; de là cette proposition : *Le lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites fixes est le cercle circonscrit au triangle formé par ces trois droites.*

1165. *La polaire réciproque d'une conique* C *par rapport à un cercle auxiliaire* O *est une conique* C'.

En effet, la conique C peut être considérée (1130) comme l'enveloppe des droites mm' qui joignent les points homologues m et m' de deux divisions homographiques tracées sur deux tangentes fixes L et L'. Or, soient λ, λ', μ, les pôles des tangentes fixes L et L' et de la tangente mobile mm' ; les droites $\lambda\mu$, $\lambda'\mu$, décriront deux faisceaux homographiques. Car les droites issues de λ répondant anharmoniquement aux points de la division L, et les droites issues de λ' aux points de la division L' (1108), quatre droites quelconques issues de λ auront même rapport anharmonique que les quatre droites homologues issues de λ', attendu que quatre points quelconques de la division L ont même rapport anharmonique que les quatre points homologues de L'. Donc le lieu des points μ est une conique qui passe par les points λ et λ' (1131, 2°).

A chaque propriété des coniques en répondra dès lors une autre par la méthode des polaires réciproques.

Voici des exemples :

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une ellipse ou à une hyperbole est un cercle.

Le lieu des projections d'un foyer

L'enveloppe des cordes d'une conique, qui sont vues sous un angle droit d'un point fixe du plan de la conique, est une autre conique dont ce point fixe est le foyer.

Si par chaque point d'un cercle

sur les tangentes d'une ellipse ou d'une hyperbole est un cercle.

on élève une perpendiculaire sur la droite qui joint ce point à un point fixe, l'enveloppe de ces perpendiculaires est une conique dont ce point fixe est le foyer.

1166. Reportons-nous au théorème du n° 353. Si, sans rien changer au raisonnement, on avait pris pour *origine* de la transformation un point quelconque au lieu du centre du cercle circonscrit au quadrilatère, on aurait obtenu pour théorème corrélatif :

Dans tout quadrilatère circonscrit à une conique, le produit des distances de deux sommets opposés à une tangente quelconque est dans un rapport constant avec le produit des distances des deux autres sommets à la même tangente.

Cette dernière proposition, transformée à son tour par la méthode des polaires réciproques, donne alors :

Dans tout quadrilatère inscrit à une conique, le produit des distances d'un point quelconque de la conique à deux côtés opposés est dans un rapport constant avec le produit des distances du même point aux deux autres côtés.

Ce théorème est attribué à Pappus. On doit remarquer la manière dont nous l'avons obtenu et qui consiste dans une double application de la méthode des polaires réciproques.

Les explications données au n° 353 permettront au lecteur de voir lui-même comment ces théorèmes peuvent se généraliser et s'étendre à des polygones. Nous appellerons ici, au contraire, l'attention sur un cas particulier. Lorsque deux côtés opposés du quadrilatère inscrit deviennent tangents à la conique, les deux autres se confondent avec la corde de contact, et le théorème de Pappus devient le suivant : *Le produit des distances d'un point quelconque d'une conique aux deux côtés d'un angle circonscrit est dans un rapport constant avec le carré de la distance du même point à la corde de contact.* Le théorème corrélatif s'énonce : *Le produit des distances de deux points fixes d'une conique à une tangente variable est dans un rapport constant avec le carré de la distance de l'intersection des tangentes aux deux points fixes à la même tangente variable ;* il résulte immédiatement de la propriété des quadrilatères circonscrits, lorsque l'on suppose que deux côtés adjacents du quadrilatère viennent se confondre avec les deux autres.

1167. On peut généraliser toute cette théorie en substituant au cercle auxiliaire, par rapport auquel on prend les pôles, une conique auxiliaire :

La courbe polaire réciproque d'une conique quelconque par rap-

port à une conique auxiliaire est encore une conique. La démonstration du n° 1165 s'applique sans modifications.

La méthode ainsi généralisée se prête avec la même facilité à la transformation des propriétés descriptives; mais il n'en est plus de même pour les propriétés métriques, et, quand il s'agit de transformer de telles propriétés, il convient de prendre un cercle auxiliaire.

La transformation par polaires réciproques, avons-nous dit au n° 349, laisse ignorer comment on pourrait démontrer directement les propositions que l'on découvre de la sorte. Ce reproche ne s'adresse qu'à la manière dont on applique ordinairement la méthode, en se bornant à transformer les énoncés; mais, en réalité, comme l'a montré M. Mannheim (*Transformation des propriétés métriques*, 1857), la méthode se prête à la transformation des démonstrations. Une démonstration n'est, en effet, qu'une chaîne de propositions qu'il suffit de transformer une à une pour avoir les anneaux successifs de la chaîne qui constitue la démonstration directe. C'est ainsi que nous avons procédé en définitive aux n°s 326 et 327, 328 et 329, etc.

1168. Deux courbes polaires réciproques sont telles, que chacune d'elles est coupée par une droite quelconque en autant de points (réels ou imaginaires) qu'on peut mener de tangentes (réelles ou imaginaires) à l'autre par un point donné quelconque. On nomme *classe* d'une courbe algébrique le nombre des tangentes réelles ou imaginaires qu'on peut mener à cette courbe d'un point quelconque. D'après cela, on peut énoncer la propriété précédente de cette manière plus concise : *Quand deux courbes sont polaires réciproques, l'ordre de l'une est égal à la classe de l'autre.*

Les coniques sont des courbes de la seconde classe, et, inversement, *toute courbe de la seconde classe est une conique.*

D'après la définition que nous avons donnée au n° 1162 des foyers des courbes planes d'ordre quelconque, on voit qu'*une courbe de la classe n possède n^2 foyers*, puisque l'on peut mener à cette courbe n tangentes de chacun des deux points cycliques, et que ces deux faisceaux de n droites ont n^2 points communs, *dont n seulement sont réels ;* ce sont ceux qui sont fournis par la rencontre de deux tangentes imaginaires conjuguées.

Si la courbe est tangente à la droite de l'infini, le point de contact à l'infini est un foyer réel, et il n'y a plus que $n - 1$ foyers réels à distance finie. Quant aux foyers imaginaires, il y en a $(n-1)^2 - (n-1)$, outre les deux points cycliques qui, par conséquent, tiennent lieu chacun de $n - 1$ foyers.

PROPRIÉTÉS DES POINTS ET DES DROITES IMAGINAIRES.

1169. Nous avons expliqué (1044) comment un système de deux quantités réelles x et y, dites *coordonnées*, détermine la position d'un point du plan; ce point est dit *réel*. Par analogie, on dit que deux quantités imaginaires, x' et y', c'est-à-dire deux quantités de la forme

$$x' = a + bi, \quad y' = a' + b'i, \tag{1}$$

où a, b, a', b', désignent des nombres réels et i le symbole $\sqrt{-1}$, déterminent un *point imaginaire* dont elles sont les coordonnées. Deux points sont appelés *imaginaires conjugués* lorsque leurs coordonnées sont respectivement imaginaires conjuguées; ainsi le point imaginaire conjugué de celui que déterminent les valeurs (1) a pour coordonnées

$$x'_1 = a - bi, \quad y'_1 = a' - b'i. \tag{2}$$

Nous avons vu (1134) qu'une équation du premier degré

$$Ax + By + C = 0, \tag{3}$$

dont les coefficients A, B, C, sont réels, représente une ligne droite, ce qui veut dire que le lieu des points réels dont les coordonnées satisfont à cette équation est une ligne droite. Par analogie, on nomme *droite imaginaire* l'ensemble des systèmes de valeurs imaginaires de x et de y qui satisfont à une équation du premier degré à coefficients imaginaires

$$(A' + A''i)x + (B' + B''i)y + C' + C''i = 0. \tag{4}$$

Deux droites sont appelées *imaginaires conjuguées* lorsque les coefficients de leurs équations sont respectivement imaginaires conjugués; ainsi, la droite imaginaire conjuguée de celle qui a pour équation (4) est représentée par l'équation

$$(A' - A''i)x + (B' - B''i)y + C' - C''i = 0. \tag{5}$$

De ces définitions, résultent les conséquences suivantes :

1° *Toute droite réelle contient (outre une infinité de points réels) une infinité de points imaginaires;* car, pour toute valeur imaginaire attribuée à x, l'équation (3) donne une valeur imaginaire correspondante de y.

2° *Une droite réelle qui contient un point imaginaire contient aussi son conjugué;* car, si l'on exprime que les valeurs (1) ou les valeurs (2) satisfont à l'équation (3), on trouve dans les deux cas les deux mêmes conditions

$$Aa + Bb + C = 0, \quad Aa' + Bb' = 0.$$

Réciproquement, *la droite qui contient deux points imaginaires conjugués est réelle;* en effet, l'équation

$$\frac{x-x'}{x''-x'}=\frac{y-y'}{y''-y'}$$

représente la droite qui passe par les points réels ou imaginaires dont les coordonnées sont x' et y', x'' et y'', attendu que cette équation est du premier degré et qu'elle est satisfaite soit par $x=x'$ et $y=y'$, soit par $x=x''$ et $y=y''$. Or, si les deux points sont imaginaires conjugués, c'est-à-dire si x' et y', x'' et y'' ont respectivement les valeurs (1) et (2), la substitution de ces valeurs réduit l'équation à la suivante :

$$b'x-by=ab'-ba',$$

qui a ses coefficients réels.

3° *Toute droite imaginaire contient un point réel et un seul, qui appartient aussi à sa conjuguée;* car, pour qu'un couple de valeurs réelles de x et de y satisfasse à l'équation (4) ou à l'équation (5), il faut et il suffit que ces valeurs vérifient le système

$$(6)\qquad A'x+B'y+C'=0,\quad A''x+B''y+C''=0.$$

Or ces équations, étant du premier degré, donnent pour x et y un couple unique de valeurs réelles; l'une des coordonnées ou les deux peuvent être infinies; on dit alors que le point est à l'infini. Mais le système ne peut être indéterminé, car on voit immédiatement que, si les équations (6) avaient leurs coefficients proportionnels, la droite (4) serait réelle.

4° Les coordonnées du *milieu de la droite qui joint deux points réels* (x', y'), (x'', y''), ont pour expression

$$(7)\qquad \xi=\frac{1}{2}(x'+x''),\quad \eta=\frac{1}{2}(y'+y'').$$

Par analogie, quand les points (x', y'), (x'', y''), sont imaginaires, on dit encore que le point dont les coordonnées ξ et η sont exprimées par ces formules (7) est le milieu de la droite qui joint les deux points. On voit immédiatement, par la substitution des valeurs (1) et (2), que *le point milieu est réel si les deux points considérés sont imaginaires conjugués;* il serait imaginaire si les deux points étaient imaginaires non conjugués.

5° L'intersection de deux droites réelles est le point réel dont les coordonnées sont les valeurs de x et de y fournies par la résolution des équations des deux droites. *L'intersection de deux droites imaginaires conjuguées est* aussi *un point réel;* car le système de leurs équations (4) et (5) peut, par addition et soustraction, être remplacé par le système (6), qui est à coefficients réels. — Mais deux droites peuvent évidemment se couper

en un point réel sans être réelles ou imaginaires conjuguées; par exemple, les deux droites imaginaires non conjuguées $y = (\alpha + \beta i)x$, $y = (\gamma + \delta i)x$ passent l'une et l'autre par l'origine.

Telles sont les notions fondamentales sur lesquelles repose l'introduction des imaginaires en Géométrie. Il serait vain de vouloir le déguiser : c'est l'Analyse qui fournit ces principes; puis, la Géométrie s'en empare et en développe les conséquences avec les moyens qui lui sont propres, comme nous allons le voir dans l'étude de la question suivante.

CORDES ET TANGENTES COMMUNES A DEUX CONIQUES.

1170. *Deux coniques quelconques, situées dans un même plan, ont :*

1° *Quatre points communs réels ou imaginaires conjugués;*

2° *Trois systèmes de deux cordes communes, dont l'un au moins est réel.*

En effet :

1° En éliminant y^2 entre les équations du second degré qui représentent les deux coniques, on obtient une équation où y ne figure qu'au premier degré et que nous désignerons par (y); puis, en substituant cette valeur de y dans l'une des deux équations primitives, on trouve une équation du quatrième degré en x, que nous désignerons par (x), et dont les racines sont les abscisses des points communs aux deux courbes. Si l'équation (x) a ses quatre racines réelles, l'équation (y) donne pour chacune de ces valeurs de x une valeur réelle de y; et, par suite, *les deux coniques ont quatre points communs réels.* — Si l'équation (x) a deux racines réelles et deux racines imaginaires (conjuguées), l'équation (y) donne pour y deux valeurs réelles et deux valeurs imaginaires (conjuguées); et, par suite, *les deux coniques ont deux points communs réels et deux points communs imaginaires (conjugués).* — Enfin, si l'équation (x) a ses quatre racines imaginaires (conjuguées deux à deux), l'équation (y) donne pour y quatre valeurs imaginaires (conjuguées deux à deux); et, par suite, *les deux coniques ont quatre points communs imaginaires (conjugués deux à deux).*

2° *Si les deux coniques ont quatre points communs réels a, b, c, d (fig. 601), les trois couples ab et cd, ac et bd, ad et bc, de cordes communes sont* évidemment *réels.*

Si les deux coniques ont deux points communs réels a et b, et deux points communs imaginaires conjugués c et d, la corde commune ab est évidemment *réelle; cd l'est aussi,* puisqu'elle unit deux points imaginaires conjugués. *Les autres cordes communes ac et bd, ad et bc sont imaginaires;* car, si la droite *ac*, par exemple, était réelle, le point d'intersection des deux droites réelles *ac* et *cd* serait réel. — Il convient d'observer que les

deux droites imaginaires d'un même couple *ac* et *bd* ou *ad* et *bc* ne sont pas conjuguées ; car, si *ac* et *bd* l'étaient, leur point d'intersection *p'* serait réel, et chacune de ces droites, ayant deux points réels *a* et *p'* ou *b* et *p'*, serait réelle. La conjuguée de *ac* est évidemment *ad*, et celle de *bd* est *bc*.

Si les deux coniques ont quatre points communs imaginaires conjugués deux à deux a et *b*, *c* et *d*, *les cordes communes ab* et *cd sont réelles*, puisque chacune aura deux points imaginaires conjugués ; *les autres cordes communes ac* et *bd*, *ad* et *bc*, *sont imaginaires ;* car si, par exemple, *ac* était réelle, les points *a* et *c* où elle coupe respectivement les droites réelles *ab* et *cd* seraient réels. Ici, les droites imaginaires d'un même couple, *ac* et *bd* ou *ad* et *bc*, sont conjuguées ; car on passe, par exemple, de *ac* à *bd* en remplaçant *a* par son conjugué *b* et *c* par son conjugué *d*.

En transformant la proposition précédente par la méthode des polaires réciproques et donnant le nom d'*ombilic* à tout point d'intersection de deux tangentes communes, on voit que :

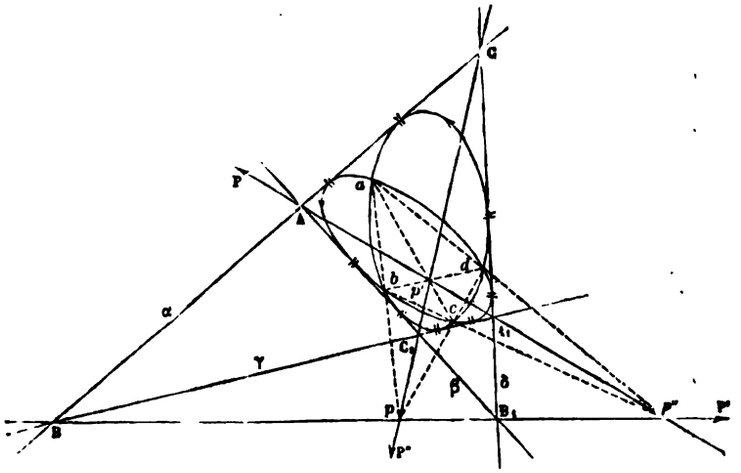
Deux coniques ont :

1° *Quatre tangentes communes réelles ou imaginaires conjuguées ;*

2° *Trois systèmes de deux ombilics, l'un au moins de ces systèmes étant réel.*

Si les quatre tangentes communes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, *sont réelles, les trois couples*

Fig. 601.



d'ombilics sont réels (*fig.* 601). En désignant le point commun à deux

droites L et L' par la notation (L, L'), le premier couple est formé par A ou (α, β) et A_1 ou (γ, δ), le second couple par B ou (α, γ) et B_1 ou (β, δ), le troisième par C ou (α, δ) et C_1 ou (β, γ).

Si le quadrilatère circonscrit a deux côtés réels α et β et deux imaginaires conjugués γ et δ, ou encore *si le quadrilatère a ses côtés imaginaires conjugués deux à deux α et β, γ et δ, il n'y a qu'un couple d'ombilics réels*; c'est le couple A ou (α, β) et A_1 ou (γ, δ).

1171. On nomme *pôle double* tout point du plan de deux coniques qui a la même polaire par rapport à ces deux courbes (*fig.* 601).

Soient p le point commun aux cordes ab et cd, p' le point d'intersection de ac et de bd, et p'' le point de rencontre de ad et bc. Chacun des sommets du triangle $pp'p''$ est évidemment le pôle du côté opposé par rapport aux deux coniques. Ainsi, *tout point d'intersection de deux cordes communes est un pôle double* (ou un point commun aux deux coniques). Réciproquement, *tout pôle double est l'intersection de deux cordes communes;* en effet, soit p_1 un pôle double, et α, α' les points où $p_1 a$ rencontre pour la seconde fois chacune des coniques; le point p_1 devant avoir le même conjugué harmonique par rapport aux deux segments $a\alpha$ et $a\alpha'$, il faut que α et α' coïncident, c'est-à-dire se confondent avec l'un des points b, c, d, avec c par exemple; ainsi le point p_1 est sur ac; on verrait de même qu'il est sur bd; il est donc à la rencontre de deux cordes communes.

Les trois seuls pôles doubles sont donc *les sommets du triangle $pp'p''$. Ils sont* évidemment *réels tous les trois, si les quatre points a, b, c, d, communs aux deux coniques sont tous les quatre réels. Ils le sont aussi quand les points a, b, c, d, sont tous imaginaires*, car, alors, les deux cordes d'un même couple sont réelles ou imaginaires conjuguées. Mais, *si les points a et b sont réels, et c et d imaginaires conjugués, le pôle double p est le seul réel;* il est réel parce qu'il appartient aux deux cordes réelles ab et cd; et p' et p'' sont imaginaires, car, si p', par exemple, était réel, la droite ap ou ac serait réelle. Observons enfin que chacun des pôles doubles est le centre d'un faisceau harmonique formé par les deux côtés du triangle et les deux cordes communes qui passent par ce point.

On nomme *polaire double* toute droite qui a le même pôle par rapport aux deux coniques. Toute polaire double est la polaire d'un pôle double, et réciproquement; il n'y a donc que trois polaires doubles, dont une toujours réelle : ce sont les côtés du triangle $pp'p''$, auquel on donne le nom de *triangle autopolaire commun* aux deux coniques.

Les trois diagonales P, P', P'', du quadrilatère complet formé par les quatre tangentes communes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, aux deux coniques, sont réelles si les quatre droites $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, sont toutes réelles ou toutes imaginaires

(conjuguées). Si deux de ces tangentes α et β sont réelles, et les deux autres γ et δ imaginaires conjuguées, la diagonale P est seule réelle.

Ces diagonales P, P', P'', sont évidemment des polaires doubles; elles ne diffèrent donc pas des côtés du triangle $pp'p''$. En outre, il résulte immédiatement de la construction de la polaire d'un point par rapport à deux droites que les deux ombilics et les deux pôles doubles situés sur un même côté du triangle autopolaire $pp'p''$ forment un système harmonique.

En résumé :

Si le triangle autopolaire $pp'p''$ est entièrement réel, les deux coniques ont :

Soit *quatre points communs réels et quatre tangentes communes réelles;*

Soit *quatre points communs imaginaires et quatre tangentes communes imaginaires;*

Soit *quatre points communs réels et quatre tangentes communes imaginaires;*

Soit *quatre points communs imaginaires et quatre tangentes communes réelles;*

Et *si le triangle autopolaire n'a de réels qu'un sommet p et le côté opposé* P, les deux coniques ont :

Deux points communs réels et deux points communs imaginaires, et en même temps deux tangentes communes réelles et deux tangentes communes imaginaires.

Dans le troisième cas, l'une des coniques au moins est hyperbolique.

1172. *Si deux points pris sur une corde commune sont conjugués par rapport à l'une des coniques, ils le sont aussi par rapport à l'autre.* Car, puisqu'ils sont conjugués par rapport à la première conique, ils divisent harmoniquement la corde commune, et, par suite, ils sont conjugués par rapport à la seconde conique.

Réciproquement, *si, sur une droite située dans le plan de deux coniques, il existe deux couples de points a et a', b et b', tels que les deux points d'un même couple soient conjugués à la fois par rapport aux deux coniques, cette droite est une corde commune aux deux coniques.* Car les points de chacune des deux coniques situées sur la droite sont les deux points réels ou imaginaires qui divisent harmoniquement le segment aa' et le segment bb'.

Les propositions corrélatives s'énoncent de la manière suivante :

Si deux droites issues d'un ombilic sont conjuguées par rapport à l'une des coniques, elles le sont aussi par rapport à l'autre.

Si par un point du plan de deux coniques passent deux couples de droites A *et* A', B *et* B', *situées dans ce plan et telles que les deux droites de chaque couple soient conjuguées par rapport aux deux coniques, ce point est un ombilic*

CONIQUES CIRCONSCRITES OU INSCRITES A UN QUADRILATÈRE.

1173. *Quand plusieurs coniques ont quatre points communs (réels ou imaginaires), il existe sur une droite quelconque de leur plan deux points conjugués par rapport à toutes ces coniques.* Car les segments interceptés sur la droite par les diverses coniques forment une involution (1172); les points doubles (réels ou imaginaires) de cette involution divisent harmoniquement chacun de ces segments et, par suite, sont conjugués par rapport à chacune des coniques.

Dans le cas particulier où la droite est à l'infini, on a ce théorème : *Toutes les coniques passant par quatre points donnés ont un système (réel ou imaginaire) de diamètres conjugués, parallèles entre eux.*

Le théorème corrélatif sur les coniques tangentes à quatre droites s'énonce : *Quand plusieurs coniques sont inscrites dans un même quadrilatère (réel ou imaginaire), il passe par chaque point de leur plan deux droites (réelles ou imaginaires) qui sont conjuguées par rapport à toutes ces coniques.*

1174. *Quand plusieurs coniques ont quatre points communs (réels ou imaginaires), les polaires d'un point fixe quelconque* P *de leur plan par rapport à ces courbes passent par un même point* (LAMÉ, *Examen des différentes méthodes...*; 1818).

Soit P′ le point commun aux polaires de P par rapport à deux A et B des coniques considérées; les points P et P′ sont conjugués par rapport à A et B et, par suite, d'après le théorème précédent, par rapport à toute conique C du groupe; donc le point P′ est sur la polaire de P par rapport à la conique C.

Dans le cas particulier où le point P est à l'infini, on a cette proposition : *Quand plusieurs coniques passent par quatre points donnés, les diamètres de ces courbes, conjugués à une même direction, passent par un même point.*

Les théorèmes corrélatifs s'énoncent :

Quand plusieurs coniques sont inscrites dans un même quadrilatère, les pôles d'une droite quelconque de leur plan par rapport à ces courbes sont en ligne droite.

Le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère est une droite passant par les milieux des diagonales (NEWTON).

1175. *Les bissectrices de tout système de deux cordes communes à un cercle et à une conique sont parallèles aux axes de la conique.*

En effet, si par le point commun aux deux cordes C et C′ on mène des parallèles L et L′ aux axes de la conique, les droites L et L′ sont évidemment parallèles au système des diamètres conjugués qui sont communs en

direction au cercle et à la conique (1146); ces deux droites rencontrent donc la droite à l'infini en deux points conjugués à la fois par rapport aux deux courbes, et par suite aussi conjugués par rapport aux cordes communes C et C'; donc L et L' sont conjuguées harmoniques par rapport à C et à C', et, comme elles sont rectangulaires, elles divisent en deux parties égales les angles formés par ces cordes.

Il résulte de là que, *pour que deux coniques se coupent en quatre points situés sur un même cercle, il faut et il suffit que leurs axes soient parallèles ou perpendiculaires.*

Lorsque trois des quatre points communs à un cercle et à une conique se réunissent en un seul M, on dit que le cercle est *osculateur de la conique au point* M. La tangente en M et la corde MN qui joint le point de contact M au point de section N des deux courbes sont alors, d'après le théorème précédent, également inclinées sur un quelconque des axes de la conique. Cette propriété permet de déterminer le point N et, par suite, le cercle osculateur en un point donné M d'une conique.

On calcule aisément le rayon de ce cercle à l'aide d'un théorème élégant dû à Mac-Cullagh, Dublin, 1836 : *Le rayon* R *du cercle qui passe par trois points* M, N, P, *d'une ellipse est égal au produit des demi-diamètres m, n, p, parallèles aux côtés du triangle formé par ces trois points, divisé par le produit ab des demi-axes.* En effet, en divisant l'égalité (428)

$$R = \frac{NP.PM.MN}{4MNP}$$

par l'égalité analogue

$$a = \frac{N'P'.P'M'.M'N'}{4M'N'P'},$$

relative aux points correspondants M', N', P', du cercle dont l'ellipse est la projection, on a

$$\frac{R}{a} = \frac{M'N'P'}{MNP}\,\frac{NP}{N'P'}\,\frac{PM}{P'M'}\,\frac{MN}{M'N'};$$

mais le premier rapport du second membre est égal à $\frac{a}{b}$ (706, 1056) et les autres sont égaux respectivement à $\frac{m}{a}$, $\frac{n}{a}$, $\frac{p}{a}$, puisque deux droites parallèles sont entre elles comme leurs projections. La relation précédente se réduit donc à

$$R = \frac{mnp}{ab},$$ C. Q. F. D.

Si les points N et P se réunissent en M, les quantités m, n, p, deviennent égales au demi-diamètre δ parallèle à la tangente en M, et l'on a pour le rayon du cercle osculateur en M l'expression $\frac{\delta^3}{ab}$ ou encore, en

vertu du second théorème d'Apollonius, l'expression $\frac{\delta^2}{p}$, dans laquelle p désigne la distance du centre de l'ellipse à la tangente au point M. Cette expression se réduit à $\frac{b^2}{a}$ ou à $\frac{a^2}{b}$ quand le point considéré est l'extrémité du grand axe ou du petit axe.

CONIQUES TANGENTES, BITANGENTES, OSCULATRICES.

1176. *Coniques tangentes.* — Quand deux coniques se touchent en un point a, ce point est la réunion de deux points communs a et b, et il ne reste plus que deux autres points communs c et d, qui sont réels ou imaginaires conjugués.

La tangente en a et la droite cd forment un couple de cordes communes; ce couple est réel. Quant aux deux autres couples, ils se confondent en un seul ac et ad, qui est réel si c et d sont réels et imaginaires si c et d sont imaginaires.

Outre la tangente en a, il n'y a plus que deux tangentes communes réelles ou imaginaires; leur point d'intersection et le point a forment un système d'ombilics réels, et il n'y a plus qu'un autre couple d'ombilics: ce sont les points réels ou imaginaires où la tangente en a rencontre les deux autres tangentes communes.

Coniques bitangentes. — On dit que deux coniques sont *bitangentes* ou ont un *double contact* lorsqu'elles se touchent en deux points; nous désignerons ces deux points par g et h, et le point d'intersection des tangentes en g et h par k.

Il n'y a plus encore ici que deux systèmes de cordes communes; le premier est formé par les tangentes kg et kh, et le second par la droite double ou corde de contact gh. Les points g et h forment un couple d'ombilics, et le point k forme à lui seul le second couple.

Quant à la réalité, il faut distinguer deux cas, suivant que le *double contact* des deux coniques est *réel* ou *imaginaire*, c'est-à-dire suivant que les points g et h sont réels ou imaginaires conjugués. Dans le premier cas, les cordes communes et les ombilics que nous venons d'énumérer sont tous réels. Dans le second cas, la corde de contact gh forme le seul couple de cordes communes réelles et son pôle k forme le seul couple d'ombilics réels.

Quand deux coniques ont un double contact :

1° *Les polaires d'un point quelconque* M *de leur plan se coupent sur la corde de contact;* car elles doivent se couper (1174) sur la polaire de M par rapport aux systèmes des deux cordes communes confondues avec la corde de contact, polaire qui coïncide avec cette dernière corde.

2° *Les pôles d'une droite quelconque* Δ *sont en ligne droite avec le pôle de la corde de contact* qu'on nomme *pôle de contact;* c'est la proposition corrélative de la précédente.

3° *Tout point k de la corde de contact est un pôle double,* car, pour chacune des coniques, la polaire de *k* contient le pôle de contact et le point *k'* conjugué harmonique de *k* par rapport aux deux points de contact. Nous trouvons ainsi un cas d'exception à la proposition : deux coniques n'ont, en général, que trois pôles doubles.

Coniques osculatrices. — On dit que deux coniques sont *osculatrices* ou qu'elles ont un contact du *second ordre* lorsque trois de leurs points communs sont réunis en un seul que nous appellerons ω. Elles ont alors un quatrième point d'intersection *d* qui est toujours réel, et, outre la tangente en ω, une tangente commune réelle δ; soit *t* le point où la tangente en ω rencontre la tangente *d*.

Il n'y a qu'un système de cordes communes; il est réel et formé par la tangente ω*t* et par la corde ω*d*. Il n'y a aussi qu'un couple d'ombilics : ce sont les points réels ω et *t*.

On dit que deux coniques ont un *contact du troisième ordre,* lorsque leurs quatre points communs sont réunis en un seul ω. Les quatre tangentes communes sont alors confondues en une seule qui est la tangente ω*t* au point ω. Cette même droite ω*t* est la seule corde commune et le point ω le seul ombilic.

CONIQUES HOMOLOGIQUES.

1177. *La figure homologique d'un cercle, lorsqu'on prend le centre du cercle pour centre d'homologie, est une conique qui a ce centre pour foyer;* car si, dans l'avant-dernière formule du n° 730, O*m'* est constant, il en est de même du rapport $\frac{mO}{mi}$; par suite, le rapport des distances d'un point quelconque *m* de la figure cherchée au point fixe O et à la droite fixe I est constant.

Par suite, une conique étant donnée, on voit qu'il faut placer le centre d'homologie O à l'un des foyers pour que la figure homologique soit un cercle de centre O.

C'est cette propriété que M. Chasles prend pour définition des foyers dans son *Traité des Sections coniques.* La marche que nous avons suivie (n°s 1135 et suivants) est à la fois plus directe et plus simple.

1178. *La figure homologique d'une conique* C *est une conique* C'.

En effet, P et Q étant deux points fixes pris arbitrairement sur la conique donnée C, et *m* un point variable de cette conique, les droites

Pm, Qm, engendrent deux faisceaux homographiques (1130). Or, si P', Q', m', sont les homologues de P, Q, m, le faisceau engendré par P'm tournant autour du point fixe P' sera homographique du faisceau engendré par Pm (731); de même, le faisceau décrit par Q'm' sera homographique du faisceau décrit par Qm. Donc les faisceaux engendrés par P'm' et Q'm' sont homographiques, et (1131) le lieu du point m' est une conique. — *A un point p et à sa polaire* L *relatifs à la première conique* C, *répondent dans la seconde conique un point p' et sa polaire* L'. Car aux quatre points harmoniques p, a, q, b, situés sur une transversale issue du point p, et qui coupe la conique C en a et b et la polaire L en q, répondent quatre points p', a', q', b', qui sont aussi harmoniques (731). On voit par là qu'*à deux points ou à deux droites conjuguées relativement à la conique* C *répondent deux points ou deux droites conjuguées relativement à la conique* C'. — *L'axe d'homologie* XX' *est une corde commune aux deux coniques* C *et* C'. En effet, les points communs à la conique C et à l'axe XX' sont les points doubles des deux divisions homographiques tracées sur XX' par les faisceaux générateurs Pm et Qm de cette conique. De même, les points communs à la conique C' et à XX' sont les points doubles des deux divisions tracées sur XX' par les faisceaux P'm' et Q'm'; mais les rayons homologues des faisceaux P et P' se coupent sur l'axe XX', aussi bien que les rayons homologues des faisceaux Q et Q'. Donc les points doubles sont les mêmes pour les deux divisions. — Enfin on voit, soit par un raisonnement corrélatif du précédent, soit en appliquant à la propriété précédente la transformation par polaires réciproques, que *le centre d'homologie* S *est un ombilic des deux coniques.*

Réciproquement, *deux coniques quelconques* C *et* C' *sont deux figures homologiques dans lesquelles l'axe d'homologie est une corde commune et le centre d'homologie un ombilic correspondant à cette corde.* Considérons le triangle $pp'p''$, dont chaque sommet est le pôle du côté opposé par rapport aux deux coniques (*fig.* 601); par chaque sommet passent deux cordes communes, et sur chaque côté sont situés deux ombilics; nous appelons *ombilics correspondant à une corde commune* les deux ombilics placés sur le côté du triangle $pp'p''$ opposé au sommet qui est situé sur la corde commune considérée. Cela étant, soient XX' une corde commune aux deux coniques proposées, qui les coupe en e et f, et S l'un des deux ombilics correspondants; a étant un point quelconque de la conique C, la droite Sa rencontre la conique C' en deux points : désignons par a' celui de ces deux points qui, lorsque la sécante Sa tourne autour de S, vient se réunir avec a au point e. Si, en prenant S pour centre d'homologie, XX' pour axe et (a, a') pour un couple de points homologues, on construit la figure homologique de C, on trouve une

conique C, qui, ayant en commun avec la conique C′ les points a', e, f, et les deux tangentes issues de S, ne diffère pas de la conique C′. Donc C et C′ sont homologiques.

Il faut cependant, d'après la démonstration même, que les deux coniques soient placées de telle façon, que toute transversale issue de l'ombilic S rencontre les deux courbes en des points qui soient à la fois réels ou à la fois imaginaires pour les deux coniques.

De plus, comme il peut y avoir six cordes communes, et qu'à chacune d'elles répondent deux ombilics, on voit que *deux coniques peuvent être homologiques de douze manières différentes.*

Parmi les nombreux corollaires de cette réciproque, nous citerons les deux suivants :

Lorsque deux coniques se touchent en un point A et se coupent en deux autres points B et C réels ou imaginaires, le point A est un centre d'homologie, et la corde commune BC, qui est toujours réelle, est l'axe d'homologie correspondant.

Lorsque deux coniques ont un foyer commun, le foyer est un centre d'homologie, puisqu'il est le point de concours de deux tangentes communes imaginaires (1162).

1179. Voici quelques applications de la théorie de l'homologie aux coniques :

1° Considérons une conique C et un cercle C′ ayant un foyer F de la conique pour centre. Ces deux courbes sont homologiques, et F est le centre d'homologie. Si un angle de grandeur constante tourne autour de F comme sommet, la corde qu'il intercepte dans le cercle enveloppe un cercle concentrique au premier ; donc la corde interceptée dans la conique enveloppe une seconde conique C″. D'ailleurs, deux cercles concentriques ont un double contact sur la droite de l'infini ; donc, les coniques C et C″ ont un double contact (imaginaire) sur la directrice correspondant au foyer F, attendu que cette directrice, étant la polaire du foyer, correspond à la droite de l'infini dans le cercle, laquelle est la polaire du centre. Ainsi, *lorsqu'un angle de grandeur constante tourne autour du foyer d'une conique comme sommet, la corde qu'il intercepte dans la conique enveloppe une nouvelle conique doublement tangente à la proposée sur la directrice relative au foyer considéré.*

2° Soient une conique C et un cercle C′ tangent en S à cette conique. Ces deux courbes sont homologiques, et S est le centre d'homologie. Si un angle de grandeur constante tourne autour de S comme sommet, la corde interceptée dans le cercle enveloppe un cercle concentrique. Donc, la corde interceptée dans la conique enveloppe une seconde conique C″ doublement tangente à la première, suivant la parallèle à l'axe d'homologie qui

répond à l'infini du cercle. Ainsi, *lorsqu'un angle de grandeur constante tourne autour d'un point d'une conique comme sommet, la corde interceptée dans la conique enveloppe une autre conique qui a un double contact avec la première.*

En particulier, si l'angle est droit, la corde interceptée dans le cercle passe par le centre de ce cercle, c'est-à-dire par un point fixe situé sur la normale commune aux courbes C et C' au point S. Donc, *quand un angle droit pivote autour d'un point* S *d'une conique comme sommet, la corde interceptée dans la conique passe par un point fixe situé sur la normale en* S *à la conique.* C'est le théorème de Frégier, que nous avons démontré déjà directement au n° 1139.

3° La transformation homologique permet de ramener les *questions graphiques* relatives aux coniques à de simples questions du même genre relatives au cercle. Tout consiste à tracer dans le plan de la conique un cercle et à déterminer, d'après les conditions qui définissent la conique, le centre et l'axe d'homologie de la conique et du cercle. On aura alors tout ce qu'il faut pour résoudre, sans peine et à l'aide de la règle seule, les diverses questions graphiques relatives à la conique.

Supposons, par exemple, qu'on demande de déterminer le centre et les axes d'une conique donnée par quatre points O, a, b, c, et par la tangente Ot au point O.

On tracera un cercle quelconque tangent en O à la droite Ot; ce cercle sera homologique de la conique par rapport au centre d'homologie O. En joignant le point O aux points a, b, c, on aura, par les intersections des droites Oa, Ob, Oc, avec le cercle, les points a', b', c', homologues de a, b, c. On se trouvera alors dans les conditions du n° 729 (1°), et l'on saura trouver le point de la figure F qui répond à un point pris à volonté dans la figure F', ce qui permettrait de tracer la conique par points. On déterminera (730) la droite limite J' de la figure F'; cette droite pourra rencontrer le cercle en deux points x', y', ou le toucher en un seul point z', ou être extérieur à ce cercle.

Dans le premier cas, la conique aura deux points à l'infini, placés sur Ox' et Oy'; ce sera donc une hyperbole, dont on aura les asymptotes en cherchant les homologues des droites $p'x'$, $p'y'$, qui touchent le cercle aux points x' et y'.

Dans le deuxième cas, la conique n'aura qu'un point à l'infini situé sur Oz'; ce sera une parabole dont l'axe, d'ailleurs parallèle à Oz', s'obtiendra en prenant la polaire du point situé à l'infini sur la direction perpendiculaire à Oz'.

Dans le troisième cas, la conique n'ayant aucun point à l'infini sera une ellipse, dont on aura le centre en prenant l'homologue p du pôle p' de J par rapport au cercle.

Dans le cas de l'hyperbole, les axes sont parallèles aux bissectrices des angles des droites Ox' et Oy' qui sont les directions asymptotiques. Mais on peut obtenir ces parallèles aux axes sans faire intervenir les droites Ox' et Oy', de manière à avoir une construction qui s'applique au cas de l'ellipse, dans lequel Ox' et Oy' sont imaginaires. Il suffit de tracer le diamètre du cercle qui passe par le point p'; les directions demandées seront celles des droites qui joignent le point O aux extrémités de ce diamètre.

CONIQUES HOMOTHÉTIQUES.

1180. On sait que deux figures homothétiques ne sont autre chose que deux figures homologiques dont l'axe d'homologie est à l'infini (732). Il suit de là et des propriétés démontrées au n° 1178 que *la figure homothétique d'une conique est une conique, et que deux coniques homothétiques ont une corde commune à l'infini*. Réciproquement, *lorsque la droite de l'infini est une corde commune à deux coniques* C *et* C', *ces courbes sont homothétiques*. En effet, si deux points de la droite de l'infini sont conjugués par rapport à l'une des coniques, ils sont conjugués par rapport à l'autre; par suite, deux diamètres conjugués quelconques de la courbe C sont parallèles à deux diamètres conjugués de la courbe C'. Cela posé, soient AB et A'B' deux diamètres parallèles des coniques C et C'; M étant un point quelconque de C, AM et BM sont parallèles à deux diamètres conjugués de C, et, par suite, les parallèles A'M' et B'M' à AM et à BM se coupent en un point M' de la conique C'. Or (360), les points M et M' ainsi déterminés décrivent deux figures homothétiques dont le rapport de similitude est $\frac{AB}{A'B'}$.

Il résulte de là que *toute conique passant par les deux points cycliques de son plan est un cercle*, car, ayant la droite de l'infini pour corde commune avec un cercle quelconque de ce plan, elle est homothétique à ce cercle.

1181. *Deux coniques homothétiques et concentriques ont un double contact sur la droite de l'infini*. En effet, soient ε et φ les points communs aux deux coniques et à la droite de l'infini. Les tangentes en ε et φ à la première conique doivent passer par le pôle de $\varepsilon\varphi$, c'est-à-dire par le centre O de cette conique; de même, les tangentes en ε et φ à la deuxième conique doivent passer par O; donc les deux coniques ont les mêmes tangentes en ε et φ. Réciproquement, *deux coniques qui ont un double contact sur la droite de l'infini sont homothétiques et concentriques*; car d'abord elles sont homothétiques, puisque la droite de l'infini est une corde commune, et, d'autre part, le centre de chacune d'elles doit être le pôle de la droite de l'infini, qui est le même pour les deux

coniques, puisque c'est le point de concours des tangentes communes en ε et φ.

1182. Deux figures semblables ne diffèrent en définitive que par l'échelle à laquelle elles sont construites, de sorte qu'un simple changement d'échelle les rendrait égales. Donc, pour trouver les conditions de similitude de deux courbes de même espèce, il suffit de distinguer, d'après la définition des courbes de cette espèce, les données distinctes et indépendantes relatives à la forme des données relatives à la position. Par exemple, si la connaissance d'une seule grandeur suffit pour déterminer la forme d'une courbe d'une certaine espèce, toutes les courbes de cette espèce sont semblables, car un simple changement d'échelle permet de les faire coïncider. Ainsi tous les cercles sont semblables, *toutes les paraboles sont semblables*. Si la forme de la courbe dépend de plusieurs données distinctes et indépendantes, il faut que les données angulaires homologues soient égales et les données linéaires homologues proportionnelles ; car, le changement d'échelle ne permettant de rendre égaux que deux éléments linéaires homologues, l'égalité des autres éléments linéaires homologues doit résulter de celle des deux premiers. C'est ainsi que la similitude de deux ellipses ou de deux hyperboles consiste dans la proportionnalité de leurs axes.

Quand deux paraboles ont leurs axes parallèles, elles sont homothétiques ; elles touchent la droite de l'infini au même point : c'est le point situé sur leurs axes parallèles.

MÉTHODE FONDÉE SUR LA PROJECTION CONIQUE.

1183. Nous avons dit que c'était surtout à propos des coniques qu'apparaîtrait la portée de cette méthode, dont nous avons exposé les premiers principes aux n°s 725, 726 et 727.

Voici un premier exemple, important par lui-même et par la facilité avec laquelle la méthode s'y applique :

Un triangle ABC *étant tracé dans le plan d'une conique qui rencontre ses côtés consécutifs* AB, BC, CA, *en trois couples de points* (c, c'), (a, a'), (b, b'), *les segments que ces points forment sur les côtés ont entre eux la relation*

$$\frac{Ab.Ab'}{Cb.Cb'}\cdot\frac{Ca.Ca'}{Ba.Ba'}\cdot\frac{Bc.Bc'}{Ac.Ac'}=1.$$

En effet, cette relation est projective ; car, lorsqu'on a chassé le dénominateur, on voit qu'elle satisfait aux conditions prescrites dans le n° 727. D'ailleurs, elle est évidente sur le cercle, à cause de la propriété des sé-

cantes ; donc elle convient à une section conique quelconque, puisqu'une telle courbe peut toujours être projetée suivant un cercle.

Ce théorème, dû à Carnot (*Géométrie de position*, p. 437), est la généralisation de celui de Ménélaüs (310). Il a de nombreuses conséquences. Par exemple, si le sommet B du triangle ABC est à l'infini, la relation précédente devient

$$\frac{\mathrm{A}b.\mathrm{A}b'}{\mathrm{A}c.\mathrm{A}c'} = \frac{\mathrm{C}b.\mathrm{C}b'}{\mathrm{C}a.\mathrm{C}a'}.$$

Or, si par un point quelconque D de la droite Caa' on mène une parallèle à AC, qui rencontre la conique en e et e', on aura de même

$$\frac{\mathrm{D}e.\mathrm{D}e'}{\mathrm{D}a.\mathrm{D}a'} = \frac{\mathrm{C}b.\mathrm{C}b'}{\mathrm{C}a.\mathrm{C}a'},$$

d'où, en rapprochant les deux équations précédentes,

$$\frac{\mathrm{A}b.\mathrm{A}b'}{\mathrm{A}c.\mathrm{A}c'} = \frac{\mathrm{D}e.\mathrm{D}e'}{\mathrm{D}a.\mathrm{D}a'}.$$

Donc : *Si dans le plan d'une conique on mène par un point quelconque* A *deux droites parallèles à deux axes fixes, le rapport des produits des segments* (*réels ou imaginaires*) *que la courbe détermine sur ces droites à partir de leur point commun* A *est constant*. Ce théorème est dû à Newton (*Énumération des courbes du troisième ordre*).

1184. Pour montrer toute la fécondité de cette méthode relativement à la recherche des propriétés des sections coniques, il faut établir quelques nouveaux principes.

1° *On peut projeter une conique* C *de telle sorte qu'une droite* L *de son plan passe à l'infini, et qu'un point f de ce même plan se projette au foyer de la nouvelle conique* C'. — Le point F doit, d'après cela, être à l'intérieur de la conique C. Par suite, l'involution déterminée sur la droite L par tous les couples de droites conjuguées issues du point F a ses points doubles imaginaires (1140), de sorte qu'il existe de part et d'autre de L deux points P et P' de chacun desquels on voit sous un angle droit les divers segments de l'involution. Plaçons le sommet S du cône sur la circonférence décrite, dans un plan perpendiculaire à celui de la conique C, sur PP' comme diamètre, et prenons pour plan de projection un plan parallèle à celui du sommet S et de la droite L. De cette façon, la droite L passera à l'infini dans la projection, et chaque couple de droites conjuguées issues du point f deviendra en projection un couple de droites rectangulaires et conjuguées par rapport à la conique C'. La projection du point f sera donc (1135) un foyer de cette nouvelle courbe C'. Ajoutons que cette conique C' sera une hyperbole, une ellipse ou une parabole,

suivant que la droite L coupera la conique primitive C en deux points réels, imaginaires ou coïncidents.

Le pôle o de la droite L, par rapport à la conique C, deviendra en projection le centre de la conique C′ (1142). *On peut donc projeter une conique* C *de manière que deux points f et o de son plan deviennent, en projection, l'un le foyer, l'autre le centre de la nouvelle conique* C′.

En particulier, si f coïncide avec le pôle o de la droite L par rapport à la conique C, le même point sera en projection le centre et le foyer de la nouvelle conique C′, qui dès lors sera un cercle. *On peut donc projeter une conique suivant un cercle de telle sorte qu'un point de son plan se projette au centre du cercle ou qu'une droite de son plan passe à l'infini.*

2° *On peut projeter deux coniques situées dans un même plan suivant deux cercles.* — Il faut évidemment que les deux coniques proposées aient au plus deux points communs réels ; il existe alors une corde commune réelle qui rencontre les deux coniques en deux points imaginaires (1170, 2°). En projetant de telle sorte que l'une des coniques devienne un cercle et que cette corde commune passe à l'infini, l'autre conique donnera aussi un cercle, car les deux courbes ayant en projection une corde commune à l'infini seront homothétiques (1180), et la figure homothétique d'un cercle est un cercle.

Si les deux coniques proposées ont un double contact imaginaire, on peut les projeter suivant deux cercles concentriques. Car, en projetant l'une des coniques suivant un cercle de telle sorte que la corde de contact passe à l'infini, l'autre conique donnera un cercle de même centre, puisque les deux courbes en projection ayant un double contact sur la droite de l'infini devront être homothétiques et concentriques.

Les deux droites qui joignent le foyer d'une conique aux points circulaires à l'infini sont tangentes à la conique (1162), et la corde de contact est la polaire du foyer, c'est-à-dire la directrice. Donc, *deux coniques qui ont même foyer et même directrice peuvent être projetées suivant deux cercles concentriques,* attendu qu'elles ont un double contact imaginaire sur la directrice commune.

3° *On peut projeter une conique* C *de telle sorte que deux points (intérieurs) de son plan, f et f', deviennent en projection les deux foyers de la nouvelle conique* C′. — En effet, en désignant par a et a' les points où la droite ff' coupe la conique C, et par k et k' les points qui divisent à la fois harmoniquement les segments aa' et ff', il suffit de projeter de telle sorte que f et k deviennent l'un le foyer, l'autre le centre de la nouvelle conique C′. Alors la projection de f' sera évidemment l'autre foyer.

On peut projeter deux coniques situées dans un même plan suivant deux coniques confocales. — Ces deux coniques doivent avoir un seul couple d'ombilics réels, et ces deux ombilics doivent être intérieurs à

l'une et à l'autre courbe. Cela étant, il suffit de projeter de manière que ces deux ombilics deviennent en projection les deux foyers de l'une des courbes; ils seront par cela même les deux foyers de l'autre (1161).

Voici des applications :

Dans tout quadrilatère inscrit à une conique, l'intersection des deux diagonales est le pôle de la droite qui joint les points de concours des côtés opposés; les diagonales de ce quadrilatère et celles du quadrilatère dont les côtés sont les tangentes à la conique menées par les sommets du quadrilatère inscrit se coupent au même point et forment un faisceau harmonique. Car, en projetant la conique suivant un cercle, de telle sorte que la droite qui joint les points de concours des côtés opposés du quadrilatère inscrit passe à l'infini, le théorème devient évident.

Quand deux coniques ont un double contact, toute corde de l'une qui est tangente à l'autre est divisée harmoniquement par le point de contact et par le point où elle rencontre la corde de contact des deux coniques. Car, en projetant les deux coniques suivant deux cercles concentriques, on transforme cette proposition dans la suivante, qui est évidente : *Toute corde d'un cercle tangente à un cercle concentrique a son milieu au point de contact.*

Si deux côtés d'un triangle inscrit à une conique passent chacun par un point fixe, le troisième côté enveloppe une conique qui a un double contact avec la première sur la droite qui joint les deux points fixes. Car, en projetant la conique suivant un cercle de telle sorte que les deux points fixes passent à l'infini, on retombe sur ce théorème : *Si deux côtés d'un triangle inscrit dans un cercle sont parallèles à deux droites données, le troisième côté enveloppe un cercle concentrique,* ce qui est évident, puisque l'angle au sommet du triangle est constant.

On voit immédiatement que *le lieu des centres des cercles qui passent par un point fixe et qui touchent une droite fixe est une parabole dont le point fixe est le foyer.* En transformant par projection ce théorème, et remarquant que le point fixe ou foyer et les deux points cycliques forment un triangle circonscrit à la parabole, on obtient la proposition suivante : *Étant donnés un triangle et une droite, si l'on conçoit toutes les coniques circonscrites à ce triangle et tangentes à cette droite, le lieu des points de concours des tangentes à deux des sommets du triangle est une conique inscrite dans ce triangle.*

Nous avons démontré (1164) que *le cercle circonscrit à tout triangle formé par trois tangentes à la parabole passe par le foyer :* en remarquant que le foyer et les deux points cycliques forment un second triangle circonscrit à la parabole, et, transformant par projection, on arrive à ce théorème : *Si deux triangles sont circonscrits à une conique, leurs six sommets sont situés sur une conique.*

1185. La solution générale du problème de la *transformation des relations angulaires* est due à M. Laguerre (*Nouvelles Annales*, 1853). Elle repose sur le principe suivant :

Le rapport anharmonique

$$(k) \qquad \frac{\sin uog}{\sin vog} : \frac{\sin uoh}{\sin voh}$$

du faisceau formé par les côtés d'un angle $uov = \theta$ *et par les droites qui joignent son sommet aux points cycliques g et h du plan est égal à* $e^{2\theta\sqrt{-1}}$. En effet, m étant un point d'un cercle ayant o pour centre et R pour rayon, on a, en menant mp parallèle à ov jusqu'à sa rencontre avec ou,

$$\overline{op}^2 + \overline{pm}^2 + 2op.pm\cos\theta = R^2 \quad \text{et} \quad \frac{\sin uom}{\sin vom} = -\frac{pm}{op},$$

d'où, en désignant par z ce rapport de sinus,

$$z^2 - 2z\cos\theta + 1 = \frac{R}{op^2}.$$

Or, si m est l'un des points g ou h, op est infini, et l'on voit que le rapport anharmonique a bien la valeur énoncée, puisqu'il est égal au quotient des racines de l'équation

$$z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0.$$

Cela posé, soit $uov = \theta$ un angle quelconque, UOV sa projection, G et H les projections des points cycliques g et h du plan uov; en désignant par ρ et nommant *rapport anharmonique relatif à l'angle* UOV le rapport (*k*) dans lequel on remplace chaque lettre par la lettre majuscule correspondante, on a, en vertu de la projectivité du rapport anharmonique,

$$e^{2\theta\sqrt{-1}} = \rho, \text{ d'où } \theta = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\rho.$$

Telle est la relation entre un angle et sa projection. Donc enfin, à une relation quelconque

$$f(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) = 0$$

entre les angles $\theta_1, \ldots, \theta_n$ d'une figure répond, entre les angles $\theta'_1, \ldots, \theta'_n$ de la figure projection, la relation

$$f\left(\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\rho_1, \ \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\rho_2, \ \ldots, \ \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\rho_n\right) = 0,$$

où ρ_k désigne le rapport anharmonique relatif à l'angle θ'_k.

Remarquons que, dans le cas particulier de $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $\rho = e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$; donc, *à tout angle droit d'une figure répond, dans la figure projection,*

un angle dont les côtés divisent harmoniquement les droites qui joignent le sommet aux projections des points cycliques.

Voici quelques applications :

Deux coniques confocales se coupent orthogonalement (1161).

Si deux coniques sont inscrites dans le même quadrilatère, les deux tangentes à l'un des points communs divisent harmoniquement une diagonale quelconque de ce quadrilatère.

Le lieu des angles droits circonscrits à une ellipse ou à une hyperbole est un cercle (990, 1021).

Le lieu des angles circonscrits à une conique, dont les côtés divisent harmoniquement une ligne droite donnée ab, est une conique passant par les points a et b.

Le lieu des angles droits circonscrits à une parabole est la directrice (1048).

Le lieu des angles circonscrits à une conique, dont les côtés divisent harmoniquement une tangente ab à cette conique, est la droite qui joint les points de contact des tangentes issues de a et de b.

Si autour du centre d'un cercle comme sommet on fait tourner un angle de grandeur constante, la corde qu'il intercepte dans le cercle enveloppe un cercle concentrique.

Si autour d'un point fixe on fait tourner deux rayons formant deux faisceaux homographiques dont les rayons doubles soient les tangentes à une conique, la corde interceptée dans la conique enveloppe une autre conique qui a avec la première un double contact sur la polaire du point fixe.

TRACÉS RELATIFS AUX CONIQUES.

1186. *Construire une conique connaissant :*

1° *Cinq points a, b, c, d, e.* — *abcd* forme un quadrilatère inscrit dans la conique cherchée. Par le point *e*, on mènera une droite quelconque *ef*, et l'on cherchera le point *f* conjugué du point *e* dans l'involution déterminée sur cette droite par les points où elle rencontre les côtés opposés du quadrilatère. Le point *f* appartiendra à la conique.

Si l'on veut trouver la tangente *bt* en *b*, on regardera *acbt* comme un quadrilatère inscrit, dont deux sommets sont infiniment voisins en *b*, et la droite *ed* comme une transversale de ce quadrilatère. Cette transversale coupe les côtés opposés *ba*, *bc*, en α, γ, la courbe en *e* et *d*, et les

côtés opposés ac, bt, en δ et x. Ces six points formant une involution, on déterminera le point x, et par suite la tangente bt.

2° *Cinq tangentes*, A, B, C, D, E. — Quatre des tangentes données forment un quadrilatère circonscrit. Qu'on prenne sur la cinquième un point quelconque a et qu'on le joigne aux quatre sommets du quadrilatère; le sixième rayon, conjugué à la cinquième tangente dans l'involution que ces quatre droites déterminent, est une tangente issue du point a.

Supposons qu'on veuille trouver le point de contact de la tangente B. On considère le quadrilatère formé par les tangentes A, C, B, dont deux côtés se confondent en un seul suivant B, et dont (A, C), (A, B), (B, C) et t sont les quatre sommets. Le sommet t est inconnu, mais les six rayons qui aboutissent au point de concours I de D et E, savoir : D, E, I (A, B), I (B, C), I (A, C), It, sont en involution, et cinq sont connus. Il sera donc facile de déterminer le sixième et, par suite, le point cherché t.

Dans le cas de la parabole, la cinquième tangente est donnée implicitement : c'est la droite de l'infini. Les quatre qui sont données forment un quadrilatère. Par les sommets de ce quadrilatère, on mènera quatre parallèles dans une direction arbitraire; on les coupera par une transversale quelconque, sur laquelle on cherchera le point central de l'involution qu'elles y déterminent, et la parallèle aux autres droites menée par ce point sera une cinquième tangente.

3° *Quatre points et une tangente.* — Soient $abcd$ le quadrilatère donné et e le point de contact inconnu de la tangente. Soient α, α', et β, β', les points où cette tangente rencontre successivement les côtés opposés du quadrilatère. Ces points déterminent une involution dont e est un point double. Il sera donc facile de le trouver. On voit que la question a deux solutions.

Dans le cas de la parabole, la tangente est à l'infini. Soit S le point de concours des côtés opposés ad et bc du quadrilatère donné. Qu'on mène Sc', Sd', parallèles respectivement aux deux autres côtés opposés; on a quatre rayons Sc', Sd', Sc, Sd, issus du point S, qui, conjugués deux à deux, déterminent une involution. Chacun des deux rayons doubles de cette involution est parallèle à l'axe d'une parabole qui satisfait à la question.

4° *Quatre tangentes et un point.* — On trouve une cinquième tangente en cherchant les rayons doubles de l'involution qui est déterminée par les quatre rayons, conjugués deux à deux, qu'on obtient en joignant le point donné aux sommets du quadrilatère formé par les quatre tangentes données. Chacun des deux rayons doubles est une tangente à la conique; on a donc deux solutions distinctes.

Pour la parabole, on donne un point et trois tangentes; la quatrième

est à l'infini. La solution est la même; deux des rayons de l'involution sont parallèles respectivement à deux des tangentes données.

5° *Trois points et deux tangentes.* — Soient a, b, c, les trois points donnés, T et T′ les deux tangentes qui se coupent en O et qui touchent respectivement la courbe aux deux points d et e qu'il s'agit de déterminer. On peut regarder la corde de contact de comme représentant un quadrilatère inscrit dont deux sommets sont en d et les deux autres en e. La corde bc, considérée comme une transversale du quadrilatère et de la courbe, fournit une relation d'involution, en vertu du théorème de Desargues, entre les six points où elle coupe les côtés opposés du quadrilatère et la courbe. Ces points se réduisent ici à cinq, savoir : t, t', sur les tangentes dO, eO, respectivement; ε, sur les deux autres côtés opposés qui se confondent en un seul de; et enfin b, c, sur la courbe. Le point ε est donc un point double de l'involution déterminée par les segments bc, tt'. — Si l'on prend ab comme transversale au lieu de bc, on trouvera de même un point φ appartenant à la corde de contact de, qui sera ainsi déterminée par les deux points ε et φ. Mais comme chacune des deux relations d'involution fournit deux points doubles ε et ε', φ et φ', on obtiendra quatre positions distinctes de la corde de, savoir : $\varepsilon\varphi$, $\varepsilon\varphi'$, $\varepsilon'\varphi$, $\varepsilon'\varphi'$, c'est-à-dire quatre solutions du problème proposé.

Dans le cas de la parabole où l'on ne donne qu'une tangente et trois points, on obtient de même quatre solutions. La tangente T′ est à l'infini, ainsi que le point t'; donc, le point t qui lui est conjugué dans l'involution est le point central de cette involution, dont on connaît en outre le segment bc et dont il s'agit de trouver les points doubles. Chacune des quatre cordes de contact ep est un diamètre d'une parabole satisfaisant aux conditions proposées.

6° *Trois tangentes et deux points.* — Nous allons déterminer deux nouvelles tangentes à la courbe aux points donnés a et b. Soient AB, BC, CD, celles qui sont données. Désignons par O le point de contact inconnu des deux tangentes cherchées; si l'on regarde l'angle bOa comme un quadrilatère circonscrit $OaOb$ dont les côtés adjacents se sont confondus deux à deux en un seul Oa ou Ob, on verra que la droite BO est un rayon double de l'involution formée par les deux couples de rayons conjugués Ba et Bb, BA et BC. Pareillement, CO est un rayon double de l'involution Ca, Cb, CB, CD. Donc, le point O, intersection des rayons BO et CO, est déterminé. Mais, comme chacune des involutions comporte deux tels rayons, on obtient quatre positions distinctes du point O, et, par conséquent, le problème admet, comme le précédent, quatre solutions.

S'il s'agit d'une parabole, l'une des trois tangentes données est à l'infini, BC par exemple. La construction reste la même en principe; mais ici les deux faisceaux de rayons en involution se composent de droites parallèles,

puisque leurs rayons respectifs B et C sont à l'infini. Coupons-les par une transversale quelconque. On aura sur cette droite, relativement au premier faisceau : deux points α, β, intersections des rayons conjugués aB, bB; un point ω, intersection du rayon AB dont le conjugué CB est à l'infini, ce qui est cause que ω est le point central de l'involution; enfin un point double x, intersection du rayon BX, et qu'il s'agit de déterminer. Relativement au second faisceau, on aura de même deux points conjugués d'une involution α', β', un point central ω', et l'on déterminera un point double y. Les droites xO, yO, parallèles respectivement aux deux tangentes données AB, DC, se couperont au sommet O de l'angle circonscrit à l'arc ab de la parabole, et l'on aura encore quatre solutions, parce que l'on obtiendra deux positions du point x et deux positions du point y.

1187. Les solutions précédentes, qui sont extraites d'un excellent article de M. de Jonquières, publié dans le tome XVI des *Nouvelles Annales* (1re série), sont fondées sur le théorème de Desargues et le théorème corrélatif.

Les autres théorèmes généraux (proposition fondamentale du n° 1131 théorème de Pascal, théorème de Carnot, etc.) fourniraient de nouvelles solutions.

Reprenons, par exemple, le premier cas, c'est-à-dire celui où l'on donne cinq points a, b, c, d, e, et appliquons la proposition fondamentale du n° 1131. On prendra deux des points donnés d et e comme sommets des deux faisceaux homographiques dont on aura alors trois couples (da, ea), (db, eb), (dc, ec) de rayons homologues. L'intersection d'une droite dm menée à volonté par d et de son homologue em sera un nouveau point de la conique. — La tangente au point d sera l'homologue du rayon ed considéré comme appartenant au faisceau (e), et cette construction donnera la tangente en un point quelconque de la conique, car il suffira de considérer ce point comme le sommet de l'un des faisceaux générateurs. — Les points où une droite donnée L rencontre la conique seront les points doubles des deux divisions tracées sur cette droite par les deux faisceaux. — Les directions des asymptotes s'obtiendront en transportant le faisceau (e) parallèlement à lui-même au sommet d, et prenant les rayons doubles du faisceau (d) et du faisceau (e) ainsi transporté; car ces rayons doubles sont les rayons du faisceau (d) dont les homologues dans (e) sont parallèles.— Enfin, une fois les deux points à l'infini ω et ω' ainsi déterminés, on aura les asymptotes elles-mêmes en menant les tangentes en ces deux points, ce qui se fait en considérant la conique comme engendrée par deux faisceaux ayant ω et ω' pour centres et prenant dans chaque faisceau l'homologue de la droite à l'infini $\omega\omega'$. Voici le détail de ces opérations : par a, b, c, on mène des parallèles $a\alpha$,

$b\beta$, $c\gamma$, et $\alpha\alpha'$, $b\beta'$, $c\gamma'$, aux droites déjà trouvées $d\omega$, $d\omega'$; soient α, β, γ, α', β', γ', les points où ces droites rencontrent une transversale quelconque L; la droite $\omega\omega'$ rencontre L à l'infini; on déterminera les points I et J' conjugués de l'infini dans les deux divisions déterminées par les trois couples (α, α'), (β, β'), (γ, γ'); les droites menées par I parallèlement à $d\omega$ et par J' parallèlement à $d\omega'$ seront les asymptotes.

Indiquons maintenant la solution fondée sur le théorème de Pascal. — Pour avoir le point f où une droite quelconque menée par a rencontre la courbe, on considérera l'hexagone inscrit dont les sommets seraient a, b, c, d, e, f (*fig.* 212). On prendra le point n commun aux côtés opposés af et cd, le point l commun à ab et de; la droite nl contiendra le point de concours du côté bc et du côté inconnu ef; on aura donc ce point de concours m par la rencontre de bc et de ln. Dès lors, les droites af et me donneront le point demandé f. — On obtient la tangente en a en considérant le pentagone $abcde$ comme un hexagone $abcdef$ dont deux sommets voisins a et f seraient confondus; le côté af est alors remplacé par la tangente en a, qu'il s'agit de déterminer. A cet effet, on prendra l'intersection l de baf et de de, l'intersection m de bc et de ea; la droite ml sera la droite qui joint les points de concours des couples de côtés opposés; elle contiendra donc le point de concours de cd et de la tangente en a; ce point sera donc à la rencontre n de cd et de ml, et an sera la tangente cherchée. Ces constructions sont, au fond, d'une grande simplicité.

La tangente en a une fois connue, on peut trouver les éléments de la courbe par la théorie des figures homologiques, comme nous l'avons expliqué au n° 1179, 3°.

Nous devons faire connaître ici une généralisation remarquable du théorème de Pascal, qui est due à M. Aubert (*Nouvelles Annales*, 3e série, tome VIII) et qui donne neuf points en ligne droite.

La proposition de M. Aubert peut s'énoncer ainsi :

Si deux triangles ABC, A'B'C' *inscrits dans une conique sont homologiques, et si l'on prend un point* I *sur la conique, les points de concours* α, β, γ *des droites* BC *et* IA', CA *et* IB', AB *et* IC' *sont situés sur une même droite* L *passant par le centre d'homologie* D.

En effet, considérons les trois hexagones IA'ABCC', IB'BCAA', IC'CABB'; ils ont un sommet commun I et chacun des autres sommets se déduit de ceux de l'hexagone précédent par une permutation circulaire effectuée sur les lettres. Les trois droites de Pascal corres-

pondantes

$$\begin{vmatrix} IA' & A'A & AB \\ BC & CC' & IC' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} IB' & B'B & BC \\ CA & AA' & IA' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} IC' & C'C & CA \\ AB & BB' & IB' \end{vmatrix}$$

sont

$$\alpha D\gamma, \quad \beta D\alpha, \quad \gamma D\beta.$$

Chacune d'elles ayant deux points communs avec chacune des deux autres, ces trois droites coïncident et, par suite, les points α, β, γ, D sont en ligne droite.

Ce théorème a de nombreuses conséquences; nous signalerons seulement son application à la construction d'une conique donnée par cinq points I, A, B, A', B'.

Par le point de concours D de AA' et BB', menons une droite quelconque L et soient α, β, γ les points où L rencontre IA', IB' et AB. Les droites αB et βA donnent un point C de la conique, et les droites CD et Iγ en donnent un autre C'.

En conservant le même point I, on peut échanger soit simultanément, soit séparément, les lettres A et A' d'une part, B et B' de l'autre. Avec chacune de ces nouvelles combinaisons de points, la même droite L fournit deux nouveaux points de la conique; on obtient donc huit points de la conique à l'aide de cette droite L.

1188. On a souvent à déterminer une conique par des conditions autres que celles de passer par des points ou de toucher certaines droites.

On dit qu'une condition est *simple* lorsque la recherche d'une conique assujettie à remplir cette condition et à passer en outre par quatre points est un problème déterminé.

Il est évident, d'après cela, que *donner un point* ou *une tangente* équivaut à une condition simple (1186), et qu'il faut cinq conditions simples pour déterminer une conique.

Une tangente et son point de contact valent deux conditions; par suite, il en est de même d'une asymptote; une parallèle à une asymptote ne vaut qu'une condition, puisque cela revient à donner un point situé à l'infini sur cette parallèle.

Un point p du plan et sa polaire P valent deux conditions; car, si l'on donne en outre trois points a, b, c, de la conique, on aura trois nouveaux points a', b', c', de la courbe en prenant les conjugués harmoniques de a, b, c, par rapport aux segments interceptés sur les droites pa, pb, pc, entre le point p et sa polaire P. — *Un point du plan et un point de sa polaire* équivalent à une seule condition.

Le *centre* vaut deux conditions, puisque c'est le pôle de la droite de l'infini.

Un *foyer* vaut aussi deux conditions, puisque les droites qui joignent ce point aux deux points cycliques du plan sont tangentes à la conique. On peut aussi remarquer qu'un foyer f et trois points a, b, c, déterminent la conique : la directrice coupe en effet la droite ab sur la bissectrice du supplément de l'angle afb (1158), etc.

Un *axe* vaut deux conditions, puisque, si l'on donne en outre trois points de la conique, on a trois nouveaux points de cette courbe en prenant les symétriques des premiers par rapport à l'axe. Il résulte de là qu'un *sommet* équivaut à deux conditions, car, si l'on donne en outre la tangente en ce point, on aura par là même un axe et un point, c'est-à-dire trois conditions.

Dire qu'une conique est une parabole équivaut à une condition, puisque c'est donner une tangente (la droite de l'infini). — *Dire que la conique est un cercle* équivaut à deux conditions, puisque c'est donner deux points de la courbe (les deux points cycliques du plan). — *Savoir qu'une conique est une hyperbole équilatère* équivaut à une condition ; cela résulte de ce que deux points A et B et une asymptote L (c'est-à-dire quatre conditions) déterminent une hyperbole équilatère. En effet, le théorème des sécantes donne le point où la corde AB coupe l'autre asymptote qui est dès lors déterminée puisqu'elle est perpendiculaire à la première.

1189. A tout système de *quatre* conditions simples répondent une infinité de coniques formant un groupe. Soient μ et ν les nombres des coniques du groupe qui remplissent, outre les quatre conditions données, celle de passer par un point donné ou de toucher une droite donnée. Les nombres μ et ν ont reçu le nom de *caractéristiques* du groupe considéré.

Il résulte des solutions données aux n°s 1186 et suivants que les groupes de coniques passant par quatre points, passant par trois points et touchant une droite, passant par deux points et touchant deux droites, passant par un point et touchant trois droites, touchant quatre droites, ont respectivement pour caractéristiques

$$(\mu = 1, \nu = 2), \quad (2, 4), \quad (4, 4), \quad (4, 2), \quad (2, 1).$$

Les propriétés d'un groupe de coniques dépendent essentiellement des caractéristiques de ce groupe, et l'étude de cette dépendance constitue une belle théorie créée tout récemment par M. Chasles et par ses continuateurs, de Jonquières, Zeuthen, etc. Nous ne saurions exposer même les principes de cette théorie sans sortir de notre cadre ; nous nous bornerons à offrir au lecteur un exemple très-simple.

Le lieu des pôles d'une droite fixe L, *par rapport aux coniques du*

groupe qui a pour caractéristiques μ *et* ν, *est une ligne de l'ordre* ν. En effet, la droite L ne peut rencontrer le lieu qu'autant qu'elle contient un pôle, c'est-à-dire que lorsqu'elle touche l'une des coniques du système; or le nombre des coniques du groupe qui touchent une droite quelconque et par suite la droite donnée, est par hypothèse égal à ν.

On conclut de là, en supposant la droite L à l'infini, que *le lieu des centres des coniques passant par quatre points donnés* est de l'ordre 2, c'est-à-dire *est une conique*, et que le *lieu des centres des coniques tangentes à quatre droites* est de l'ordre 1, c'est-à-dire est *une ligne droite*; nous avons déjà trouvé ces deux théorèmes par une autre voie.

1190. *Construire les points communs à deux coniques* Σ *et* Σ'.

On commencera par chercher les pôles doubles (1171). Pour cela, on construira une conique auxiliaire G, lieu des points de rencontre des polaires par rapport à Σ et à Σ' des divers points d'une droite L choisie à volonté. On construira de même une seconde conique auxiliaire G', définie de la même manière relativement à une seconde droite L' prise aussi arbitrairement. Ces deux coniques G et G' auront évidemment en commun le point ω d'intersection des polaires par rapport à Σ et à Σ' du point de rencontre des droites L et L'; elles auront donc trois autres points communs; ces points seront les pôles doubles p, p', p''. En effet, soit m l'un de ces points communs; puisqu'il appartient à la conique G, il sera le rencontre des polaires d'un certain point n de L et, par suite, inversement, les polaires de m passeront par n; de même, puisque m appartient à la conique G', ses polaires passeront par un certain point n' de la droite L'; donc les polaires du point m coïncideront l'une et l'autre avec la droite nn', ce qui démontre que m est un pôle double.

Cela posé, deux cas peuvent se présenter :

Si les coniques auxiliaires G et G' n'ont que deux points communs réels ω et p, il n'y aura qu'un pôle double réel. On déterminera alors les deux cordes communes qui passent par ce point; leurs intersections avec l'une des coniques seront les points demandés; deux d'entre eux seulement seront réels (1171). Pour avoir les deux cordes communes, on prendra deux points à volonté u et v; on cherchera le point commun u' aux deux polaires de u et le point commun v' aux deux polaires de v; les cordes communes demandées diviseront harmoniquement les deux angles upu', epv': en effet, la polaire de u par rapport au système des deux cordes communes passe (1174) par u'; cette polaire est donc pu', et, par suite, pu et pu' sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux cordes communes.

Si les coniques auxiliaires G et G' ont quatre points communs réels ω, p, p', p'', il y a trois pôles doubles réels p, p', p''; par chacun d'eux passe un couple de cordes communes, et l'un de ces couples au moins est réel.

on le déterminera comme ci-dessus, et l'on prendra les intersections des droites du couple avec l'une des coniques; les quatre points seront tous réels ou tous imaginaires.

On voit que la solution consiste à réduire la question à la recherche analogue pour deux autres coniques qui passent par un point connu. On remplace ainsi un problème du quatrième degré par un problème du troisième; au fond, on ne fait pas autre chose en Géométrie analytique, puisqu'on y ramène la question à la résolution d'une équation du troisième degré connue sous le nom d'*équation en* λ.

La *recherche des tangentes communes* s'effectue par des tracés corrélatifs des précédents et qu'il suffit, dès lors, d'indiquer d'une manière rapide.

Autour d'un point pris à volonté, on fait tourner une droite dont on prend les pôles par rapport à Σ et à Σ'; la droite qui joint ces pôles enveloppe une conique auxiliaire. Un second point, choisi aussi d'une manière arbitraire, donne d'une manière analogue une seconde conique. Ces deux coniques auxiliaires touchent l'une et l'autre la droite ω passant par les pôles de la ligne qui unit les deux points choisis; elles ont donc trois autres tangentes communes, dont l'une au moins est réelle: ce sont les polaires doubles P, P', P''.

On pourrait d'ailleurs obtenir ces polaires doubles en déterminant d'abord les pôles doubles p, p', p'', comme au problème précédent, puis prenant leurs polaires par rapport à l'une des coniques données Σ et Σ'.

Cela posé, il peut se présenter deux cas :

Si une seule P des polaires doubles est réelle, on déterminera les deux ombilics placés sur cette droite, et par ces ombilics on mènera à l'une des coniques données des tangentes, dont deux seulement seront réelles. Pour trouver ces ombilics, on prend deux droites arbitraires U et V, on cherche la droite U' qui joint les pôles de U et la droite V' qui joint les pôles de V; les deux ombilics devront diviser harmoniquement chacun des deux segments interceptés sur P par U et U' et par V et V'.

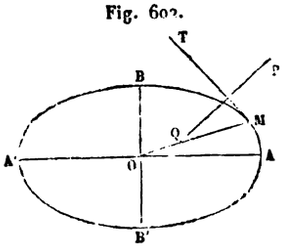
Si les trois polaires doubles P, P', P'', sont réelles, chacune d'elles contiendra un couple d'ombilics; l'un au moins de ces couples sera réel, et on le déterminera comme ci-dessus; puis, de ces points, on mènera à l'une des coniques données des tangentes qui seront toutes les quatre réelles ou toutes les quatre imaginaires.

1191. *Mener une normale à une conique* C *par un point* P *donné dans son plan* (*fig.* 602).

MT étant une tangente à la conique et OM le diamètre qui aboutit au point de contact M, abaissons du point P la perpendiculaire sur MT, et prenons le point Q où cette perpendiculaire rencontre OM. Quand le point

M décrit la conique, la perpendiculaire qui tourne autour de P et le diamètre OM qui tourne autour du centre O de la conique décrivent deux faisceaux qui sont homographiques, puisque chacun d'eux est homographique du faisceau formé par la rotation du diamètre conjugué de OM. Le lieu du point Q est donc une conique H (1131) qui passe par les points O et P, qui touche au point P le rayon homologue de OP, c'est-à-dire la

Fig. 602.



perpendiculaire abaissée de P sur la tangente à la conique C au point où OP rencontre cette conique, et qui touche au point O le rayon homologue de PO, c'est-à-dire le diamètre qui aboutit au point de contact de la tangente perpendiculaire à PO. Enfin, cette conique H est une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes de la conique C; on voit en effet que, quand OM coïncide avec l'un des axes, le point Q passe à l'infini sur cet axe. Cela posé, si M_1 est le pied d'une normale menée du point P sur la conique C, PM_1 est perpendiculaire à la tangente au point M_1; ce pied M_1 appartient donc au lieu H. On aura donc les pieds des normales en cherchant les points communs à la conique proposée C et à l'hyperbole H, qui est bien déterminée, puisqu'on en connaît deux points, les tangentes en ces points et les directions des asymptotes. Le problème a quatre solutions qui peuvent se réduire à deux. En particulier, quand le point P est sur l'un des axes, l'hyperbole se décompose en deux droites rectangulaires dont l'une est cet axe même. Dans le cas où la conique proposée C est une parabole, l'axe de cette parabole est une asymptote de l'hyperbole équilatère H, qui est ainsi bien déterminée, puisqu'on connaît en outre un de ses points P et la tangente en ce point; les deux courbes C et H ont alors, en commun, outre un point à l'infini, trois points dont l'un au moins est réel; d'où il suit que le problème a trois solutions ou une seule. Enfin, quand le point P est sur l'axe de la parabole C, l'hyperbole H se réduit à deux droites dont l'une est cet axe lui-même et l'autre la perpendiculaire à cet axe située à une distance du point P égale au paramètre (1045).

L'emploi de cette hyperbole équilatère pour résoudre le problème des normales remonte à Apollonius. En transformant la solution précédente

par polaires réciproques, la conique donnée étant prise pour directrice, on tomberait sur une nouvelle solution, dans laquelle les pieds des normales seraient les points où la conique C est touchée par les tangentes communes à cette conique et à une parabole aisée à déterminer. Ajoutons enfin qu'en prenant pour inconnues, non les pieds des normales, mais les points où la conique C est rencontrée par les perpendiculaires menées de l'un de ses sommets sur les quatre normales, on trouverait ces points par la rencontre de la conique donnée et d'un cercle (*voir* JOACHIMSTHAL, *Journal de Crelle*, t. XLVIII ; et SMITH, *Annales de Tortolini*, 2e série, t. III).

Nous devons encore signaler sur ce sujet une proposition remarquable due à Joachimsthal.

Si d'un point on mène des normales à une ellipse, trois des points d'incidence N, P, Q, *et le point* M_1 *diamétralement opposé au quatrième* M *sont sur un même cercle.*

En effet, d'après le théorème de Desargues, l'ellipse, l'hyperbole d'Apollonius et le système des cordes communes MN et PQ déterminent sur chacun des axes de l'ellipse une involution ; et, comme dans chacune de ces involutions le point conjugué de l'infini est évidemment le centre O de l'ellipse, on a, en désignant par A_1 et B_1 les points où les axes coupent MN et par A_2 et B_2 les points où les axes coupent PQ,

$$OB.OB' = OB_1.OB_2, \quad OA.OA' = OA_1.OA_2;$$

d'où, par division,

$$\frac{OB_1}{OA_1} \cdot \frac{OB_2}{OA_2} = \frac{b^2}{a^2},$$

ce qui exprime que le produit des coefficients angulaires des deux cordes MN et PQ est égal à $\frac{b^2}{a^2}$; mais le produit des coefficients angulaires des deux cordes supplémentaires NM et NM_1 est (1146, 1147) égal à $-\frac{b^2}{a^2}$. Donc les cordes PQ et NM_1 ont des coefficients angulaires égaux et de signes contraires ; en d'autres termes, ces cordes sont également inclinées sur les axes de l'ellipse. Par suite (1175), les points P, Q, N et M_1 sont sur un même cercle.

Le théorème et la démonstration subsistent pour l'hyperbole.

QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS A LA PARABOLE ET A L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE.

1192. *Construire une parabole connaissant deux tangentes* $A\beta$, $A\gamma$ *et la corde de contact* $\beta\gamma$ (*fig.* 603).

Ce problème se présente souvent en Mathématiques appliquées et notamment en Statique graphique.

La théorie des diamètres fournit un premier tracé par points et tangentes : on joint le point A au milieu O de la corde $\beta\gamma$; le milieu I de AO est un point de la courbe et la tangente en ce point I est parallèle à $\beta\gamma$. On continuera en opérant de même sur les angles circonscrits formés par la nouvelle tangente et les deux tangentes primitives.

Un autre tracé fort simple résulte du théorème suivant : *Si, par un point quelconque* M *de la corde de contact* $\beta\gamma$ *d'un angle* $\beta A\gamma$ *circonscrit à une parabole, on mène des parallèles* MB, MC *aux côtés de cet angle, la diagonale* BC *du quadrilatère* ABMC *ainsi formé est tangente à la parabole.* En outre, *on obtient le point de contact* α *de cette tangente* BC *en prenant* $C\alpha = O_1B$, O_1 *désignant le point où* BC *rencontre la médiane* AO *du triangle* $\beta A\gamma$. En effet, on sait (1154) que, pour qu'une droite mobile BC soit tangente à une parabole, il faut et il suffit qu'elle détermine sur deux tangentes fixes, $A\gamma$ et $A\beta$, des segments homologues proportionnels, c'est-à-dire que l'on ait

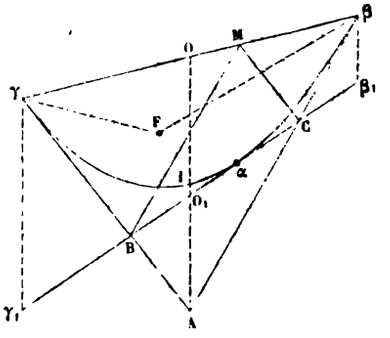
$$\frac{\gamma B}{BA} = \frac{AC}{C\beta}.$$

Or cette condition est ici remplie, car les deux rapports précédents sont respectivement égaux à

$$\frac{\gamma B}{MC}, \quad \frac{BM}{C\beta},$$

dont l'égalité résulte de la similitude des triangles $MB\gamma$, βCM.

Fig. 603.



La première partie de l'énoncé se trouve ainsi établie. Pour démon-

trer la seconde, il suffit d'appliquer le théorème que nous venons de rappeler aux deux tangentes $B\alpha$, $B\gamma$ coupées par la tangente AC et aux deux tangentes $C\beta$ et $C\alpha$ coupées par la tangente AB. On obtient ainsi les deux proportions

$$\frac{\gamma A}{AB} = \frac{BC}{C\alpha}, \quad \frac{\beta A}{AC} = \frac{CB}{B\alpha}$$

qui, si l'on désigne par O_1, γ_1 et β_1 les points où BC rencontre AO et les parallèles à AO menées par γ et β, peuvent être remplacées par

$$\frac{\gamma_1 O_1}{O_1 B} = \frac{BC}{C\alpha}, \quad \frac{\beta_1 O_1}{O_1 C} = \frac{CB}{B\alpha};$$

on en conclut, en observant que $\gamma_1 O_1 = O_1 \beta_1$, la relation

$$\frac{O_1 B}{C\alpha} = \frac{CO_1}{\alpha B},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{O_1 B}{C\alpha} = \frac{CO_1 + O_1 B}{C\alpha + \alpha B} = \frac{CB}{CB} = 1$$

ou

$$C\alpha = O_1 B. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On peut aisément déterminer les éléments fondamentaux de la parabole, c'est-à-dire le foyer F et la directrice Δ.

Le tracé que l'on donne habituellement pour déterminer le foyer F consiste à prendre l'intersection de la droite γF symétrique de $\gamma\gamma_1$ par rapport à γA et de la droite βF symétrique de $\beta\beta_1$ par rapport à βA; c'est une conséquence immédiate de l'égale inclinaison de la tangente à la parabole sur le rayon vecteur et la parallèle à l'axe. M. Maurice d'Ocagne a fait observer (*Génie civil*, tome IX, page 91) que ce tracé devenait illusoire lorsque l'angle $\gamma A \beta$ formée par les tangentes données est droit, et il a proposé la solution suivante qui convient à tous les cas : *Élevez en* A *et* β *des perpendiculaires sur* $A\beta$, *en* A *et* γ *des perpendiculaires sur* $A\gamma$; *le foyer* F *sera la projection du point* A *sur celle des diagonales du parallélogramme ainsi formé qui ne passe pas par* A. Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de ce tracé, attendu qu'il nous semble préférable, pour la détermination du foyer et de la directrice, de recourir au théorème suivant :

Si un triangle ABC *a ses côtés tangents à une parabole, le cercle circonscrit passe par le foyer* F *et le point de concours* H *des hauteurs est sur la directrice* Δ. En effet, la tangente au sommet de la parabole, contenant les projections du foyer F sur les tangentes, est la droite de

Simson (169, 11°) relativement au triangle ABC et au point F; ce point F appartient donc au cercle circonscrit au triangle ABC. La seconde partie de l'énoncé résulte de ce que la droite de Simson est équidistante des points F et H (1).

Si l'on applique successivement ce théorème au cas où la tangente variable $B\alpha C$ se confond avec l'une et l'autre des tangentes fixes données $AB\gamma$, $AC\beta$, on voit que :

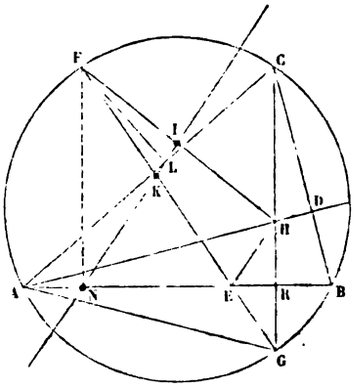
Le foyer F *est le second point d'intersection de deux cercles d...*

---

(1) Cette propriété de la droite de Simson a été seulement énoncée au n° 169. Voici sa démonstration (*fig.* 604) :

Remarquons d'abord que si l'on prolonge la hauteur CHR jusqu'à sa rencontre G avec le cercle circonscrit au triangle ABC, on a RG = RH; car, les angles RAG, RAH étant l'un et l'autre égaux à HCD, sont égaux entre eux; les triangles rectangles ARG, ARH sont donc égaux et, par suite, RG est égal à RH. Cela posé, soit F un point quelconque du cercle circonscrit, N et L les pro-

Fig. 604.



jections de F sur AB et AC, enfin E et K les points où FG rencontre le côté AB et la droite de Simson NL. Le quadrilatère AFLN est inscriptible, puisque des points N et L on voit AF sous un angle droit; on en conclut l'égalité des angles FNK, FAC; mais ce dernier angle a même mesure que FGC, lequel est égal à NFK puisque FN et CG sont parallèles. Donc les angles FNK, NFK sont égaux et, par suite, les droites KF et KN sont égales. On déduit de là, puisque le triangle FNE est rectangle en N, que K est le milieu de l'hypothénuse FE et que l'angle KNE est égal à KEN ou encore à HER, vu la symétrie de EH et de EG par rapport à AB. D'après cela, la droite de Simson NKL est parallèle à EH et passe par le milieu K de FE; elle doit donc passer par le milieu I de FH.

l'un passe par β *et touche en* A *la droite* Aγ *et dont l'autre passe par* γ *et touche en* A *la droite* Aβ.

La directrice Δ *est la diagonale ne passant pas par* A, *du parallélogramme formé en menant par* A *et* β *des perpendiculaires à* Aγ *et par* A *et* γ *des perpendiculaires à* Aβ. D'ailleurs, dès qu'on a le foyer F, la directrice Δ s'ensuit, puisqu'elle doit contenir les symétriques de F par rapport aux deux tangentes données.

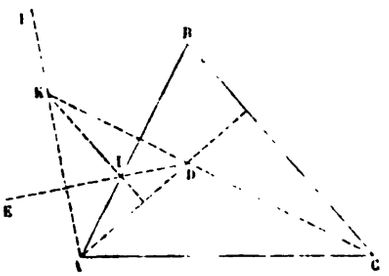
1193. *Construire une hyperbole équilatère dont on donne quatre points.*

La solution est fondée sur la proposition suivante (*fig.* 605) :

Quand un triangle ABC *est inscrit dans une hyperbole équilatère, le point de concours* H *des hauteurs est situé sur l'hyperbole et le cercle des neuf points passe par le centre* ω *de la courbe.*

En effet, soit D le second point d'intersection de l'hyperbole et de la hauteur issue du point C; la première partie de l'énoncé revient à dire que le point D n'est autre que H. Or, menons AF parallèle à l'une des asymptotes et DE parallèle à l'autre; désignons d'ailleurs par K le point

Fig. 605.

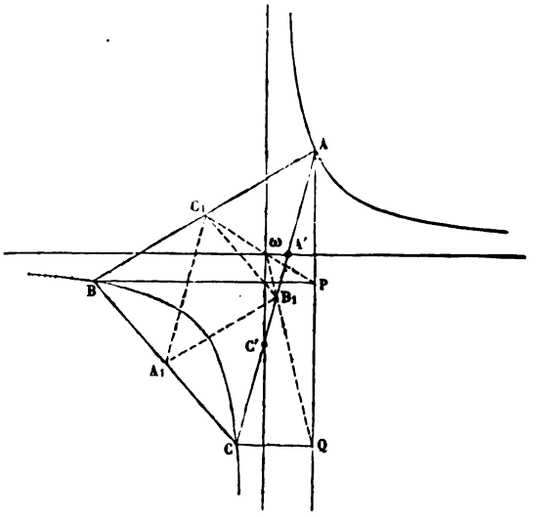


commun à AF et à CD et par I le point commun à DE et à AB. Le théorème de Pascal, appliqué à l'hexagone ABCDEF dont les derniers sommets sont à l'infini, montre que IK est parallèle à BC; mais AD est perpendiculaire à IK, puisque I est le point de concours des hauteurs du triangle ADK; donc AD est perpendiculaire à BC, et le point D ne diffère pas du point de concours H des hauteurs du triangle ABC.

Considérons la deuxième partie de l'énoncé (*fig.* 606); soient A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés du triangle ABC; désignons par P et Q les projections de B et C sur la parallèle menée par A à l'une des asymptotes de l'hyperbole, de sorte que les projetantes BP, CQ sont parallèles à l'autre asymptote; enfin soient A′ et C′ les points où AC coupe

les asymptotes. Le point B_1 sera, d'après la propriété des sécantes de l'hyperbole, à la fois le milieu de AC et celui de A'C'; ce sera donc le centre d'homothétie des deux triangles à côtés parallèles ACQ, A'ωC : donc ωB_1 passe par Q et, de même, ωC_1 passe par P. Cela posé,

Fig. 606.



est aisé de voir que les angles sous lesquels on voit du point A et du point ω la droite B_1C_1 sont égaux ou supplémentaires (ils sont supplémentaires sur notre figure où ω et A sont placés du même côté de B_1C_1); donc les angles sous lesquels on voit B_1C_1 du point A_1 et du point ω sont aussi égaux ou supplémentaires et, par suite, le point ω appartient à la circonférence de cercle passant par A_1, B_1, C_1.

Chacune des deux parties du théorème précédent fournit un mode de solution du problème qui consiste à construire une hyperbole passant par quatre points donnés A, B, C, D.

D'après la première partie, on construira le point de concours H des hauteurs de l'un quelconque des quatre triangles ayant pour sommets trois des points donnés, et l'on sera ainsi ramené à la construction d'une conique dont on connaît cinq points A, B, C, D, H. Le problème a une infinité de solutions, si l'un des quatre points donnés est le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par les trois autres.

D'après la seconde partie, on déterminera le point commun aux cercles

des neuf points relatifs aux quatre triangles que l'on peut former avec les points donnés. Ce point ω sera le centre de l'hyperbole dont on obtiendra un cinquième point, en prenant le symétrique par rapport au centre de l'un des points donnés. Il y a indétermination dans le cas déjà cité, les quatre cercles des neuf points coïncidant.

Il est d'ailleurs facile de trouver les asymptotes de l'hyperbole; du milieu B_1 de AC comme centre, avec un rayon égal à $B_1\omega$, on décrira un cercle qui coupera AC aux points A′ et C′ où les asymptotes rencontrent ce côté.

III. — THÉORIE DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

PÔLE ET PLAN POLAIRE.

1194. On nomme *surfaces du second ordre* les surfaces dont toute section plane est une conique réelle ou imaginaire; d'où il suit qu'une droite quelconque a, avec une telle surface, deux points communs réels ou imaginaires, à moins qu'elle n'appartienne tout entière à la surface.

Si, par un point quelconque p de l'espace, on mène une droite quelconque L, *et si l'on prend sur cette droite le conjugué harmonique p′ de p par rapport aux deux points m et m′ communs à la droite* L *et à une surface du second ordre* Σ, *le lieu des points p′, quand* L *se déplace autour de p, est un plan fixe* ϖ.

Observons d'abord que, si l'on mène deux plans quelconques par p, et si l'on prend les polaires de p par rapport aux deux coniques que ces plans déterminent sur la surface Σ, ces deux polaires ont un point commun : c'est le conjugué harmonique de p qui est situé sur l'intersection des deux plans. Cela posé, concevons par le point p deux plans fixes α et β arbitraires et un plan quelconque γ contenant la droite L; soient A, B, C les polaires de p par rapport aux coniques que les plans α, β, γ, déterminent sur la surface Σ. Le point p' est situé sur C; d'ailleurs, d'après l'observation ci-dessus, la droite C rencontre les droites fixes A et B qui se rencontrent elles-mêmes. Donc le point p' est constamment situé dans le plan fixe ϖ des deux droites A et B.

Le plan ϖ est dit le *plan polaire* du point p, et le point p est dit le *pôle* du plan ϖ, par rapport à la surface Σ.

Le plan polaire d'un point de la surface Σ *est le plan tangent en ce point*, puisque ce plan tangent contient toutes les tangentes en p aux sections faites par ce point, c'est-à-dire toutes les polaires de p par rap-

port à ces sections; inversement, *tout plan tangent a pour pôle son point de contact.*

La courbe de contact de tout cône circonscrit à la surface Σ *est la conique suivant laquelle le plan polaire* ϖ *du sommet p coupe la surface*; si cette conique est réelle, le point *p* est dit *extérieur* à la surface; si elle est imaginaire, le cône cesse d'exister, et le point *p* est dit *intérieur.* — *Par une droite donnée, on ne peut* donc *mener que deux plans tangents à une surface du second ordre* Σ; car les plans tangents qu'on peut mener à une surface par une droite donnée sont les plans tangents menés par cette droite au cône qui a pour sommet un point quelconque de cette droite, et qui est circonscrit à la surface. — Il résulte de là que les surfaces du second ordre sont de la deuxième *classe*, en entendant par classe d'une surface le nombre des plans tangents qu'on peut mener à cette surface par une droite.

1195. *Le plan polaire de tout point d'un plan passe par le pôle de ce plan*, et, réciproquement, *le pôle de tout plan passant par un point est sur le plan polaire de ce point.* Par suite, *les plans polaires de tous les points d'une droite* L *passent par une droite* L', et, inversement, *les pôles de tous les plans passant par une droite* L' *sont sur une droite* L. Deux droites L et L', telles que l'une contient les pôles des plans passant par l'autre, sont dites *conjuguées.* A toute droite L répond une droite conjuguée L', et une seule; on l'obtient en joignant les pôles de deux plans menés à volonté par L, et en particulier en joignant les points de contact des plans tangents conduits par L.

Le pôle d'une droite L par rapport à la section faite dans la surface par un plan α contenant la droite L coïncide avec le pôle par rapport à la surface du plan que déterminent la droite L et le pôle *a* du plan α; il appartient donc à la conjuguée L' de L. Donc, *si l'on coupe une surface du second ordre* Σ *par une série de plans contenant une même droite* L, *les pôles de cette droite* L *par rapport aux diverses sections sont sur une droite* L' *qui contient encore les pôles de tous ces plans sécants par rapport à la surface et, en particulier, les points de contact des deux plans tangents conduits par la droite primitive* L.

Lorsque quatre points sont en ligne droite, leurs plans polaires forment un faisceau dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre points.

Lorsque quatre droites concourantes sont situées dans un même plan, leurs conjuguées forment un faisceau plan qui a même rapport anharmonique que le faisceau primitif.

1196. Deux *points* sont dits *conjugués* par rapport à une surface du second ordre, lorsque le plan polaire de l'un passe par l'autre. *Plusieurs*

couples de points conjugués sur une même droite forment une involution, dont les points doubles sont les points communs à la droite et à la surface.

Deux *plans* sont dits *conjugués* par rapport à une surface du second ordre lorsque le pôle de l'un est situé sur l'autre. *Plusieurs couples de plans conjugués passant par une même droite forment un faisceau de plans en involution* (c'est-à-dire un faisceau que toute transversale coupe suivant une suite de points en involution); les plans doubles sont les deux plans tangents menés par la droite; il suit de là que, par *une droite quelconque, on peut toujours mener deux plans conjugués rectangulaires.*

Une *droite* et un *plan* sont dits *conjugués* par rapport à une surface du second ordre lorsque la droite passe par le pôle du plan. Quand un plan et une droite sont conjugués, le plan contient évidemment la conjuguée de la droite.

Tout point p de l'espace est le sommet d'une infinité d'angles trièdres dont chaque arête est conjuguée à la face opposée; car il suffit, pour avoir un tel trièdre, de joindre le point p à trois points a, b, c, choisis dans le plan polaire ϖ de p, de façon que chaque sommet du triangle abc soit le pôle du côté opposé par rapport à la conique que le plan ϖ détermine sur la surface. Un tel trièdre prend le nom de trièdre *polaire*.

PLANS DIAMÉTRAUX, DIAMÈTRES, CENTRE; SECTIONS PARALLÈLES.

1197. *Dans toute surface du second ordre, le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée est un plan :* c'est le plan polaire des points à l'infini communs à toutes ces parallèles. On donne à ce plan le nom de *plan diamétral conjugué à la direction des cordes.*

Le pôle du plan à l'infini est évidemment *commun à tous les plans diamétraux;* on le nomme *centre* de la surface.

Toute corde passant par le centre a son milieu en ce point et prend le nom de *diamètre.*

Un *diamètre* et un *plan diamétral* sont dits *conjugués* lorsque le diamètre passe par le pôle du plan diamétral (1196). A chaque diamètre répond un seul plan diamétral conjugué, et réciproquement.

1198. Le centre est le sommet d'une infinité d'angles trièdres polaires (1196), c'est-à-dire de trièdres dont chaque arête est le diamètre conjugué du plan diamétral déterminé par les deux autres. Les trois arêtes forment un système de trois diamètres conjugués deux à deux, et les trois faces un système de trois plans diamétraux conjugués deux à deux.

1199. *Si l'on coupe une surface du second ordre* Σ *par une série de plans parallèles* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, c'est-à-dire par une série de plans ayant une droite com-

mune L à l'infini, *les centres des sections seront* les pôles de cette droite L par rapport à ces sections : ils seront donc (1195) *tous situés sur une même droite* L' qui contient aussi les pôles des plans $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, par rapport à la surface ; cette droite est le *diamètre conjugué du plan diamétral* α *parallèle aux plans considérés*, puisqu'elle renferme à la fois le centre de la section faite par ce plan α et le pôle de ce plan. Les deux plans tangents parallèles aux plans considérés auront leurs pôles, c'est-à-dire leurs points de contact, sur cette droite L', d'où l'on voit que *tout plan tangent à une surface du second ordre est parallèle au plan diamétral conjugué du diamètre qui passe par le point de contact*. Enfin, si l'on mène deux plans conjugués quelconques par le diamètre L', le premier coupera les plans α_1, $\alpha_2, \ldots$, suivant des droites $A_1, A_2, \ldots$, parallèles entre elles ; le second coupera les mêmes plans suivant des droites $A'_1, A'_2, \ldots$, parallèles entre elles ; d'ailleurs les couples $(A_1, A'_1), (A_2, A'_2), \ldots$, seront des diamètres conjugués des sections $C_1, C_2, \ldots$, faites par les plans $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Ainsi, à chaque système de diamètres conjugués dans la conique C_1 répondra, dans chacune des coniques $C_2, \ldots$, un système de diamètres conjugués respectivement parallèles à ceux de C_1. Donc *les sections* $C_1, C_2, \ldots$, *faites par des plans parallèles dans une surface du second ordre, sont semblables et semblablement placées*.

PLANS PRINCIPAUX ET SECTIONS CIRCULAIRES.

1200. Un plan diamétral est dit *principal* lorsqu'il est perpendiculaire aux cordes qu'il divise en deux parties égales ; le diamètre parallèle à ces cordes, c'est-à-dire le diamètre conjugué du plan principal, prend le nom d'*axe*.

La recherche des plans principaux et celle des sections circulaires dépendent des mêmes principes. Mais, avant d'aborder ce double problème, nous devons généraliser quelques idées émises en Géométrie plane.

On sait qu'un plan coupe une sphère suivant un cercle dont le rayon r est égal à

$$\sqrt{R^2 - d^2},$$

R désignant le rayon de la sphère et d la distance du centre au plan sécant. Si d est plus grand que R, le cercle cesse d'exister ; mais, pour généraliser et en vertu de considérations que nous avons déjà indiquées plusieurs fois, on dit dans ce cas que la section est un *cercle imaginaire* dont le rayon a encore pour carré la quantité $R^2 - d^2$, qui est alors négative. Il est clair que les formules où entre le carré du rayon d'un cercle et les propositions géométriques qui en sont la traduction subsistent dans le cas où le carré du rayon devient négatif ; mais, les points ou les droites que l'on considère dans ces théorèmes n'ayant plus dans le second cas

les mêmes positions que dans le premier, il faudrait, si l'on excluait la considération du cercle imaginaire, employer dans les deux cas des énoncés différents, qu'aucun lien apparent ne rattacherait l'un à l'autre, tandis que l'emploi du cercle imaginaire permet de n'avoir qu'un théorème et d'exprimer la propriété dont il s'agit d'une manière plus saisissante et qui fait image.

Voici un exemple très-simple qui fera bien comprendre notre idée :

On sait que la polaire P d'un point p par rapport à un cercle de centre o est la droite menée perpendiculairement au diamètre op par le point p' de ce diamètre que détermine la relation

$$(1) \qquad op.op' = r^2,$$

et l'on a démontré que les polaires des divers points d'une droite L passent par un même point. Dans cette définition de la polaire, aussi bien que dans la démonstration du théorème cité, le cercle n'a aucune part, et l'on ne fait intervenir en somme que les points o et p et la quantité r^2. La proposition subsiste donc dans le cas où r^2 est négatif; seulement, alors, il n'y a en réalité plus de cercle; la droite P, toujours définie par la relation (1), n'est plus, par rapport au point o, du même côté que le point p, et le théorème prend la forme suivante : *Si, par les divers points p d'une droite* L, *on mène à un point fixe o des rayons po sur lesquels on marque des points p' déterminés par la relation* (1), *les perpendiculaires élevées par ces points p' sur les rayons correspondants passeront par un point fixe.* On voit combien cet énoncé est lourd, et combien il est à la fois plus simple et plus clair d'exprimer le même fait en conservant l'énoncé primitif, à la condition de dire que le cercle est alors imaginaire et de donner à la droite P le nom de *polaire du point p par rapport à ce cercle imaginaire.* Bien que se rapportant à un cercle imaginaire, la proposition n'en aura pas moins une signification parfaitement précise et portant en définitive sur des choses réelles.

La formule (1) est susceptible d'une interprétation géométrique fort utile.

Supposons r^2 négatif, et soit r'^2 sa valeur absolue. Menons par o une droite perpendiculaire au plan et égale à r'; s étant l'extrémité de cette perpendiculaire, on aura

$$op.op' = os^2,$$

ce qui prouve que l'angle psp' est droit. On a donc ce théorème :

Si, par le centre o d'un cercle imaginaire, on mène une droite os perpendiculaire au plan du cercle et égale à son rayon supposé réel, la droite qui joint le point s à un point quelconque p du plan du cercle est perpendiculaire au plan qui passe par le point s et par la polaire P *du point p par rapport au cercle imaginaire.*

1201. Nous avons vu (1111) que tous les cercles d'un plan coupent la droite à l'infini de ce plan aux deux mêmes points imaginaires. On conclut de là que toutes les sphères coupent le plan à l'infini suivant un même cercle imaginaire qu'on nomme le *cercle imaginaire à l'infini*. Soient, en effet, C et C' les cercles déterminés par le plan à l'infini dans deux sphères quelconques Σ et Σ'; pour prouver que ces cercles coïncident, il suffit de montrer que tout plan π les coupe aux deux mêmes points. Or, le plan π donne dans les deux sphères deux cercles A et A', qui coupent la droite de l'infini du plan π aux deux points cycliques de ce plan; ces deux points, appartenant au cercle A et au plan de l'infini, appartiennent au cercle C, et l'on voit de même qu'ils sont sur le cercle C'.

Lorsqu'une droite P *et un point p sont pôle et polaire par rapport au cercle imaginaire à l'infini, la droite qui joint un point quelconque q de l'espace au point p est perpendiculaire au plan mené par ce point q et par la droite* P. En effet, soient o le centre d'un cercle imaginaire, intersection d'une sphère fixe et d'un plan ϖ, p_1 le point où la droite qp perce le plan ϖ, P_1 la polaire de p_1 par rapport au cercle imaginaire, s l'extrémité d'une droite menée par o perpendiculairement au plan ϖ et égale au rayon du cercle imaginaire supposé réel. La droite sp_1 sera (1200) perpendiculaire au plan déterminé par s et P_1, et cette perpendicularité subsistera lorsque le plan ϖ se déplacera en s'éloignant indéfiniment du centre de la sphère; mais, à la limite, les droites qp_1 et sp_1 sont parallèles, et il en est de même des plans déterminés par la droite P_1 et par chacun des points s et p_1. Donc la droite qp est perpendiculaire au plan de la droite P et du point q.

1202. Nous pouvons maintenant aborder la recherche des plans principaux et des sections circulaires dans les surfaces du second ordre.

Considérons une surface du second ordre Σ et la conique C réelle ou imaginaire suivant laquelle le plan à l'infini coupe cette surface. Le cercle imaginaire à l'infini C' rencontre cette conique en quatre points imaginaires conjugués deux à deux, a et b, c et d. Les deux lignes C et C' ont donc trois couples de cordes communes

$$(ab, cd),\ (ac, bd),\ (ad, bc),$$

dont le premier est seul réel, et un triangle autopolaire commun $pp'p'$ dont les trois sommets sont réels (1171).

Désignons par I le centre de la surface Σ. La droite Ip est le diamètre conjugué du plan diamétral I$p'p''$ (1197); d'ailleurs cette droite et ce plan sont rectangulaires (1201); donc Ip est un axe et I$p'p''$ est le plan principal correspondant à cet axe. On prouverait de même que Ip' et Ipp'', Ip'' et Ipp' jouissent de la même propriété, d'où résulte, pour les surfaces du second ordre, l'existence de trois plans principaux réels.

Désignons par m un point quelconque de l'espace situé à distance finie; et considérons l'un des six plans déterminés par le point m et chacune des cordes communes, le plan mab par exemple. Ce plan détermine dans la surface Σ une conique qui rencontre la conique C aux deux points a et b; par suite, cette conique est un cercle, attendu que les points a et b sont les points cycliques du plan mab. Donc, par un point quelconque m de l'espace passent six plans mab, mcd, mac, mbd, mad, mbc, donnant des sections circulaires, mais dont les deux premiers sont seuls réels. Les deux plans d'un même système mab et mcd, mac et mbd, mad et mbc, se coupent respectivement suivant les droites mp, mp', mp'', qui sont parallèles aux axes; ils sont donc respectivement perpendiculaires aux plans principaux $\mathrm{I}p'p''$, $\mathrm{I}p''p$, $\mathrm{I}pp'$.

On donne en particulier le nom de *plans cycliques* aux trois couples de plans $\mathrm{I}ab$ et $\mathrm{I}cd$, $\mathrm{I}ac$ et $\mathrm{I}bd$, $\mathrm{I}ad$ et $\mathrm{I}bc$, qui donnent des sections circulaires et qui passent respectivement par les axes $\mathrm{I}p$, $\mathrm{I}p'$, $\mathrm{I}p''$. On obtient toutes les sections circulaires de la surface en coupant cette surface par des plans parallèles aux six plans cycliques. Il y a donc six séries de sections circulaires; le lieu des centres de chaque série est le diamètre conjugué du plan cyclique auquel sont parallèles les plans de la série considérée, et l'on donne le nom d'*ombilics* aux points où chacun de ces diamètres rencontre la surface.

Les deux plans cycliques qui passent par un même axe ont pour plans bissecteurs les deux plans principaux qui contiennent cet axe. Ainsi, les plans cycliques $\mathrm{I}ab$, $\mathrm{I}cd$, ont pour plans bissecteurs les plans principaux $\mathrm{I}pp'$, $\mathrm{I}pp''$; cela résulte de ce que les cordes ab et cd divisent harmoniquement l'angle $p'pp''$, de sorte que l'angle dièdre droit $(\mathrm{I}ab, \mathrm{I}cd)$ est divisé harmoniquement par les plans $\mathrm{I}pp'$, $\mathrm{I}pp''$.

Des trois couples de plans cycliques, un seul $(\mathrm{I}ab, \mathrm{I}cd)$ est réel; il n'y a donc que deux séries réelles de sections circulaires et, par suite, que quatre ombilics réels.

CÔNES DU SECOND ORDRE ET CONIQUES SPHÉRIQUES.

1203. Dans le cône, le plan polaire ϖ de tout point p de l'espace contient le sommet s, et si le point p se déplace sur ps, le plan polaire ϖ ne change pas; aussi convient-il de donner à ce plan ϖ le nom de *plan polaire de la droite ps* et, à cette droite, le nom de *polaire du plan* ϖ. *Si la droite ps tourne autour du sommet s dans un plan, son plan polaire* ϖ *tourne autour de la polaire de ce plan;* cela résulte de ce que les traces de ps et de ϖ sur un plan quelconque sont constamment pôle et polaire par rapport à la conique que ce plan détermine dans le cône.

Tout plan qui ne passe pas par le sommet a ce sommet pour pôle; *le sommet* est donc le pôle du plan de l'infini, c'est-à-dire *le centre de la*

surface. Désormais, quand nous parlerons de droites et de plans conjugués par rapport à un cône du second ordre, nous entendrons toujours qu'il s'agit de plans et de droites passant par le sommet. Ainsi nous dirons que : 1° une droite et un plan sont conjugués par rapport au cône lorsqu'ils passent par le sommet et que la droite est la polaire du plan ; 2° deux plans sont conjugués par rapport au cône quand ils passent par le sommet et que chacun d'eux contient la polaire de l'autre ; 3° deux droites sont conjuguées par rapport au cône quand elles passent par le sommet et que chacune d'elles est située dans le plan polaire de l'autre.

Quand deux plans ou deux droites sont conjuguées, leurs traces sur un plan quelconque sont conjuguées par rapport à la conique que ce plan détermine dans le cône.

Quand un cône est circonscrit à une surface du second ordre, les droites et les plans conjugués par rapport au cône sont aussi conjugués par rapport à la surface ; car, d'abord, leurs traces sur le plan de la conique de contact sont conjuguées par rapport à cette conique, et, de plus, ce plan est le plan polaire du sommet du cône par rapport à la surface.

Les sections d'un cône du second ordre par des plans parallèles sont semblables (1199), et le lieu des centres est la polaire du plan mené par le sommet du cône parallèlement aux plans sécants. Ces sections sont des ellipses, des paraboles ou des hyperboles, suivant que le plan ne contient pas de génératrices, en renferme une seule ou en contient deux.

Une droite passant par le sommet d'un cône du second ordre est dite *intérieure* ou *extérieure* au cône, suivant que sa trace sur un plan quelconque qui ne passe pas par le sommet est intérieure ou extérieure à la conique que ce plan détermine dans le cône. Un point de l'espace est dit *intérieur* ou *extérieur* au cône, suivant que la droite qui unit ce point au sommet est elle-même intérieure ou extérieure.

1204. Le sommet d'un cône du second ordre est le sommet d'une infinité de trièdres polaires (1196), c'est-à-dire de trièdres tels que chaque arête est la polaire de la face opposée. Les trois arêtes forment un système de trois diamètres conjugués ; l'un de ces diamètres est intérieur au cône et les deux autres sont extérieurs ; cela résulte de ce que la trace du trièdre sur un plan quelconque est un triangle polaire par rapport à la conique section du cône par ce plan, et un tel triangle a toujours un sommet intérieur et deux sommets extérieurs à la conique.

L'un de ces trièdres polaires est trirectangle ; ses arêtes sont les trois *axes du cône ;* l'un est intérieur et les deux autres sont extérieurs.

Tout plan perpendiculaire à l'un des axes détermine dans le cône une conique qui a son centre sur cet axe et ses axes parallèles aux deux autres axes du cône. Tout plan perpendiculaire à l'axe intérieur du cône donne

ne ellipse, et tout plan perpendiculaire à l'un des deux autres axes donne ne hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux deux génératrices u cône parallèles au plan sécant. On nomme *axe principal* du cône axe intérieur ; *grand axe* celui qui est parallèle au grand axe de l'ellipse suivant laquelle le cône est coupé par un plan normal à l'axe rincipal ; *petit axe* celui qui est parallèle au petit axe de la même ellipse ; n appelle *plan de la grande section* le plan de l'axe principal et du grand xe ; *plan de la petite section* le plan de l'axe principal et du petit axe ; *lan principal* le plan du grand et du petit axe. Le plan principal ne oupe le cône suivant aucune arête ; de tous les plans conduits par l'axe rincipal, le plan de la grande section et le plan de la petite section sont eux qui coupent le cône suivant les deux arêtes qui font entre elles respectivement l'angle maximum et l'angle minimum. Les plans tangents au ône menés par le grand axe le touchent suivant les deux arêtes contenues ans le plan de la petite section ; les plans tangents conduits par le petit xe touchent le cône suivant les deux arêtes contenues dans le plan de la rande section ; enfin, par l'axe principal, on ne peut mener aucun plan angent au cône.

Le cône est de révolution quand la section par un plan perpendiculaire à l'axe intérieur est un cercle.

1205. Il résulte de ce qui a été dit au n° 1202, sur les sections circulaires des surfaces du second ordre, que tout cône du second ordre admet deux plans cycliques réels passant par l'un des axes et également inclinés sur les plans principaux qui contiennent cet axe. Tout cône du second ordre, admettant, d'après cela, deux séries de sections circulaires, peut être considéré de deux manières comme un cône à base circulaire. Les propriétés des sections circulaires des cônes du second ordre ont déjà été étudiées aux n°s 875,..., 880. Ajoutons seulement ici que les deux plans cycliques passent, comme on le reconnaît immédiatement, par le grand axe et, par suite, sont perpendiculaires au plan de la petite section.

1206. Si par le sommet d'un cône du second ordre on mène des droites perpendiculaires à tous les plans tangents, on obtient un second cône de même sommet et qui est dit *supplémentaire* du premier. Le cône supplémentaire d'un cône du second ordre est aussi du second ordre ; en d'autres termes, tout plan mené par le sommet ne peut le couper que suivant deux arêtes ; car, si un tel plan le coupait suivant trois arêtes, ces arêtes seraient normales à trois plans tangents au cône proposé, lesquels plans passeraient par une même droite perpendiculaire au plan des trois arêtes, ce qui est absurde, puisque par une droite on ne peut mener que deux plans tangents à un cône du second ordre. *Si un cône* Σ' *est supplémentaire d'un cône* Σ *du second ordre, inversement* Σ *est supplémentaire de* Σ'. En effet,

deux arêtes infiniment voisines du cône Σ' sont perpendiculaires à [illegible] plans tangents au cône Σ infiniment voisins ; le plan de ces deux arêtes [illegible] donc perpendiculaire à l'intersection de ces deux plans tangents ; en [illegible]tres termes, les plans tangents à Σ' sont perpendiculaires aux arêtes de [illegible]

On aperçoit immédiatement que : 1° *à une arête de Σ et au plan tan[illegible] conduit par cette arête, répondent dans Σ' un plan tangent et son [illegible] de contact ;* 2° *à une droite et à son plan polaire par rapport à Σ, répondent un plan et sa polaire par rapport à Σ' ;* 3° *à deux droites conjuguées de Σ, répondent deux plans conjugués de Σ' ;* 4° *à deux droites menées arbitrairement par le sommet de Σ, répondent dans Σ' deux plans faisant entre eux un angle supplémentaire de celui des deux droites ;* 5° *aux trois axes de Σ, répondent les trois plans diamétraux conjugués rectangulaires de Σ'* ; à l'axe principal de Σ, répond le plan principal de Σ', et les deux cônes ont même axe principal et même plan principal ; mais le plan de grande section de l'un est le plan de la petite section de l'autre, de sorte que le grand axe de l'un est le petit axe de l'autre.

Il résulte de là que *les propriétés des cônes du second degré sont doubles,* comme celles des trièdres et des triangles sphériques.

1207. Dans tout cône du second ordre, on nomme *focales* les deux droites menées par le sommet perpendiculairement aux plans cycliques du cône supplémentaire ; ces deux droites sont donc situées dans le plan de la petite section du cône supplémentaire, et par conséquent dans le plan de la grande section du cône considéré.

Tout plan π perpendiculaire à une focale F *coupe le cône suivant une conique qui a pour foyer le pied f de cette droite.* Il suffit, pour établir ce théorème, de prouver que tout couple de droites conjuguées par rapport à la conique et passant par f est rectangulaire. Or, deux droites conjuguées du cône supplémentaire, comprises dans un plan cyclique de ce cône, sont rectangulaires, puisqu'elles sont parallèles à deux diamètres conjugués de la section circulaire faite par un plan parallèle à ce plan cyclique ; donc deux plans conjugués du cône primitif, menés par la focale F qui est perpendiculaire à ce plan cyclique, sont aussi rectangulaires. Le plan π coupe donc le cône suivant une conique, et les deux plans conjugués suivant deux droites rectangulaires telles, que le pôle de l'une par rapport à cette conique soit sur l'autre.

Puisque *dans deux cônes supplémentaires les droites focales de l'un répondent aux plans cycliques de l'autre,* à chaque propriété des foyers répondra, par la considération du cône supplémentaire, une propriété des plans cycliques, et inversement. Indiquons les plus importantes de ces propriétés.

1208. Nous savons que la polaire d'un plan cyclique est le diamètre, ou

des centres des sections circulaires parallèles à ce plan cyclique. D'ailleurs, à un plan cyclique et à sa polaire répondent, dans le cône supplémentaire, une ligne focale et son plan polaire. De même que dans les coniques on donne le nom de *directrice* à la polaire du foyer, on donne dans les cônes le nom de *plan directeur* au plan polaire d'une focale. Ainsi, un cône du second ordre a deux focales et, par suite, deux plans directeurs. Cela posé, voici les propriétés fondamentales des plans cycliques et des focales ; les théorèmes sont disposés sur deux colonnes; de cette manière, on trouve à côté l'une de l'autre les *propositions corrélatives*, c'est-à-dire les propositions qui résultent l'une de l'autre par la considération du cône supplémentaire, et il suffit chaque fois de démontrer l'une de ces deux propositions.

Dans tout cône du second ordre, les sinus des angles que chaque plan tangent fait avec un plan cyclique et avec la polaire de ce plan cyclique ont un rapport constant.

Dans tout cône du second ordre, les sinus des angles que chaque arête forme avec une ligne focale et avec le plan directeur correspondant ont un rapport constant.

En effet, coupons le cône par un plan parallèle à un plan cyclique et, du centre de cette section circulaire, qui est un point de la polaire du plan cyclique, abaissons une perpendiculaire sur un plan tangent au cône. Le sinus de l'angle du plan tangent et du plan du cercle est égal à cette perpendiculaire divisée par le rayon du cercle; le sinus de l'angle du plan tangent et de l'axe polaire du plan cyclique est égal à la même perpendiculaire divisée par la distance du sommet du cône au centre de la section circulaire. Le rapport des sinus ne dépend donc que du rayon du cercle et de la distance de son centre au sommet, et nullement du plan tangent considéré.

Tout plan tangent à un cône du second ordre coupe les deux plans cycliques suivant deux droites également inclinées sur l'arête de contact.

Les plans menés par les deux focales d'un cône du second ordre et par une arête quelconque sont également inclinés sur le plan tangent suivant cette arête.

En effet, coupons le cône par deux plans parallèles à ses deux plans cycliques; les sections seront deux cercles situés sur une même sphère. Une arête quelconque du cône coupe ces cercles, et les tangentes à ces cercles aux points de rencontre obtenus sont situées dans le plan tangent au cône suivant l'arête considérée; ces deux droites étant tangentes à une même sphère et comprises dans un même plan sont également inclinées sur la corde qui unit les points de contact, c'est-à-dire sur l'arête du cône, et, comme ces droites sont parallèles à celles suivant lesquelles le plan tangent coupe les plans cycliques, le théorème est démontré.

La somme (ou *la différence*) *des angles dièdres que chaque plan tangent à un cône du second ordre forme avec les deux plans cycliques est constante.*

La somme (ou *la différence*) *des angles que chaque arête d'un cône du second ordre forme avec les deux focales est constante.*

Dans les deux cas précédents, nous avons démontré le théorème de gauche; ici, nous démontrerons le théorème de droite. Il suffit à cet effet de considérer ce qui se passe sur une sphère ayant pour centre le sommet du cône. Une nappe du cône coupe la sphère suivant une courbe qu'on nomme *ellipse sphérique*, et les deux points déterminés sur cette portion de sphère par les focales du cône sont dits les *foyers* de cette conique. Cela posé, si M est un point de cette conique sphérique et si F et F' sont ses foyers, il suffit de prouver que la somme des arcs de grand cercle FM + F'M est constante, sachant, d'après le théorème précédent, que l'arc de grand cercle tangent à la conique au point M est également incliné sur les deux *arcs vecteurs* MF et MF'. Le raisonnement est analogue à celui du n° 1007.

De là résulte un nouveau point de vue sous lequel on peut considérer les propositions qui précèdent et, en général, les propriétés des cônes du second ordre (CHASLES, *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, année 1829).

1209. Une *conique sphérique* est l'ensemble des deux courbes fermées dites *ellipses sphériques*, suivant lesquelles un cône du second ordre coupe une sphère ayant le sommet pour centre. Ces deux courbes sont symétriques par rapport à chacun des trois grands cercles suivant lesquels les plans diamétraux principaux du cône coupent la sphère.

Considérons le plan principal du cône, et ne prenons que l'hémisphère et la nappe du cône situés au-dessus de ce plan. Cette nappe déterminera sur la sphère une ellipse sphérique dont *le centre et les sommets* seront les points où la sphère est percée par l'axe principal et par les génératrices situées dans les plans de la grande et de la petite section; les foyers répondront aux lignes focales; les plans cycliques du cône couperont l'hémisphère considéré suivant deux demi-grands cercles ayant le grand axe du cône pour diamètre commun : ce grand axe est compris dans le plan du *plus grand arc diamètre* de l'ellipse sphérique, et ces deux demi-grands cercles, dits *arcs cycliques* de l'ellipse sphérique, sont perpendiculaires au *plus petit arc diamètre* de l'ellipse et ne rencontrent jamais cette courbe.

Considérons en second lieu le plan de la petite section du cône, et la partie de la conique sphérique située d'un seul côté de ce plan; elle est composée de deux branches, moitiés des deux ellipses sphériques et symétriques par rapport au plan diamétral perpendiculaire à l'axe principal du cône; on lui donne le nom d'*hyperbole sphérique*. Son centre

est le point où le grand axe du cône perce l'hémisphère qui contient la courbe, et ses foyers, intersections de cet hémisphère et des lignes focales, se trouvent sur l'arc de grand cercle qui unit les deux seuls sommets de la courbe. Pour tout point M de l'hyperbole sphérique, c'est la différence (et non la somme) des arcs vecteurs MF et MF' qui est constante. Quant aux plans cycliques du cône, ils coupent l'hémisphère suivant deux demi-grands cercles passant par le centre de l'hyperbole et également inclinés sur l'arc qui joint les foyers ; ce sont les *arcs cycliques* de l'hyperbole.

Enfin, si l'on considérait l'hémisphère situé d'un côté du plan de la grande section du cône, lequel plan contient les lignes focales, on aurait deux moitiés de demi-ellipses sphériques se présentant leurs concavités et dont l'ensemble forme une troisième espèce de courbe sphérique. Cette courbe a un *centre*, intersection de la sphère et du petit axe du cône, *quatre foyers* situés dans le plan de la grande section du cône, et *deux arcs cycliques* situés entre les deux branches de la courbe et perpendiculaires à l'arc de grand cercle qui joint les deux sommets.

Les trois courbes que nous venons de considérer sont des portions de la courbe unique, dite *conique sphérique*, qui est l'intersection complète de la sphère et du cône.

A une conique sphérique répond une conique sphérique supplémentaire : c'est l'intersection de la sphère par le cône supplémentaire de celui qui produit la première conique. On peut aussi parvenir directement à cette conique supplémentaire en la considérant comme l'enveloppe des arcs de grands cercles dont les plans sont normaux aux rayons de la sphère menés par les différents points de la conique primitive.

Les arcs cycliques de l'une des coniques sont dans les plans diamétraux perpendiculaires aux diamètres de la sphère qui passent par les foyers de l'autre conique.

Les deux théorèmes relatifs à l'invariabilité de la somme ou de la différence des arcs vecteurs d'une conique sphérique, et à l'égale inclinaison de l'arc de grand cercle tangent sur les arcs vecteurs, sont dus à M. MAGNUS, de Berlin (*Annales de Gergonne*, 1825).

1210. *Par deux sections planes quelconques d'une surface du second ordre, on peut toujours faire passer deux cônes.* En effet, considérons la droite L' conjuguée de l'intersection L des deux plans, c'est-à-dire de la sécante commune aux deux courbes ; par cette droite L' et par un point m quelconque de l'une des courbes, menons un plan, et soient p et q les points communs à ce plan et à la seconde courbe ; du point s, où mp rencontre L', projetons la première courbe sur le plan de la seconde ; cette seconde courbe et la projection de la première se confondront, car ce sont des coniques ayant trois points communs, dont deux, situés sur la sécante commune L, sont des points de contact. Le point s est donc le

sommet d'un cône passant par les deux courbes, et l'intersection de L et *mq* serait le sommet *s'* d'un second cône jouissant de la même propriété.

Les deux cônes se touchent aux deux points qui sont communs aux deux courbes planes. On peut montrer que, réciproquement, deux cônes du second ordre, qui ont deux plans tangents communs, se coupent suivant deux courbes planes. Plus généralement, *deux surfaces du second ordre qui se touchent en deux points a et b se coupent suivant deux courbes planes*. En effet, *c* étant un troisième point commun, le plan *abc* coupe les deux surfaces suivant deux coniques qui se confondent, puisqu'elles ont trois points communs *a*, *b*, *c*, et les mêmes tangentes aux points *a* et *b*. Voilà donc une conique commune aux deux surfaces. Mais l'intersection complète de deux surfaces du second ordre est du quatrième ordre, car tout plan transversal, donnant une conique dans chaque surface, coupe l'intersection des deux surfaces en quatre points (réels ou imaginaires). Donc, dans le cas qui nous occupe, l'intersection se compose de la conique que nous avons déjà déterminée et d'une seconde conique.

La seconde conique passe, comme la première, par les points *a* et *b*, car on verrait, comme ci-dessus, que, si *d* est un point de l'intersection situé sur la première conique, le plan *abd* coupe les deux surfaces suivant une conique commune qui, par conséquent, n'est autre que la seconde conique considérée.

Toutefois, lorsque l'intersection des plans tangents en *a* et *b* se confond avec la droite *ab*, cette droite appartient aux deux surfaces qui, alors, ont de plus en commun une ligne du troisième degré. Ce cas d'exception au théorème de Monge a été signalé par M. de la Gournerie, dans une lettre à Poncelet (*Traité des propriétés projectives*, annotations de la seconde édition).

Il résulte du théorème précédent que, *si deux surfaces du second degré se touchent en trois points a, b, c, elles se raccordent le long d'une ligne plane*. L'intersection des deux surfaces doit, en effet, se composer de deux coniques dont les plans passent à la fois par *a*, *b*, *c*; ces deux coniques coïncident donc et forment une conique double suivant laquelle les deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre.

SURFACES RÉGLÉES DU SECOND ORDRE.

1211. On dit que deux *faisceaux de plans* (584) sont *homographiques* lorsqu'on peut trouver deux droites sur lesquelles ils tracent deux divisions homographiques; une droite quelconque est alors coupée par le premier faisceau suivant une division homographique de celle que le second faisceau détermine sur une seconde droite quelconque. Le rapport anharmonique de quatre plans quelconques du premier faisceau est

égal au rapport anharmonique des quatre plans homologues de l'autre faisceau, etc.

La surface réglée, lieu des intersections des plans homologues de deux faisceaux homographiques, est du second ordre; car, si on la coupe par un plan quelconque ϖ, les deux faisceaux de plans coupent ce plan ϖ suivant deux faisceaux de droites qui sont homographiques, et la section de la surface par ce plan ϖ est le lieu des intersections des rayons homologues de ces deux faisceaux de droites, c'est-à-dire (1131) une conique. Il existe donc des surfaces réglées du second ordre.

1212. Réciproquement, *toute surface réglée du second ordre peut être considérée comme le lieu des intersections des plans homologues de deux faisceaux de plans homographiques.* Nous décomposerons la démonstration en plusieurs parties, et elle nous permettra de mettre en évidence les principales propriétés de ces surfaces réglées.

1° *Trois droites* A, B, C, *appartenant à la surface, ne peuvent passer par un même point o, à moins que toutes les droites de la surface ne passent par ce point.* Car, toute autre droite D de la surface, ne passant pas par le sommet *o* du trièdre formé par A, B, C, aurait au moins avec l'une des faces de ce trièdre un point commun non situé sur les arêtes; par suite, le plan de cette face aurait en commun avec la surface deux arêtes du trièdre et de plus un point extérieur à ces arêtes, de sorte que le degré de la section serait supérieur au second. Les surfaces réglées du second ordre se partagent donc en deux groupes : l'un relatif aux surfaces dont toutes les génératrices passent par un même point, l'autre relatif aux surfaces dont trois droites ne passent jamais par un même point. Les surfaces du premier groupe sont les *cônes* et, en particulier, les *cylindres*, lorsque le point de concours de toutes les génératrices est à l'infini. Les cônes du second degré jouissent évidemment de la propriété énoncée, car toute section faite par un plan ne contenant pas le sommet est une conique qui peut être considérée comme le lieu des intersections des rayons homologues de deux faisceaux homographiques; les plans déterminés par les génératrices fixes qui aboutissent aux centres de ces deux faisceaux et par la génératrice variable qui aboutit à un point quelconque de la conique sont donc homographiques. Nous n'avons par conséquent à considérer que les *surfaces réglées proprement dites,* c'est-à-dire celles dont trois droites ne passent jamais par un même point.

2° Soit G l'une des génératrices de la surface. Tout plan passant par G donne dans la surface une conique qui se compose nécessairement de la droite G et d'une autre droite. Si l'on coupe la surface par une série de plans $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$, passant par G, on obtiendra donc une série de droites $L, L', L'', \ldots$, qui formeront un système de génératrices rectilignes. Toutes ces droites rencontrent G en des points différents, sans quoi, par un même

point, passeraient trois droites de la surface; par suite, deux quelconques des génératrices L, L', L'', ..., ne sont jamais dans un même plan. Actuellement, par l'une L de ces droites, menons une série de plans λ, λ', λ'', ... nous obtiendrons une nouvelle série de droites G, G', G'', ..., dont G fera évidemment partie et qui formeront un second système de génératrices rectilignes; on verra, comme ci-dessus, que deux quelconques de ces génératrices ne sauraient être dans un même plan. Donc, en résumé, *la surface admet deux systèmes* (G) *et* (L) *de génératrices rectilignes; par un point quelconque m de la surface passe une génératrice de chaque système* (ces deux génératrices sont fournies par les plans menés par m et chacune des deux droites fixes G et L); *le plan de ces deux génératrices est le plan tangent en m à la surface. Deux génératrices du même système ne sont jamais dans un même plan; une génératrice quelconque de l'un des systèmes rencontre toutes celles de l'autre système.*

3° Puisque trois droites suffisent pour régler le mouvement d'une droite mobile assujettie à s'appuyer sur elles, et qu'une génératrice de l'un des systèmes doit rencontrer toutes celles de l'autre système, on voit que *la surface peut être considérée comme engendrée par une droite qui rencontre sans cesse trois droites fixes* L, L', L''.

4° Sur l'une L de ces trois droites fixes, prenons une série de points a, b, c, d, ...; par chacun de ces points et par les deux autres droites L' et L'' menons deux plans; nous obtiendrons ainsi deux faisceaux de plans homographiques dont L' et L'' seront les axes et tels, que les intersections des plans homologues rencontrent les trois directrices L, L', L'', c'est-à-dire soient des génératrices de la surface. *La surface est donc le lieu des intersections des plans homologues de deux faisceaux de plans homographiques,* comme nous l'avons annoncé.

Nous avons vu (1°) que les cônes rentrent dans cette définition; ils répondent aux cas où les axes des deux faisceaux se rencontrent; quand les axes sont parallèles, les cônes deviennent des cylindres.

1213. Voici encore d'autres propriétés importantes des surfaces réglées proprement dites du second ordre.

Le faisceau de plans passant par L'' rencontre les deux autres directrices L et L' et détermine sur elles deux divisions homographiques, et les droites qui joignent les points homologues de ces deux divisions s'appuient à la fois sur L, L', L''; ce sont des génératrices de la surface. Donc *toute surface réglée du second ordre est le lieu des droites qui rencontrent homographiquement deux droites fixes.*

Tout plan passant par un point quelconque m de la surface, et qui ne contient aucune des deux génératrices G et L passant par ce point, coupe la surface suivant une conique qui passe par m et qui ne se réduit pas

deux droites, sans quoi la section serait d'un degré supérieur au second.

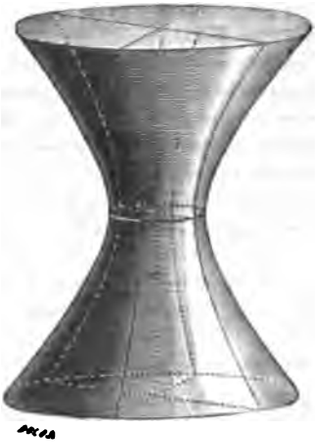
Chaque point d'une section plane résulte de l'intersection du plan sécant et d'une génératrice de la surface; toute section plane d'une surface *réglée* du second ordre est donc réelle. Par suite, en appliquant cette remarque au plan polaire ϖ d'un point quelconque p de l'espace, on voit que *tout point de l'espace est le sommet d'un cône réel circonscrit à la surface.*

Le plan de l'infini détermine une section réelle qui est : ou une conique ordinaire, ou un système de deux droites; la surface prend dans le premier cas le nom d'*hyperboloïde à une nappe* et, dans le second, le nom de *paraboloïde hyperbolique*.

HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

1214. Nous avons nommé *hyperboloïde à une nappe* (*fig.* 607) celle des deux surfaces réglées proprement dites du second ordre que le plan

Fig. 607.



de l'infini coupe suivant une conique C qui ne se réduit pas à deux droites.

Le plan de l'infini n'étant pas tangent à la surface ne contient pas son propre pôle; ce pôle, c'est-à-dire *le centre de la surface, est donc à distance finie*. Si l'on transporte à ce centre o et parallèlement à elles-mêmes toutes les génératrices de la surface, les droites ainsi transportées conservent leurs mêmes points à l'infini; on obtient donc un cône ayant pour sommet o et pour base la conique C, et, comme le point o est le pôle du plan de la conique C, on voit que ce cône est tangent à la surface

tout le long de la conique C située à l'infini ; ce cône, enveloppe des plans tangents à l'infini de la surface, ou, comme on dit plus rapidement, des *plans asymptotiques* à la surface, prend le nom de *cône asymptote* de l'hyperboloïde. La surface est tout entière à l'extérieur de ce cône, sans quoi il y aurait des génératrices qui le couperaient à distance finie.

Par chaque point de la conique C passent deux génératrices, une de chaque système ; donc, *à chaque génératrice d'un système, répond dans l'autre système une génératrice parallèle*, et, par suite, *chaque génératrice du cône asymptote est parallèle à deux génératrices de la surface*.

Trois génératrices d'un même système ne sauraient être parallèles à un même plan, sans quoi les trois génératrices correspondantes du cône asymptote seraient dans un même plan, ce qui est absurde, puisque le cône est du second ordre.

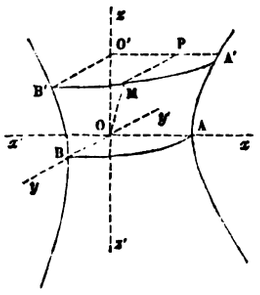
1215. Les sections planes de la surface peuvent être des hyperboles, des paraboles ou des ellipses suivant les positions du plan sécant ; car, suivant que ce plan coupe la conique C en deux points, la touche ou ne la rencontre pas, le nombre des points à l'infini dans la section est 2, 1 ou 0. D'ailleurs, *les sections* P *et* P_1 *de la surface et du cône asymptote par un même plan quelconque* ϖ *sont semblables, semblablement placées et concentriques*. En effet, soient D et D' deux diamètres conjugués de la section P faite par le plan ϖ dans la surface ; les plans déterminés par le centre o de l'hyperboloïde et par chacune des droites D et D' seront diamétraux conjugués par rapport à cet hyperboloïde ; donc ils le seront aussi par rapport au cône, puisque (1203) le cône et la surface ont les mêmes systèmes de droites et de plans conjugués ; par suite, les intersections de ces deux plans par le plan ϖ, c'est-à-dire les droites D et D' elles-mêmes, seront deux diamètres conjugués de la section P_1 faite par le plan ϖ dans le cône asymptote. En particulier, *les plans cycliques du cône asymptote coupent donc l'hyperboloïde suivant des cercles ;* on les nomme *plans cycliques* de l'hyperboloïde ; tout plan parallèle à un plan cyclique donne une section circulaire (1199).

1216. Puisqu'à tout diamètre de l'hyperboloïde répond le même plan diamétral, soit dans cet hyperboloïde, soit dans le cône asymptote, l'hyperboloïde et le cône ont les mêmes systèmes de diamètres conjugués, et par suite, les mêmes axes et les mêmes plans principaux. Des trois axes l'un oz est donc intérieur (1204), et les deux autres ox et oy sont extérieurs et coupent seuls la surface ; il y a donc deux sommets imaginaires et quatre sommets réels ; le plan principal xoy coupe la surface suivant une ellipse qu'on nomme *ellipse de gorge*, et les plans principaux xoz et yoz la coupent suivant des hyperboles. Toute section par un plan parallèle au plan xoy est une ellipse semblable à l'ellipse de gorge et dont les

sommets sont situés sur les hyperboles principales; de là, découle un mode de génération fort simple de la surface.

Dans l'espace, on nomme coordonnées d'un point M par rapport à trois axes rectangulaires ox, oy, oz, les nombres qui mesurent les projections

Fig. 608.



du segment OM sur les trois axes, chacun de ces nombres étant précédé du signe + ou du signe —, suivant que les projections du point M tombent sur les parties positives ox, oy, oz, des axes ou sur les parties opposées ox', oy', oz'. En désignant par x, y, z, les trois coordonnées d'un point quelconque M de l'hyperboloïde (*fig.* 608), on a $x = O'P, y = PM$, $z = OO'$. Soit A'B' l'ellipse obtenue en coupant la surface par le plan mené par M parallèlement au plan xoy de l'ellipse de gorge AB; désignons par a et b les demi-axes de l'ellipse de gorge et par c la valeur absolue du demi-axe imaginaire commun aux deux hyperboles principales AA' et BB'. Nous aurons, puisque le point M appartient à l'ellipse A'B',

$$\frac{x^2}{\overline{O'A'}^2} + \frac{y^2}{\overline{O'B'}^2} = 1,$$

et, puisque le point A' appartient à l'hyperbole AA' et le point B' à l'hyperbole BB',

$$\frac{\overline{O'A'}^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{\overline{O'B'}^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

L'élimination de O'A' et de O'B' entre ces trois équations donne la relation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

entre les coordonnées d'un point quelconque de la surface; c'est l'*équation* de l'hyperboloïde.

1217. *Si l'on projette toutes les génératrices d'un hyperboloïde sur un plan diamétral quelconque* ϖ *à l'aide de projetantes parallèles au diamètre* D *conjugué du plan* ϖ, *les projections des génératrices sont tangentes à la section* P *faite dans la surface par le plan* ϖ. En effet, soient G une génératrice quelconque et m le point où elle rencontre la courbe P. Le plan tangent au point m est parallèle au plan diamétral conjugué du diamètre qui aboutit en m, lequel plan diamétral contient D; donc le plan tangent en m, passant par la génératrice G et étant parallèle à D, est précisément le plan projetant de cette génératrice; par suite, la projection de cette génératrice est l'intersection du plan ϖ et du plan tangent à la surface, c'est-à-dire est la tangente en m à la courbe P.

En particulier, *les projections orthogonales des génératrices sur les plans principaux enveloppent l'ellipse de gorge et les hyperboles principales.*

1218. Quand les deux axes réels ont la même longueur, l'ellipse de gorge devient un cercle, et la surface, lieu des cercles dont les plans sont perpendiculaires à l'axe oz et dont les centres sont sur cet axe, est de révolution; cet hyperboloïde de révolution résulte de la rotation de l'hyperbole principale autour de son axe non transverse.

PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

1219. Nous avons appelé *paraboloïde hyperbolique* (*fig.* 609) celle des deux surfaces réglées proprement dites du second ordre qui a une génératrice de chaque système G_1 et L_1 dans le plan de l'infini. Cette surface est donc tangente à ce plan de l'infini et, par suite, le pôle de ce plan, c'est-à-dire le centre de la surface, est à l'infini. L'un des plans principaux passe alors à l'infini ainsi que les deux axes qu'il contient, et il ne reste à distance finie qu'un seul axe et les deux plans principaux qui passent par cet axe, auquel tous les diamètres deviennent d'ailleurs parallèles.

Fig. 609.

Tout plan passant par l'axe donne dans la surface une conique symétrique par rapport à cet axe et dont le second axe disparaît à l'infini; cette conique est donc *une parabole*. Toutes ces paraboles ont leur sommet en un même point commun à l'axe et à la surface, qu'on nomme *sommet* de la surface.

Toute section par un plan ϖ parallèle à l'axe est une parabole égale à celle que détermine le plan ϖ' mené par l'axe parallèlement au plan proposé. En effet, d'abord la section par le plan ϖ est une parabole, puisqu'elle est semblable à la section faite par le plan ϖ'; puis ces deux paraboles sont égales, attendu que l'un des cônes qu'on peut mener par ces deux courbes (1210) dégénère en un cylindre dont ces courbes sont deux sections parallèles.

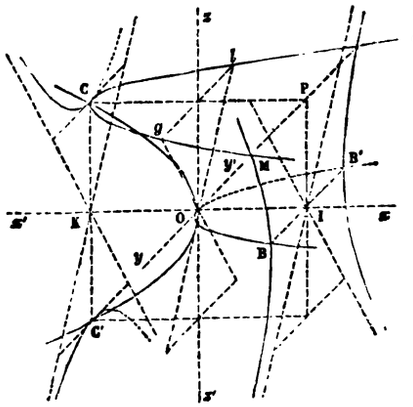
1220. Les sections par des plans non parallèles à l'axe sont des hyperboles, puisque ces plans coupent les génératrices G_1 et L_1 situées à l'infini en deux points. Étudions spécialement les sections hyperboliques dont les plans sont normaux à l'axe. Désignons par o le sommet, par ox la partie de l'axe située à droite de o et par ox' la partie de l'axe située à gauche. Le plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet o est tangent à la surface, puisqu'il est conjugué à la direction ox; il contient donc deux génératrices que nous nommerons og et ol, et c'est à ces deux droites que se réduit ici la section hyperbolique. L'hyperbole obtenue en coupant par tout autre plan normal à l'axe doit donc avoir ses asymptotes parallèles à og et à ol; ces asymptotes sont donc les intersections du plan considéré et des deux plans fixes gox, lox; par suite, si l'on désigne par oy et oz la bissectrice de l'angle gol et celle de son supplément, les plans uox, vox, devront contenir les axes de toutes ces hyperboles, de sorte que ces plans sont les plans principaux; ils coupent la surface suivant deux paraboles ayant même sommet o, et pour axe l'une ox, l'autre ox'; car, si ces paraboles principales étaient tournées du même côté, par exemple toutes les deux à droite de o, les sections hyperboliques faites par des plans normaux à l'axe et à droite de o auraient quatre sommets réels, ce qui est absurde. Ainsi, en résumé, les hyperboles obtenues en coupant par des plans perpendiculaires à l'axe sont situées : à droite du sommet, dans l'un des angles formés par les plans gox, lox (et dans son opposé); et, à gauche du sommet, dans le supplément de cet angle (et dans son opposé).

1221. Tout plan parallèle à l'un des plans principaux coupant la surface suivant une parabole égale à celle que détermine ce plan principal, on voit que *la surface peut être engendrée par l'une des paraboles principales glissant parallèlement à elle-même de façon que son sommet décrive l'autre parabole principale;* ce mode de génération est celui qui

révèle le plus nettement la forme de la surface. Ajoutons qu'*en projection orthogonale sur un plan principal, les génératrices enveloppent la parabole principale correspondante.*

Soient p et p' les paramètres des paraboles principales BOB', COC'; cherchons l'équation du paraboloïde, c'est-à-dire la relation entre les

Fig. 610.



constantes données p et p' et les coordonnées variables $x = \text{OI}$, $y = \text{PM}$, $z = \text{IP}$, d'un point quelconque M de cette surface (*fig.* 610). La section faite par le plan mené par M parallèlement au plan xoy étant une parabole lC_g égale à la parabole BOB', on a, puisque M appartient à cette parabole lC_g,

$$y^2 = 2p.\text{CP} = 2p.\text{KI}$$

et, puisque le point C appartient à la parabole COC',

$$z^2 = 2p'.\text{KO};$$

on en déduit

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2(\text{KI} - \text{KO}) = 2\text{OI},$$

c'est-à-dire

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2x.$$

1222. Le plan gox, coupant la surface suivant une première génératrice og, doit la couper encore suivant une génératrice du système opposé; et cette seconde génératrice doit être à l'infini, sans quoi l'axe ox rencontrerait la surface en deux points à distance finie; c'est donc la génératrice L_1. Or toute autre génératrice G du même système que og est dans un même plan ϖ avec L_1; les deux plans ϖ et gox ayant leur inter-

section L_1 à l'infini sont parallèles; donc G est parallèle au plan gox. Ainsi, toutes *les génératrices d'un système sont parallèles au plan gox*, et l'on verrait de même que *toutes les génératrices de l'autre système sont parallèles au plan lox*. Les deux plans fixes gox, lox, prennent le nom de *plans directeurs* de la surface. Il résulte du n° 1220 que *les plans principaux divisent en deux parties égales les angles dièdres formés par les plans directeurs*.

Toutes les génératrices d'un système étant parallèles à un même plan, ces droites divisent deux génératrices quelconques de l'autre système en parties proportionnelles, et la *surface peut être* considérée comme *engendrée par une droite mobile formant sur deux droites fixes deux divisions homographiques semblables*. Cette propriété est très-utile dans les applications; on l'utilise aussi pour construire des modèles en fil de la surface.

SURFACES DU SECOND ORDRE NON RÉGLÉES.

1223. Il nous reste à étudier les surfaces non réglées du second ordre.

Tout plan tangent α à l'une quelconque de ces surfaces en un point a n'a en commun avec cette surface que le point a; car, s'il en avait un autre b, la droite ab serait commune au plan α et au plan polaire β de b; elle serait donc sa propre polaire, et chacun de ses points étant à lui-même son conjugué serait sur la surface. Il y aurait donc sur la surface une droite ab, et, par suite, il y en aurait une infinité.

Il suit de là que, si l'on mène de part et d'autre d'un plan tangent α deux plans parallèles et infiniment voisins, un seul de ces deux plans rencontrera la surface. Il y a donc dans l'espace des plans qui ne rencontrent pas la surface, des plans qui la coupent, et des plans qui n'ont qu'un point commun avec elle; les pôles de ces plans sont pour les premiers *intérieurs* à la surface, pour les seconds *extérieurs*, et pour les derniers *situés sur la surface*.

On classe les surfaces non réglées du second ordre par la considération du plan tangent à l'infini. Ce plan peut être extérieur à la surface, la toucher ou la couper suivant une conique qui diffère de deux droites. De là, trois surfaces distinctes auxquelles on donne les noms suivants :

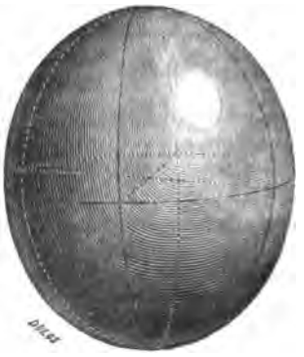
Surfaces du second ordre sur lesquelles on ne peut placer aucune droite.	n'ayant aucun point à l'infini	*Ellipsoïde.*
	tangente au plan de l'infini	*Paraboloïde elliptique.*
	coupée par le plan de l'infini suivant une conique ordinaire	*Hyperboloïde à deux nappes.*

Nous allons décrire successivement ces trois surfaces.

ELLIPSOÏDE.

1224. L'ellipsoïde (*fig.* 611) n'ayant aucun point à l'infini n'admet que des sections planes elliptiques. Le centre est *intérieur* à la surface, et, par suite, les trois axes rencontrent la surface chacun en deux points réels; ces trois axes ont généralement des longueurs différentes; combinés deux à deux, ils forment les axes des trois ellipses principales. Les sections par des plans parallèles à un plan principal sont des ellipses semblables à l'ellipse principale correspondante, et dont les sommets sont situés sur les deux autres ellipses principales : de là un mode de génération très-expressif de la surface.

Fig. 611.



Les deux plans cycliques passent évidemment par l'axe moyen; leurs traces sur le plan des deux autres axes sont les diamètres communs à l'ellipse principale située dans ce plan et au cercle concentrique décrit avec un rayon égal à l'axe moyen. Tout plan parallèle à un plan cyclique coupe l'ellipsoïde suivant un cercle; le lieu des centres des sections circulaires est formé de deux diamètres de l'ellipse principale, qui a pour axes l'axe maximum et l'axe minimum; ces diamètres, qui sont respectivement conjugués aux traces des deux plans cycliques, rencontrent l'ellipse en quatre points réels : ce sont les *ombilics*.

En désignant par a, b, c les longueurs des trois axes, et prenant respectivement ces axes pour axes des x, des y et des z, on trouve, en raisonnant comme au n° 1216, pour l'équation de l'ellipsoïde,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Il suffit, dans les formules du n° 1216, de changer c^2 en $-c^2$.

1225. Soient oa', ob', oc', un système de trois demi-diamètres conjugués, et oa, ob, oc, les trois demi-axes. Conservons le diamètre oc' et substituons à oa' et ob' deux autres diamètres oa'' et ob'' conjugués entre eux dans le plan $a'ob'$, et dont l'un oa'' soit l'intersection de ce plan avec le plan aob; on aura

$$\overline{oa'}^2 + \overline{ob'}^2 = \overline{oa''}^2 + \overline{ob''}^2.$$

Les trois droites oa'', ob', oc', formeront encore un système de diamètres conjugués, et le plan $b''oc'$ contiendra l'axe oc, puisque oa'' est dans le plan principal aob. Conservons maintenant oa'', et remplaçons ob'' et oc' par deux nouveaux diamètres conjugués situés dans le plan $c'ob''$, dont l'un, ob_1, soit l'intersection de ce plan avec le plan aob; alors, oa'' et ob_1 se trouvant l'un et l'autre dans le plan principal aob, le conjugué de ob_1 ne sera autre que l'axe oc, et l'on aura

$$\overline{ob''}^2 + \overline{oc'}^2 = \overline{ob_1}^2 + \overline{oc}^2.$$

Enfin, la comparaison du système actuel oa'', ob_1, oc, avec le système oa, ob, oc, donne

$$\overline{oa''}^2 + \overline{ob_1}^2 = \overline{oa}^2 + \overline{ob}^2,$$

et, en ajoutant les trois relations précédentes, on obtient

$$\overline{oa'}^2 + \overline{ob'}^2 + \overline{oc'}^2 = \overline{oa}^2 + \overline{ob}^2 + \overline{oc}^2;$$

ce qui donne la généralisation du premier des théorèmes d'Apollonius (1147) :

La somme des carrés de trois diamètres conjugués quelconques est constante.

Le second théorème d'Apollonius se généralise de même :

Le volume du parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués quelconques est constant.

En effet, on a évidemment

$$\text{vol.}(oa', ob', oc') = \text{vol.}(oa'', ob'', oc'),$$

puisque ces deux corps ont la même hauteur et des bases équivalentes comme parallélogrammes construits sur les deux systèmes de diamètres conjugués oa' et ob', oa'' et ob'', de la section faite par le plan $a'ob'$. On a de même

$$\text{vol.}(oa'', ob'', oc') = \text{vol.}(oa'', ob_1, oc) = \text{vol.}(oa, ob, oc),$$

d'où résulte

$$\text{vol.}(oa', ob', oc') = \text{vol.}(oa, ob, oc).$$

1226. Si deux des axes sont égaux, l'ellipsoïde devient de révolution autour du troisième axe. Enfin, si les trois axes sont égaux, l'ellipsoïde se réduit à une sphère.

PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE.

1227. Le paraboloïde elliptique (*fig.* 612) est tangent au plan de l'infini. Son centre est donc à l'infini, ainsi que l'un des plans principaux et les deux axes qu'il contient. Il ne reste à distance finie qu'un seul axe et les deux plans principaux qui passent par cet axe, auquel tous les diamètres sont d'ailleurs parallèles.

Fig. 612.

Toute section passant par l'axe est tangente à la droite de l'infini: c'est une *parabole* ayant pour axe l'axe même de la surface et pour sommet le point où cet axe rencontre le paraboloïde, c'est-à-dire le *sommet* de cette surface. *Toute section par un plan parallèle à l'axe est une parabole égale à celle que déterminerait un plan parallèle passant par l'axe.*

Les sections par les plans non parallèles à l'axe sont des ellipses, puisque ces sections n'ont aucun point commun à l'infini. Les ellipses dont les plans sont normaux à l'axe ont leurs sommets sur les deux paraboles principales qui, par suite, *sont situées l'une et l'autre d'un même côté du plan tangent au sommet*. Enfin, *la surface peut être engendrée par l'une des paraboles principales glissant parallèlement à elle-même de façon que son sommet décrive l'autre parabole principale.*

Tous ces résultats s'aperçoivent aisément après ce qui a été dit (1219 et suiv.) sur le paraboloïde hyperbolique.

En prenant pour axe des x l'axe commun des deux paraboles principales et pour axes des y et des z les tangentes au sommet de ces para-

boles, puis raisonnant comme au n° 1221, on obtient, pour l'équation du paraboloïde elliptique,

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = 2x.$$

Il suffit de changer dans l'équation du paraboloïde hyperbolique, p' en $-p'$.

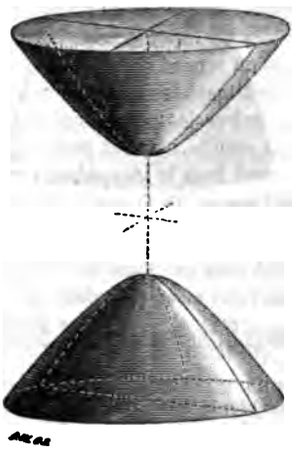
Ajoutons que la surface admet deux séries de sections circulaires dont les plans sont perpendiculaires à la section principale de moindre paramètre et également inclinés sur l'autre section principale.

Si les deux paraboles principales ont même paramètre, le paraboloïde devient de révolution.

HYPERBOLOÏDE A DEUX NAPPES.

1228. L'hyperboloïde à deux nappes (*fig.* 613), étant coupé par le plan de l'infini suivant une conique ordinaire C, a un centre o placé à distance

Fig. 613.



finie et *extérieur* à la surface. Le cône qui a le point o pour sommet et la conique C pour directrice est tangent à la surface tout le long de cette conique à l'infini ; on le nomme *cône asymptote*, et la surface étant intérieure à ce cône se compose de deux parties ou *nappes* séparées, situées chacune dans l'une des nappes du cône. Les diamètres et plans diamétraux conjugués de la surface sont les mêmes que ceux du cône ; elle a donc les mêmes axes que ce cône ; l'axe intérieur au cône rencontre donc seul la surface qui n'a que deux sommets réels. Tout plan passant par l'axe transverse

coupe la conique C de l'infini en deux points et, par suite, la surface suivant une hyperbole symétrique par rapport à cet axe et ayant pour sommets réels les deux sommets réels de la surface; ce fait met mieux encore en évidence la division de la surface en deux nappes.

Les sections par des plans perpendiculaires à l'axe transverse sont des ellipses semblables dont les sommets sont situés sur les deux hyperboles principales dont les plans passent par l'axe. Ces ellipses se réduisent à un point lorsque le plan sécant passe par l'un ou l'autre sommet; quand le plan sécant est entre les deux sommets, la section devient imaginaire.

Les plans cycliques de la surface sont les mêmes que ceux du cône asymptote.

L'équation de la surface se déduit de celle de l'hyperboloïde à une nappe en changeant b^2 en $-b^2$; elle est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

l'axe des x étant dirigé suivant l'axe réel.

Cette surface n'a aucune importance au point de vue des applications. Nous avons hâte d'ailleurs de terminer cette esquisse déjà bien longue de la théorie des surfaces du second ordre. Le lecteur qui voudra la lire, la plume à la main, en restituant les figures une à une, n'éprouvera aucun embarras pour démontrer les points secondaires que nous n'avons fait qu'énoncer. Il pourra ensuite, s'il veut pousser plus avant cette étude, consulter avec le plus grand fruit le *Supplément sur les propriétés projectives des figures dans l'espace*, de Poncelet; les *Mémoires* de M. Chasles *sur les cônes, sur les coniques sphériques* et *sur les surfaces réglées*, et enfin l'*Aperçu historique*.

IV. — ÉTUDE DE QUELQUES SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

SURFACES POLAIRES RÉCIPROQUES.

1229. La méthode des polaires réciproques s'étend aisément aux figures de l'espace; nous nous bornerons à quelques indications sur ce sujet (*voir* PONCELET, *Traité des Propriétés projectives*, t. II).

Deux surfaces sont dites *polaires réciproques* par rapport à une surface du second degré σ, lorsque chacune d'elles est le lieu des pôles des plans tangents à l'autre, les pôles étant pris relativement à la surface auxiliaire σ.

Pour que cette définition ne soit pas contradictoire, il faut prouver que, si une surface ψ est le lieu des pôles des plans tangents d'une surface φ, réciproquement la surface φ sera le lieu des pôles des plans tan-

gents à la surface ψ. Or, soient μ, μ', μ'', trois plans tangents à la surface φ; m, m', m'', leurs points de contact, et n, n', n'', leurs pôles par rapport à σ. Le point commun aux trois plans μ, μ', μ'', a pour polaire le plan $nn'n''$; mais, quand m' et m'' tendent vers m, il en est de même du point commun aux plans μ, μ', μ'', et alors, les points n' et n'' tendant vers n, le plan $nn'n''$ tend vers le plan tangent en n à la surface ψ. Donc le point m de la surface φ est le pôle du plan tangent en n à la surface ψ.

1230. *Quand deux surfaces sont polaires réciproques, la classe de l'une est égale au degré de l'autre.* Car, si une droite quelconque A rencontre la surface φ en k points, à ces k points répondent k plans polaires passant par la droite B conjuguée (1196) de la droite A et tangents à la surface ψ; et inversement, aux k plans menés par B tangentiellement à la surface ψ, répondent k points communs à la surface φ et à la droite A.

Il résulte de là que *la surface polaire réciproque d'une surface du second degré est une surface du second degré,* puisqu'une surface du second ordre est de seconde classe (1194).

1231. Le plus souvent, surtout lorsqu'il s'agit de transformer des propriétés métriques, on prend une sphère pour surface auxiliaire. Alors le point n' de la surface ψ correspondant au point n de la surface φ (*fig.* 617) s'obtient en abaissant du centre o de la sphère une perpendiculaire op sur le plan tangent en n à la surface φ et en portant sur cette perpendiculaire une longueur on' telle qu'on ait

$$op.on' = r^2,$$

r étant le rayon de la sphère. D'ailleurs, comme la polarité est réciproque, le plan tangent en n' à la surface ψ est à son tour perpendiculaire sur on et coupe cette droite en un point p_1 tel que

$$on.op_1 = r^2.$$

Il est évident, d'après cela, que, si l'on considère un ellipsoïde ε ayant pour axes a, b, c, sa polaire réciproque par rapport à une sphère concentrique de rayon r est un autre ellipsoïde dont les axes sont dirigés suivant les même droites que ceux du premier et ont respectivement pour longueurs $\frac{r^2}{a}$, $\frac{r^2}{b}$, $\frac{r^2}{c}$.

1232. Nous terminerons ce paragraphe par une remarque qui nous sera bientôt utile et qui se rattache à la théorie des pôles et des polaires.

Si, d'un point quelconque n d'un ellipsoïde, on abaisse un plan nsr perpendiculaire sur l'un des axes ox de cette surface, et si l'on désigne par

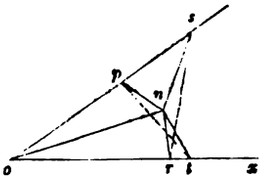
s le point où ce plan coupe la perpendiculaire op menée du centre o s r le plan pnt tangent en n, on a la relation

$$os.op = \alpha^2,$$

α étant la longueur de l'axe dirigé suivant ox (*fig.* 614).

En effet, le plan *nsr* a pour pôle, par rapport à l'ellipsoïde, le point *t*

Fig. 614.

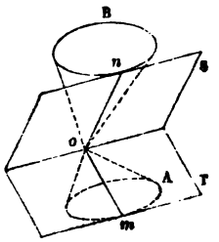


où le plan tangent en *n* coupe l'axe *ox*; mais ce plan a le même pôle par rapport à l'ellipsoïde et par rapport à la sphère concentrique de rayon α. Donc le plan *pnt* passant par *t* doit avoir son pôle par rapport à la sphère dans le plan *nsr*, et, comme ce pôle doit être sur *op*, il n'est autre que le point *s*, ce qui entraîne la relation ci-dessus.

SURFACES APSIDALES.

1233. Deux surfaces φ et ψ sont dites *apsidales* l'une de l'autre par rapport à un point fixe *o*, lorsque toute sphère ayant *o* pour centre les coupe suivant deux lignes A et B, telles que les cônes α et β ayant *o* pour sommet commun et les lignes A et B pour directrices soient (1211) supplémentaires (*fig.* 615).

Fig. 615.



Deux points *m* et *n* de deux surfaces apsidales sont dits *correspondants* lorsqu'ils appartiennent à la fois à deux lignes sphériques corres-

pondantes A et B et à deux génératrices correspondantes des deux cônes supplémentaires α et β. Ainsi, m étant un point quelconque de la surface φ, on décrira une sphère du point o comme centre et avec om pour rayon; A étant l'intersection de la surface φ et de la sphère, et α étant le cône ayant o pour sommet et A pour directrice, on élèvera par le point o une perpendiculaire on au plan qui touche le cône α suivant la génératrice om; le point n où cette perpendiculaire rencontre la sphère sera le point de la surface ψ qui correspond au point m de la surface φ.

THÉORÈME.

1234. *Les plans tangents μ et ν aux points correspondants m et n de deux surfaces apsidales φ et ψ sont perpendiculaires au plan mon et perpendiculaires entre eux.*

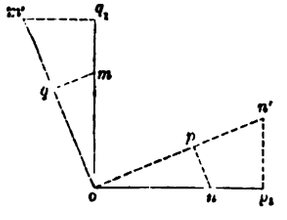
En effet, la tangente mT à la courbe sphérique A (*fig.* 615) est à angle droit sur le rayon om de la sphère; elle est aussi à angle droit sur la droite on, puisque on est perpendiculaire au plan omT; donc cette tangente est perpendiculaire au plan mon, et, par suite, il en est de même du plan μ qui contient mT.

On voit de même que le plan ν est perpendiculaire au plan mon.

Il reste à montrer que les plans μ et ν sont perpendiculaires entre eux, ou bien, puisqu'ils sont l'un et l'autre perpendiculaires au plan mon, que leurs traces sur ce dernier plan sont rectangulaires. Or, soit m_1 (*fig.* 616)

Fig. 616.

Fig. 617.



un point voisin de m sur la section de la surface φ par le plan mon qui est pris ici pour plan de la figure; la droite nm_1 sera à la limite la trace du plan μ. Soit n_1 le point de la surface ψ qui répond à m_1; rabattons le triangle onn_1 en onn_2 sur le plan de la figure, par une rotation autour de on. Le plan nn_1n_2 est à la limite tangent suivant nn_2 au cône de révolution que décrit nn_1 en tournant autour de no; il est donc perpendiculaire au plan de la figure, et, par suite, nn_2 est à la limite la trace du plan ν. Pour un motif analogue, la droite on_2 peut être considérée comme la projection orthogonale de on_1; donc l'angle n_1on_2 est droit comme

étant la projection d'un angle droit m_1on_1 dont un côté om_1 est dans le plan de projection. Il suit de là que le triangle non_2 n'est autre que le triangle mom_1 qui aurait tourné de 90 degrés autour du point o dans son plan; les droites mm_1, nn_2, sont donc à la limite perpendiculaires l'une à l'autre.

Corollaires.

1235. 1° Les normales en m et n aux surfaces φ et ψ sont contenues dans le plan mon et sont perpendiculaires entre elles.

2° Les perpendiculaires abaissées du point o sur les plans tangents μ et ν sont contenues dans le plan mon, et leurs longueurs, c'est-à-dire les distances du point o aux plans μ et ν, sont égales.

3° La section de la surface φ par le plan moT (*fig.* 615) a pour tangente en m l'intersection du plan omT et du plan μ; cette intersection est donc, comme chacun de ces deux plans, perpendiculaire au plan mon et par suite à la droite om. Donc la droite om est une normale à cette section, et l'on peut donner des surfaces apsidales cette définition, que Mac-Cullag prend pour point de départ dans le tome XVII des *Transactions of the Royal Irish Academie* : *La surface apsidale ψ d'une surface donnée φ par rapport à un point o est le lieu des points obtenus en portant, à partir de o, perpendiculairement à chaque plan passant par ce point, des longueurs égales aux normales abaissées du point o sur la section faite dans la surface φ par le plan considéré.*

THÉORÈME.

1236. *Si deux surfaces s et s' sont polaires réciproques par rapport à une sphère de centre o, leurs apsidales φ et φ', relatives au point o sont polaires réciproques par rapport à la même sphère* (*fig.* 617).

En effet, soient n et n' deux points homologues de s et de s', et m et m' les points correspondants de φ et de φ'. Prenons pour plan de la figure le plan non', et désignons par ν, ν', μ, μ', les plans tangents aux surfaces s, s', φ, φ', aux points n, n', m, m'. D'après le corollaire 1° puisque on' est perpendiculaire au plan ν, la droite om est située dans le plan de la figure, et il en est de même de om', puisque le plan ν' est perpendiculaire à on. D'ailleurs, si l'on abaisse np et mq perpendiculaires à on' et à om', ces lignes seront les traces des plans ν et μ, et l'on aura non-seulement $on' = om'$, mais encore (même corollaire) $op = oq$. Donc la relation

$$op.on' = r^2,$$

où r est le rayon de la sphère auxiliaire, équivaut à

$$oq.om' = r^2,$$

ce qui prouve que les surfaces φ et φ' sont polaires réciproques par rapport à la sphère de centre o et de rayon r.

SURFACE DES ONDES.

1237. Supposons qu'une suite d'ébranlements périodiques ait lieu en un point d'un milieu biréfringent : le mouvement vibratoire se propagera dans toutes les directions autour de ce point, et, au bout de l'unité de temps, le premier ébranlement sera parvenu sur une certaine surface que Fresnel a considérée le premier et à laquelle on donne le nom de *surface des ondes*.

Laissant complétement de côté le point de vue physique, nous allons ici étudier géométriquement cette surface intéressante et signaler les particularités curieuses qu'offre sa forme.

Nous partirons de la définition suivante :

La surface des ondes est la surface apsidale φ d'un ellipsoïde ε, par rapport au centre de cette dernière surface.

Le théorème du n° 1236 montre que *la polaire réciproque de la surface des ondes φ par rapport à une sphère concentrique à l'ellipsoïde ε est encore une surface des ondes;* c'est la surface apsidale φ' de l'ellipsoïde ε', polaire réciproque de l'ellipsoïde primitif ε.

Le théorème du n° 1234 permet de construire le plan tangent et la normale en un point quelconque de la surface des ondes.

Enfin, en combinant le théorème du n° 1236 et les corollaires du théorème du n° 1234, on voit que la surface des ondes φ peut être déduite des ellipsoïdes ε et ε' de la manière suivante :

1° *Si, par le centre de l'ellipsoïde ε, on élève une perpendiculaire à chaque plan diamétral, et qu'on porte sur cette perpendiculaire, à partir du centre, des longueurs égales aux demi-axes de la section diamétrale considérée, le lieu des extrémités de ces longueurs est la surface φ.*

2° *Si, à chaque plan diamétral de l'ellipsoïde ε', on mène des plans parallèles à des distances de ce plan égales aux longueurs des demi-axes de la section diamétrale considérée, la surface φ est la surface tangente à tous ces plans.*

1238. Étudions maintenant la forme de la surface en partant de la première de ces deux définitions.

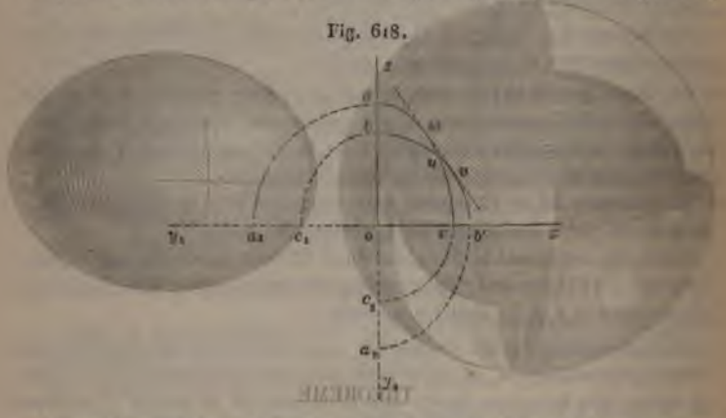
On voit d'abord immédiatement que la surface φ admet le même centre o et les mêmes plans principaux xoy, yoz, zox, c'est-à-dire les mêmes plans de symétrie que l'ellipsoïde ε. Désignons par a, b, c, les longueurs des trois axes de cet ellipsoïde qui sont dirigés respectivement suivant ox, oy, oz; supposons $a > b > c$, et cherchons les sections principales de la

surface des ondes, c'est-à-dire les sections de cette surface par les plans principaux xoy, yoz, zox.

Pour qu'un point de la surface φ soit dans le plan xoy, il faut et il suffit que le plan diamétral correspondant soit perpendiculaire au plan xoy, c'est-à-dire passe par l'axe oz; mais chacune des sections diamétrales passant par oz a pour demi-axes le demi-axe mineur c de l'ellipsoïde et l'un des demi-diamètres de l'ellipse (ab). La section de la surface φ se compose donc du cercle qui a pour centre o et pour rayon c, et de l'ellipse (ab) qu'on aurait fait tourner de 90 degrés autour de son centre; d'ailleurs, le cercle est intérieur à l'ellipse, puisque son rayon c est inférieur à la fois aux deux demi-axes b et a de l'ellipse; nous désignerons le cercle par C et l'ellipse par C'.

On voit d'une manière analogue que la section faite par le plan yoz se compose du cercle qui a pour centre o et pour rayon a, et de l'ellipse (bc)

Fig. 618.



qui aurait tourné de 90 degrés autour du point o; ici, c'est l'ellipse qui est intérieure au cercle, puisque le rayon de ce cercle est plus grand que chacun des demi-axes de l'ellipse; nous désignerons ce cercle et cette ellipse respectivement par A et A'.

Enfin, le plan zox coupe la surface φ suivant le cercle ayant o pour centre et b pour rayon, et suivant l'ellipse (ca) qu'on aurait fait tourner de 90 degrés autour du point o. Ce cercle, que nous désignerons par B, et cette ellipse, que nous désignerons par B', se coupent en quatre points réels, puisque le rayon b du cercle a une valeur comprise entre les valeurs a et c des demi-axes de l'ellipse. Ces points reçoivent le nom d'*ombilics* de la surface des ondes.

D'après cela, pour se rendre compte de la forme de la surface, en se bornant, bien entendu, à la partie comprise dans le trièdre des coordon-

nées positives, on imaginera que ce trièdre soit fendu suivant l'axe des y, et que l'on ait rabattu la face zoy en zoy_1 sur le plan des zx, et la face xoy en xoy_2 sur le même plan des zx. Les trois faces étant ainsi appliquées sur le même plan, on pourra dessiner avec exactitude les trois couples de sections principales en se bornant au quart de chacune d'elles, comme on le voit sur la *fig.* 618. Il suffit dès lors de ramener par la pensée les trois plans dans leur position primitive, de manière à reformer le trièdre, pour acquérir une idée nette de la forme de la surface telle qu'on la voit en perspective dans la *fig.* 619; on a ménagé dans cette figure une ouverture qui permet de voir la nappe intérieure. Quant à la *fig.* 620, elle représente le corps solide ou noyau qui serait recouvert par la nappe intérieure seule.

Fig. 619.

Fig. 620.

THÉORÈME.

1239. *La sphère qui passe par un point quelconque m de la surface et par la projection q du centre sur le plan tangent en ce point, et qui a son centre sur l'un des axes, coupe le plan principal perpendiculaire à cet axe suivant le cercle principal correspondant.*

Par exemple, la sphère qui passe par m et q et qui a son centre sur l'axe ox coupe le plan yoz suivant le cercle A.

En effet, soient (*fig.* 621) n un point quelconque de l'ellipsoïde s, p la projection du centre o sur le plan tangent en n, et ns la trace sur le plan nop (qui est ici pris pour plan de la figure) du plan mené par n perpendiculairement à l'axe ox. Faisons tourner la figure de 90 degrés dans son plan autour du point o, de manière à l'amener en $omqg$; m sera un point quelconque de la surface des ondes et q la projection du centre o sur le plan tangent en ce point. Quant à la droite mg, nouvelle position de ns,

elle sera perpendiculaire à *ns* et, par suite, parallèle à la projection de l'axe *ox* sur le plan de la figure; on aura d'ailleurs (1232) $og.oq = a^2$.

Cela posé, imaginons le point *c* où l'axe *ox* coupe le plan mené perpendiculairement à la droite *qm* par son milieu *i*; *c* sera le centre de la sphère considérée; soient *d* sa projection sur le plan de la figure et *h* sa distance à ce plan. En désignant par ρ le rayon du cercle suivant lequel la sphère coupe le plan principal *zoy*, on aura

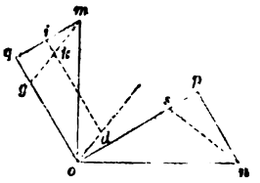
$$\rho^2 = \overline{cm}^2 - \overline{co}^2 = (h^2 + dm^2) - (h^2 + do^2) = \overline{dm}^2 - \overline{do}^2,$$

ou, en appelant *k* le point de rencontre de *mg* et de la droite *id* qui est parallèle à *oq*,

$$\rho^2 = \overline{dm}^2 - \overline{mk}^2 = \left(\overline{di}^2 + \overline{im}^2\right) - \left(\overline{ik}^2 + \overline{im}^2\right) = \overline{di}^2 - \overline{ik}^2$$
$$= (di + ik)(di - ik) = (dk + 2ik)\,dk = og\,(og + gq) = og.oq,$$

c'est-à-dire, d'après la relation ci-dessus, $\rho = a$, ce qui prouve que le cercle d'intersection n'est autre que le cercle principal A.

Fig. 621.



1240. Ce théorème, qu'un géomètre anglais, M. Niven, a trouvé par l'analyse, et dont nous venons de donner une démonstration géométrique, fournit une nouvelle solution du problème du plan tangent et une explication simple des particularités de la surface.

Veut-on le plan tangent en un point *m*? On considérera les trois sphères passant par le point *m* et par chacun des cercles principaux A, B, C; le second point commun à ces trois sphères sera le point *q*, projection du centre *o* sur le plan tangent cherché, qui, par suite, n'est autre que le plan mené par *q* à angle droit sur *oq*.

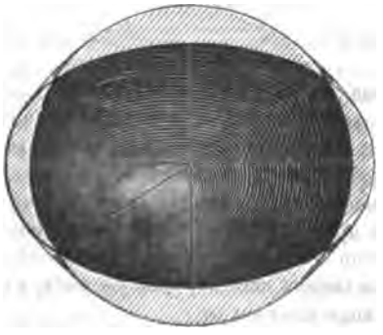
Inversement, un plan tangent étant donné, veut-on le point de contact? Par la projection *q* du centre *o* sur le plan donné, et par chacun des cercles principaux A, B, C, on mènera trois sphères, et le second point commun *m* de ces sphères sera le point de contact du plan tangent considéré.

1241. Revenons à la section de la surface par le plan *zox*, laquelle se compose du cercle B et de l'ellipse B′ qui ont quatre points communs réels tels que *u*, et quatre tangentes communes réelles, telles que *vw*

(*fig.* 618). Cherchons le plan tangent en u à la surface des ondes. La projection du centre o sur ce plan tangent doit être le second point commun aux trois sphères passant par u et par chacun des cercles principaux A, B, C; mais, comme le point u est sur le cercle B, la sphère correspondant à ce cercle est indéterminée, et l'on trouve pour la projection du centre sur le plan tangent, non pas un point, mais un lieu qui est le cercle d'intersection des sphères passant par u et par chacun des cercles A et C, et dont le plan est perpendiculaire au plan zox. Il en résulte que *la surface admet au point u une infinité de plans tangents ayant pour enveloppe un cône* dont le sommet est au point u et dont les tangentes au cercle B et à l'ellipse B′ sont deux génératrices opposées.

Considérons en second lieu la tangente commune vw. Le plan π élevé par cette ligne perpendiculairement au plan zox est évidemment tangent à la surface des ondes aux points v et w. Il est facile de voir que *le plan π touche la surface tout le long du cercle décrit dans ce plan sur vw comme diamètre*. En effet, le point de contact du plan π doit être le second point commun aux trois sphères passant par la projection v du centre o sur ce plan et par chacun des trois cercles principaux A, B, C; mais, le point v étant sur le cercle B, la sphère relative à ce cercle est indéterminée, et l'on trouve pour le point de contact, non pas un point unique, mais un lieu qui est le cercle commun aux deux sphères déterminées par le point v et par chacun des cercles A et C; ce cercle, dont le plan est évidemment

Fig. 622.



perpendiculaire au plan zox, n'est autre que le cercle décrit dans le plan π sur vw comme diamètre.

Ainsi, la surface des ondes a quatre *points coniques* et quatre *cercles de contact*. La *fig.* 622 représente la section de la surface par un plan passant par les quatre points coniques (¹).

(¹) M. Mannheim a démontré les propriétés principales de cette surface et

1242. M. Darboux, qui a étudié (*Comptes rendus*, t. XCII) la surface qu'on obtient quand les cercles A, B, C ont des positions quelconques dans l'espace, a déduit du théorème de M. Niven le moyen de construire les points (et par suite les plans tangents) de la surface des ondes sans passer par la considération de l'ellipsoïde.

O étant le centre de la surface des ondes et q le second point d'intersection des trois sphères passant respectivement par les cercles A, B, C et par un point quelconque m de la surface, l'angle Oqm est droit; et il est clair que cette propriété constitue une définition de la surface; car, si m est un point quelconque de l'espace et q le second point commun aux sphères déterminées par m et par les cercles A, B, C, l'angle Oqm n'est plus droit.

Cela posé, prenons deux sphères quelconques passant l'une par le cercle A, l'autre par le cercle B, et cherchons les points de la surface qui sont situés sur le cercle γ commun à ces deux sphères. Il résulte immédiatement des propriétés des axes radicaux que toute sphère passant par le troisième cercle C coupera γ en deux points μ et μ', tels que la droite $\mu\mu'$ aille passer par un point fixe a situé sur la droite commune aux plans des cercles C et γ. Si le point μ appartient à la surface, il faudra que l'angle $O\mu\mu'$, c'est-à-dire l'angle $O\mu a$, soit droit. Donc le point μ sera sur la sphère admettant Oa pour diamètre. Cette construction donne deux points sur le cercle γ.

TORE.

1243. *Le tore* (893) *est la surface apsidale d'une sphère* par rapport à un point quelconque de l'espace. En effet, cette surface apsidale est évidemment de révolution autour de la droite oz qui joint le point considéré o au centre de la sphère; d'ailleurs, comme le plan tangent à la sphère est perpendiculaire au plan méridien du point de contact, il résulte du mode de correspondance (1233) entre les points de deux surfaces apsidales que la méridienne de cette surface de révolution n'est autre qu'un grand cercle de la sphère qui aurait tourné de 90 degrés dans son plan autour du point o.

La méridienne complète se compose de deux cercles ω et ω' symétriques par rapport à l'axe oz; le point o, qui est sur l'axe et qui est le milieu de $\omega\omega'$, est le *centre* du tore; nous désignerons par d le *rayon moyen* $o\omega$ du tore et par r le rayon ωf du cercle méridien ω.

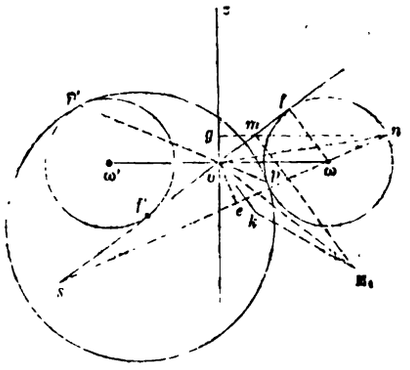
---

obtenu plusieurs propriétés nouvelles par d'élégantes considérations de Géométrie cinématique (*Comptes rendus*, 1867 et 1874; *Congrès de Lille*, 1874, *de Nantes*, 1875, et *du Havre*, 1877; *Cours de Géométrie descriptive*, 1880).

1244. *Tout plan bitangent* P *coupe le tore suivant le système de deux cercles.* (YVON VILLARCEAU, *Comptes rendus*, 1848.)

En effet, prenons pour plan de la figure (*fig.* 623) le plan méridien perpendiculaire au plan P; les deux points de contact f et f' seront (887) situés dans ce plan méridien, de sorte que la trace du plan P sera la tangente commune intérieure ff' aux cercles ω et ω'. Désignons par M un point quelconque de la section, et soit gn la trace du parallèle qui passe par ce point; le point M se projettera en m sur gn et ff', et l'on aura

Fig. 623.



$oM = on$, puisque oM et on sont deux génératrices du cône qui a pour sommet le point o et pour base le parallèle gn. Si l'on rabat le plan P, autour de ff', sur le plan de la figure, le point M viendra donc sur la perpendiculaire élevée au point m sur ff' en un point M_1 tel, que $oM_1 = on$. Cela posé, prolongeons $n\omega$ jusqu'à sa rencontre s avec ff' et menons oe perpendiculaire sur $n\omega$; le rapport de oe à ωf est égal à celui de so à $s\omega$ ou encore à celui de om à ωn et, comme $\omega f = \omega n$, on a $om = oe$; l'égalité des triangles rectangles oen, omM_1, montre alors que l'angle $on\omega$ est égal à oM_1m et, par suite, à M_1ok, ok étant la perpendiculaire élevée par o sur ff'. Si l'on prend $ok = r$, les triangles okM_1, $o\omega n$, seront donc égaux, et l'on aura $M_1k = n\omega = d$. On voit ainsi, en redressant le plan, que *la section se compose de deux cercles dont le rayon est égal au rayon moyen d du tore et dont les centres sont situés de part et d'autre de o, à une distance égale à r, sur la perpendiculaire menée par o au plan de la figure.*

Par tout point du tore passent donc *quatre cercles* de la surface; ce

sont le parallèle, le méridien, et deux des quatre cercles suivant lesquels le tore est coupé par les plans tangents menés par ce point au cône Σ qu'engendre la droite ff' en tournant autour de l'axe oz.

1245. *Toute sphère bitangente coupe le tore suivant un système de deux cercles.* (MANNHEIM, *Nouvelles Annales*, 1856.)

En effet, prenons pour plan de la figure le plan du centre c de la sphère et de l'axe oz du tore. Ce plan méridien renferme les deux points de contact p et p', puisque les normales $p\omega$, $p'\omega'$, en ces points passent par c et rencontrent oz. Les points p et p' étant d'ailleurs deux points antihomologues des cercles ω et ω', la droite pp' passe par le centre de similitude o. Soient P et Q les plans tangents au cône Σ menés par la droite pp', et T le plan tangent commun à la sphère et au tore au point p; l'un θ des deux cercles suivant lesquels le plan p coupe le tore passe par p et p' et a pour tangente en p l'intersection L des plans P et T; mais le cercle σ que le plan P détermine dans la sphère passe aussi par les points p et p' et a pour tangente en p la droite L. Donc les cercles θ et σ coïncident, et l'on verrait de même que le cercle que le plan Q détermine dans la sphère coïncide avec l'un de ceux que ce plan détermine dans le tore.

1246. Nous terminerons ces notions sur le tore par la solution d'un problème qui se présente dans les applications (MANNHEIM, *Cours de Géométrie descriptive*, 1880) :

Etant donné un tore et un point quelconque S *de l'espace, mener par le point* S *des droites bitangentes au tore.*

Soit SL l'un de ces rayons bitangents; en tournant autour de l'axe de révolution du tore, il engendre un hyperboloïde de révolution qui touche le tore suivant les deux parallèles engendrés par la rotation des points de contact de la droite SL.

Considérons le plan méridien qui passe par le point donné S. Ce plan coupe le tore suivant deux cercles C_1 et C_2 et l'hyperboloïde suivant une hyperbole passant par S et bitangente à chacun des cercles C_1 et C_2. Soient Sp, Sq les tangentes menées de S aux cercles C_1 et C_2; prenons sur Sp, $Sr = Sq$, en sorte que $pr = Sp - Sq$. L'hyperbole est le lieu des points pour lesquels la différence des tangentes menées de ces points aux cercles C_1 et C_2 est constante et égale à pr. Si donc on décrit, dans le plan méridien considéré, un cercle concentrique à C_1 et passant par r, ce cercle coupera C_2 en deux points a et b qui seront les points où l'hyperbole touche le cercle C_2. Ces points appartiennent aux parallèles de contact du tore et de l'hyperboloïde. Les rayons bitangents demandés seront donc les droites qui, passant par S, s'appuient sur ces deux parallèles, c'est-à-dire les génératrices communes aux deux cônes qui ont

le point donné S pour sommet commun et, pour bases respectives, les parallèles engendrés par *a* et *b*.

Nous laissons au lecteur le soin de voir ce que devient la construction lorsque le point S s'éloigne à l'infini dans une direction donnée, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit de *mener au tore des rayons bitangents et parallèles à une droite donnée.*

QUESTIONS PROPOSÉES

SUR LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE V.

LE PLAN.

§§ I, II. — Premières notions sur le plan. — Droites et plans parallèles.

531. Mener par un point donné une droite qui rencontre deux droites données non situées dans un même plan.

532. Mener à une droite donnée une parallèle qui s'appuie sur deux droites données non situées dans un même plan.

533. Mener par un point donné une droite qui rencontre une droite et un cercle non situés dans un même plan.

534. Dans tout quadrilatère gauche, c'est-à-dire dont les côtés ne sont pas situés dans un plan unique, les milieux des côtés sont les sommets d'un parallélogramme.

535. Plusieurs droites étant données en grandeur, direction et sens, si on les transporte parallèlement à elles-mêmes, de telle sorte que l'extrémité de chacune d'elles se confonde avec l'origine de la suivante, la droite qui part de l'origine de la première et aboutit à l'extrémité de la dernière prend le nom de *résultante* des droites proposées; celles-ci sont dites à leur tour les *composantes* de la résultante. *Composer* des droites, c'est trouver leur résultante; *décomposer* une droite, c'est trouver des droites qui aient pour résultante la droite donnée. Ces définitions posées, démontrer les propositions suivantes :

1° La résultante de plusieurs droites reste la même, quel que soit l'ordre dans lequel on compose ces droites.

2° La résultante de plusieurs droites n'est pas changée quand on remplace un certain nombre d'entre elles par leur résultante.

3° Si, sans changer la direction ni le sens des composantes, on altère

leur grandeur dans un certain rapport, la résultante conserve sa direction et son sens, mais sa grandeur est altérée dans le même rapport.

4° Si, sans altérer la grandeur ni la direction des composantes, on change leur sens, la résultante conserve sa grandeur et sa direction, et change de sens.

5° Pour décomposer une droite D en deux autres dont l'une soit une droite donnée d, il suffit de composer D avec d prise en sens contraire.

536. Une droite se déplace en restant parallèle à un plan donné et en s'appuyant sur deux droites non situées dans un même plan : quel est le lieu des points qui divisent la droite mobile dans un rapport donné?

§§ III, IV. — Droite et plan perpendiculaires. — Projection d'une droite sur un plan. — Angle d'une droite et d'un plan. — Plus courte distance de deux droites.

537. Mener, dans un plan donné et par un point de ce plan, une droite perpendiculaire à une droite donnée d'une manière quelconque dans l'espace.

538. Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il suffit qu'elle soit également inclinée sur trois droites passant par son pied dans ce plan.

539. Étant donnés un plan P et deux points A et B situés d'un même côté de ce plan, trouver sur le plan P un point tel, que la somme de ses distances aux points A et B soit minimum.

540. Étant donnés un plan P et deux points A et B situés de part et d'autre de ce plan, trouver sur le plan P un point tel, que la différence de ses distances aux points A et B soit maximum.

541. Étant donnée une droite D et deux points A et B situés comme on voudra dans l'espace, trouver le point de la droite D qui est équidistant des points A et B.

542. Étant donnés un triangle ABC et un plan quelconque P, trouver le point du plan P qui est équidistant des trois sommets du triangle ABC.

543. Trouver le lieu des points d'un plan dont la différence des carrés des distances à deux points donnés hors de ce plan est constante.

544. Trouver le lieu des points d'un plan d'où l'on voit sous un angle droit une droite située hors de ce plan.

545. La projection d'un angle droit sur un plan qui n'est parallèle à aucun de ses côtés, est un angle obtus si le plan de projection coupe les deux côtés de l'angle droit ou leurs deux prolongements; sinon, cette projection est un angle aigu.

546. Si par l'une des diagonales d'un parallélogramme on mène un

plan quelconque, les perpendiculaires abaissées sur ce plan des extrémités de l'autre diagonale sont égales.

547. Deux droites égales AB, A'B', étant situées d'une manière quelconque dans l'espace, trouver une droite D telle qu'une rotation autour de D amène simultanément A en A' et B en B'.

548. Étant donné un angle AOB, trouver le lieu des points M de l'espace tels que, si on les joint au sommet O de l'angle, la somme des projections de la droite OM sur les deux côtés de l'angle soit constante.

549. Le plan mené parallèlement à deux droites non situées dans un même plan, par le milieu de leur plus courte distance, passe par les milieux de toutes les droites qui joignent un point de la première droite à un point de la seconde.

550. Lorsqu'une droite est parallèle à un plan, la plus courte distance de cette droite à toutes les droites du plan qui ne lui sont pas parallèles est constante.

551. Entre deux droites données d'une manière quelconque dans l'espace, mener une droite parallèle à un plan donné et ayant une longueur donnée.

552. Trouver le lieu décrit par le milieu d'une droite de longueur constante, dont les extrémités s'appuient sur deux droites rectangulaires et non situées dans un même plan.

553. Un angle AOB tourne dans l'espace autour d'une droite ZZ' parallèle à sa bissectrice; démontrer que, si A'O'B' est une seconde position d'ailleurs quelconque de cet angle : 1° les droites OA et O'A' ne sont pas dans un même plan, non plus que les droites OB et O'B'; 2° OA et O'B' sont dans un même plan, et il en est de même de O'A' et de OB; 3° trois quelconques des droites OA, OB, O'A', O'B', ne sont pas parallèles à un même plan.

554. Soient n plans tels que deux quelconques ne soient pas parallèles, que trois quelconques ne soient pas parallèles à une même droite, et enfin que quatre quelconques ne passent pas par un même point. Prouver que le nombre des droites d'intersection de ces plans est égal à $\frac{1}{2}n(n-1)$, que le nombre des points d'intersection de ces droites est égal à $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$.

555. Si la somme des perpendiculaires abaissées d'un point A sur deux plans donnés est égale à la somme des perpendiculaires abaissées d'un autre point B sur les mêmes plans, cette somme reste la même pour tout

autre point C de la droite AB. — Étendre ce théorème au cas d'un nombre quelconque de plans.

556. Soient trois points A, B, C, et deux plans P et Q. Si la somme des deux perpendiculaires abaissées de chacun de ces points sur les deux plans est la même pour les trois points, cette somme restera encore la même pour tout autre point du plan ABC. — Étendre ce théorème au cas d'un nombre quelconque de plans.

§§ V, VI, VII. — Angles dièdres. — Plans perpendiculaires. Angles polyèdres.

557. Si, par un point O de l'espace, on mène deux parallèles OA et OB à un plan donné P, puis par le même point O deux plans respectivement perpendiculaires à OA et à OB, l'intersection de ces plans est perpendiculaire au plan P. (Cette proposition est utile dans les applications.)

558. Si l'on projette un même point de l'espace sur deux plans qui se coupent, les perpendiculaires abaissées des deux projections sur l'intersection des deux plans la rencontrent au même point. — Réciproquement, si cette condition est remplie pour deux points des deux plans, ces points sont les projections d'un même point de l'espace.

559. Deux droites égales, parallèles et de même sens, ont leurs projections sur un même plan égales, parallèles et de même sens. — Réciproque de cette proposition.

560. Toute ligne qui se projette, sur deux plans qui se coupent, suivant une ligne droite, est elle-même une ligne droite.

561. La projection, sur un plan ou sur un axe, de la résultante de plusieurs droites est la résultante des projections de ces droites. (*Voir* la Question 535.)

562. Si une droite est également inclinée sur les deux faces d'un angle dièdre, ses traces sur les deux faces sont également distantes de l'arête de l'angle dièdre. — Réciproque.

563. Quel est le lieu des points équidistants de deux plans qui se coupent ?

564. Quel est le lieu des points de l'espace équidistants de deux droites qui se coupent ?

565. Les perpendiculaires abaissées d'un même point sur des plans dont les intersections sont parallèles sont dans un même plan.

566. Deux angles dièdres qui ont leurs arêtes parallèles et leurs faces perpendiculaires chacune à chacune sont égaux ou supplémentaires.

567. Quel est le lieu des points équidistants de deux plans donnés et de deux points ou de deux droites données situées dans un même plan?

568. Quel est le lieu des points tels, que la somme de leurs distances à deux plans donnés soit égale à une droite donnée?

569. Quel est le lieu des points tels, que la somme de leurs distances à trois plans donnés soit égale à une droite donnée? — Étendre ce problème au cas d'un nombre quelconque de plans.

570. Trouver sur une droite donnée un point tel, que la somme de ses distances à deux plans qui se coupent soient un minimum.

571. Montrer que, si par un même point de l'arête d'un angle dièdre on mène dans chaque face une droite faisant un angle donné α avec cette arête, l'angle rectiligne ainsi obtenu ne varie pas proportionnellement à l'angle dièdre, à moins que l'angle α ne soit droit.

572. Dans tout angle trièdre, les plans bissecteurs des angles dièdres se coupent suivant une même droite. — Quel est le lieu des points équidistants des trois faces d'un angle trièdre indéfiniment prolongées?

573. Dans tout angle trièdre, les plans menés perpendiculairement aux faces, par les bissectrices de ces faces, se coupent suivant une même droite. — Quel est le lieu géométrique des points équidistants des trois arêtes d'un angle trièdre indéfiniment prolongées?

574. Dans tout angle trièdre, les plans menés par les arêtes perpendiculairement aux faces opposées se coupent suivant une même droite.

575. Dans tout angle trièdre, les plans menés par les arêtes et les bissectrices des faces opposées se coupent suivant une même droite.

Remarque. — Les quatre théorèmes précédents sont vrais lorsque le sommet de l'angle trièdre se transporte à l'infini, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit de trois plans dont les trois intersections deux à deux sont parallèles.

576. Couper un angle polyèdre à quatre faces, de manière que la section soit un parallélogramme.

577. Si, dans le plan de chaque face d'un angle trièdre et par son sommet, on mène une perpendiculaire à l'arête opposée, les trois perpendiculaires obtenues sont dans un même plan.

578. Tout plan perpendiculaire à l'une des arêtes d'un angle trièdre rectangle coupe cet angle trièdre suivant un triangle rectangle.

579. La somme des angles formés par les arêtes d'un angle trièdre avec les faces opposées est comprise entre la somme des faces et la moitié de cette somme.

580. Si, par un point pris dans l'intérieur d'un angle polyèdre, on

abaisse des perpendiculaires sur toutes ses faces, le nouvel angle polyèdre ainsi formé est *supplémentaire* du premier. (*Voir* les nos 572, 573.)

581. Dans tout angle polyèdre convexe de n faces, la somme des angles dièdres est comprise entre $2n$ et $2n - 4$ angles droits.

582. La somme des angles aigus formés avec les arêtes d'un trièdre trirectangle par une droite située dans l'intérieur du trièdre et passant par son sommet est moindre que 180°. — Peut-on assigner une limite inférieure de la même somme?

583. A, B, C, étant trois points pris à volonté sur les arêtes d'un angle trièdre trirectangle et O la projection du sommet S de cet angle trièdre sur le plan ABC, démontrer que le triangle ASB est moyen proportionnel entre les triangles ABC et OAB.

584. Étant donné le triangle suivant lequel la feuille de dessin est rencontrée par un angle trièdre trirectangle, trouver, par des constructions graphiques exécutées sur le plan de cette feuille, les inclinaisons des trois arêtes de l'angle trièdre sur ce plan.

585. Couper un angle trièdre trirectangle par un plan tel, que la section soit un triangle égal à un triangle donné.

APPENDICE DU CINQUIÈME LIVRE.

586. Étant donnés un quadrilatère gauche et une droite qui divise deux de ses côtés opposés en parties proportionnelles, trouver une droite perpendiculaire à la première et qui divise proportionnellement les deux autres côtés du quadrilatère.

587. Dans un quadrilatère gauche, les trois droites qui joignent les milieux des côtés opposés et les milieux des diagonales se coupent mutuellement en parties égales.

588. Quand un plan transversal coupent les côtés consécutifs d'un polygone gauche ABCD..., en des points a, b, c,..., on a, en grandeur et en signe, la relation

$$\frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{cC}{cD}\cdots = +1.$$

589. Si une droite ac glisse sur deux côtés opposés AB et CD d'un quadrilatère gauche, de telle sorte qu'on ait

$$\frac{aA}{aB} = \lambda\frac{cD}{cC},$$

λ étant une constante, cette droite rencontre toujours trois droites fixes.

590. Si l'on fait tourner deux plans rectangulaires autour de deux droites fixes dans l'espace, leur intersection rencontre toujours trois droites fixes. — Dans le cas où les deux droites fixes se coupent, quel est le lieu des points où l'intersection des deux plans rectangulaires rencontre un plan perpendiculaire à l'une de ces droites fixes?

591. Quand on a mis en perspective une figure plane sur un tableau plan, si l'on fait tourner le tableau autour de son intersection LT avec le plan de la figure donnée, les deux figures restent toujours en perspective, et le lieu de l'œil, qui change de position dans l'espace, décrit un cercle situé dans un plan perpendiculaire à LT.

592. Si A, B, C et A′, B′, C′, sont les points où deux droites L et L′ rencontrent les plans des faces d'un trièdre trirectangle et si les angles sous lesquels on voit du sommet du trièdre les segments AB, BC, CA, sont respectivement égaux aux angles sous lesquels on voit les segments A′B′, B′C′, C′A′, les deux droites L et L′ sont dans un même plan passant par le sommet du trièdre.

LIVRE VI.

LES POLYÈDRES.

§§ I, II. — Du prisme.

393. 1° Le volume d'un prisme triangulaire a pour mesure la moitié du produit de l'aire d'une face latérale par la distance de cette face à l'arête opposée.

2° Si, sur trois droites parallèles et non situées dans un même plan, on prend d'une manière quelconque des longueurs égales à une droite donnée, le volume et la surface latérale du prisme triangulaire ainsi formé sont constants.

394. Couper un cube par un plan de manière que la section soit un hexagone régulier.

395. Deux prismes sont égaux : 1° lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre une base et une face égales chacune à chacune et semblablement disposées; 2° lorsqu'ils ont une base et deux faces adjacentes égales chacune à chacune et semblablement disposées.

396. Deux prismes triangulaires sont égaux lorsqu'ils ont leurs faces latérales égales chacune à chacune et semblablement disposées.

397. Vérifier par la Géométrie la formule qui donne le cube d'une somme ou d'une différence de deux parties.

398. On donne trois droites deux à deux non situées dans un même plan, et l'on demande de construire un parallélipipède dont trois arêtes soient sur ces trois droites.

399. Dans tout prisme quadrangulaire, la somme des carrés des arêtes surpasse la somme des carrés des diagonales de huit fois le carré de la droite qui joint les milieux communs de ces diagonales considérées deux à deux. — Application au parallélipipède quelconque.

600. Dans un hexaèdre quelconque, la somme des carrés des arêtes surpasse la somme des carrés des diagonales de quatre fois la somme des carrés des quatre droites qui joignent les milieux des diagonales du polyèdre et les milieux des diagonales de deux faces opposées. — Application au parallélipipède.

601. Mener par une droite donnée un plan qui partage un parallélipipède en deux parties équivalentes.

602. Dans tout prisme triangulaire, l'aire de la plus grande face est plus petite que la somme des deux autres.

603. De tous les prismes de n faces, c'est le prisme régulier qui a :

1° La plus petite aire latérale, les bases étant équivalentes et les hauteurs égales ;

2° La plus grande base et le plus grand volume, les aires latérales étant équivalentes et les hauteurs égales ;

3° La plus grande hauteur et le plus grand volume, les bases et les aires latérales étant respectivement équivalentes ;

4° La plus petite base et la plus grande hauteur, les aires latérales et les volumes étant respectivement équivalents.

604. De deux prismes réguliers, celui dont le nombre de faces est le plus grand possède les quatre propriétés énoncées dans le numéro précédent.

605. De tous les prismes quadrangulaires, c'est le cube qui, à égalité d'aire, possède le plus grand volume et qui, à égalité de volume, possède la plus petite aire.

§§ III, IV. — De la pyramide.

606. Démontrer que deux tétraèdres sont égaux : 1° lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées ; 2° lorsqu'ils ont une face égale adjacente à trois angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés ; 3° lorsqu'ils ont trois faces égales chacune à chacune et semblablement disposées ; 4° lorsqu'ils ont une arête égale et cinq angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.

607. Les plans menés perpendiculairement sur les milieux des arêtes d'un tétraèdre se rencontrent en un même point.

608. Les plans bissecteurs des angles dièdres d'un tétraèdre se rencontrent en un même point.

609. Les perpendiculaires élevées sur chaque face d'un tétraèdre par le centre du cercle circonscrit à la face considérée se rencontrent en un même point.

610. Les droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre aux points d'intersection des médianes des faces opposées se rencontrent en un même point, situé au quart de chacune de ces droites à partir de la face correspondante. (*Voir* le n° 718.)

611. Les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre se coupent mutuellement en parties égales.

612. Trouver dans l'intérieur d'un tétraèdre un point tel, qu'en le joignant aux quatre sommets on décompose ce tétraèdre en quatre tétraèdres équivalents.

613. Si l'on prend un point O dans l'intérieur d'un tétraèdre SABC, et si l'on prolonge les droites SO, AO, BO, CO, jusqu'à la rencontre des faces opposées en s, a, b, c, on a la relation

$$\frac{Os}{Ss} + \frac{Oa}{Aa} + \frac{Ob}{Bb} + \frac{Oc}{Cc} = 1.$$

614. Si l'on coupe un prisme ou une pyramide par un plan non parallèle à la base, et si l'on prolonge les côtés de la section jusqu'à la rencontre des côtés correspondants de la base, les points d'intersection obtenus sont en ligne droite.

615. Étant données les faces d'un tétraèdre, trouver, en ne se servant que du compas, la longueur de la hauteur du tétraèdre et le pied de cette hauteur sur le plan de la base.

616. Deux tétraèdres qui ont un angle trièdre égal sont entre eux comme les produits respectifs des arêtes qui comprennent cet angle. — En déduire la première partie du théorème du n° 684.

617. Deux tétraèdres qui ont une arête égale et les angles dièdres correspondant à cette arête égaux chacun à chacun sont entre eux comme les produits des faces qui comprennent le dièdre égal.

618. Le plan bissecteur de l'angle dièdre d'un tétraèdre partage l'arête opposée en deux segments proportionnels aux faces qui comprennent l'angle dièdre. — Considérer le plan bissecteur de l'angle dièdre extérieur.

619. Soient le tétraèdre SABC et le point O où la droite SO également inclinée sur les trois faces latérales (*voir* la question 572) rencontre la base ABC : démontrer que les triangles OAB, OBC, OAC, sont proportionnels aux faces latérales correspondantes.

620. Le plan déterminé par une arête d'un tétraèdre et le milieu de l'arête opposée partage ce tétraèdre en deux tétraèdres équivalents.

621. Si par la droite DE, qui joint les milieux de deux arêtes opposées SA, BC, d'un tétraèdre SABC, on mène un plan quelconque qui coupe l'arête SB en F et l'arête AC en G, la droite FG est divisée par la droite DE en deux parties égales.

622. Tout plan conduit par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre le partage en deux volumes équivalents.

623. On donne une droite sur l'une des faces d'un tétraèdre, et l'on demande de mener par cette droite un plan qui détermine avec les faces de ce tétraèdre un autre tétraèdre qui soit au premier dans un rapport donné.

624. On donne une droite sur l'une des faces d'un angle trièdre, et l'on demande de mener par cette droite un plan qui ferme l'angle trièdre en déterminant un tétraèdre de volume déterminé.

625. Quelle est la différence des volumes d'un tronc de pyramide à bases parallèles et d'un prisme de même hauteur ayant pour base la demi-somme des bases du tronc de pyramide ? — Quelle erreur commet-on en remplaçant l'un des volumes par l'autre, pour une hauteur de 6 mètres et pour des bases du tronc de pyramide égales à $3^{mq},75$ et à $2^{mq},85$?

626. Mener, parallèlement à une droite donnée ou par un point donné, un plan qui partage un tétraèdre donné en deux parties équivalentes.

627. Trouver l'expression du volume d'un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles, en le décomposant en troncs de pyramide triangulaires.

628. Les arêtes latérales d'une pyramide triangulaire SABC ont pour longueurs L, M, N ; on coupe cette pyramide par un plan *abc* non parallèle à la base, qui rencontre les arêtes latérales à des distances du sommet égales à l, m, n : trouver le volume du tronc de pyramide ainsi déterminé.

629. On donne deux tétraèdres SABC, S'A'B'C', tels, que les droites qui unissent les sommets correspondants concourent en un même point; démontrer que, si les faces correspondantes des deux tétraèdres se coupent, les quatre droites d'intersection sont dans un même plan.

630. Soit un tétraèdre SABC ; par un point O pris dans la face SBC, on mène aux arêtes SA, AB, AC, jusqu'aux faces ABC, SAC, SAB, les parallèles OD, OE, OF : démontrer la relation

$$\frac{OD}{SA} + \frac{OE}{AB} + \frac{OF}{AC} = 1.$$

631. Soit un tétraèdre SABC coupé par un plan quelconque DEF ; menons les diagonales des quadrilatères ABDE, BCFE, ACFD ; ces diagonales se rencontrent deux à deux aux points G, H, K, et les droites SG, SH, SK, coupent elles-mêmes les côtés de la base ABC aux points L, M, N. Démontrer : 1° que les transversales AM, BN, CL, se coupent en un même point O de la base ABC ; 2° que les transversales SO, AH, BK, CG, se coupent en un même point P de l'espace.— Examiner le cas où la section DEF est parallèle à la base ABC.

632. Dans un tronc de pyramide triangulaire à bases non parallèles, les points d'intersection des diagonales des trois faces latérales et les points d'intersection des côtés des bases prolongés deux à deux sont dans un même plan.

633. La hauteur d'un tétraèdre régulier est égale à la somme des perpendiculaires abaissées d'un point pris dans l'intérieur du polyèdre sur ses quatre faces. — Examiner le cas où le point est choisi extérieurement.

634. Si, par un point quelconque pris dans l'espace, on fait passer plusieurs droites parallèles et égales aux différents côtés d'un polygone ou plusieurs polygones parallèles et égaux aux différentes faces d'un polyèdre quelconque, la somme *algébrique* des produits obtenus en multipliant la longueur ou l'aire de chacun des éléments ainsi transportés par la perpendiculaire abaissée sur lui d'un autre point constant de l'espace est égale à zéro. — Les produits considérés sont *positifs* ou *négatifs*, suivant que les faces transportées laissent ou non d'un même côté le centre commun des perpendiculaires.

635. Soit le tétraèdre SABC; menons une section quelconque DEF parallèle à la base ABC, et joignons les milieux des côtés de cette section aux sommets opposés de la base : les trois droites obtenues se croisent en un même point dont on demande le lieu.

636. Par un point quelconque pris dans l'intérieur de la base d'une pyramide régulière, on mène à cette base une perpendiculaire qui rencontre toutes les faces de la pyramide ou leurs prolongements : démontrer que la somme des distances des points de rencontre obtenus à la base de la pyramide est constante. — Considérer le cas où le pied de la perpendiculaire élevée à la base est extérieur à cette base.

637. Étant données les quatre hauteurs d'un tétraèdre et les distances d'un point à trois des faces, déterminer la distance de ce point à la quatrième face.

638. La somme des distances des sommets d'un tétraèdre à un plan est égale à quatre fois la distance du centre de gravité du tétraèdre à ce plan.

639. Quand, dans un tétraèdre, sur les trois couples d'arêtes opposées, deux sont formés d'arêtes perpendiculaires, la même condition est remplie par le troisième couple. — Conclure de là qu'il existe une infinité de tétraèdres à arêtes opposées orthogonales.

640. Dans tout tétraèdre à arêtes opposées orthogonales :

1° Les quatre hauteurs et les plus courtes distances des arêtes opposées se coupent en un même point.

2° Les milieux des arêtes et les pieds des plus courtes distances des arêtes opposées sont équidistants du point de concours des droites qui joignent les sommets au centre de gravité des faces opposées.

641. Dans tout tétraèdre à arêtes opposées orthogonales :

1° Les produits des arêtes opposées sont en raison inverse des plus courtes distances de ces arêtes;

2° Les sommes des carrés des arêtes opposées sont égales entre elles, et la somme des carrés des produits des arêtes opposées est égale à quatre fois la somme des carrés des quatre faces;

3° La somme des six dièdres et des douze angles formés par chaque arête avec les deux faces auxquelles cette arête aboutit est égale à douze angles droits.

642. Étant donné un tétraèdre SABC, on construit sur les faces SAB, SBC, SAC, trois prismes triangulaires quelconques dont les bases supérieures se rencontrent en O; sur la base ABC du tétraèdre, on construit alors un quatrième prisme triangulaire en prenant ses arêtes latérales égales et parallèles à la droite SO : démontrer que le volume de ce dernier prisme est équivalent à la somme des volumes des trois premiers prismes.

643. Mener un plan parallèle à la base d'un tétraèdre donné, de manière que ce plan détermine un autre tétraèdre dont l'aire totale soit la moitié de celle du tétraèdre donné.

644. Construire un tétraèdre, connaissant :

1° Les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées et les angles que font entre elles ces trois droites;

2° Un point de chaque arête;

3° La base et les longueurs des trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées;

4° La base et les droites qui joignent les sommets de la base aux points d'intersection des médianes des faces opposées.

645. Trouver le volume d'une pyramide triangulaire, en regardant cette pyramide comme la limite de la somme des prismes inscrits dans cette pyramide, l'inscription étant effectuée comme au n° 642.

646. Soit une pyramide triangulaire SABC. Par le milieu E de l'arête SB, on mène le plan DEF parallèle à la base ABC, le plan EGH parallèle à la face ASC, et le plan EDH; la pyramide SABC se trouve ainsi décomposée en deux prismes triangulaires équivalents et en deux pyramides triangulaires équivalentes. On peut faire subir la même décomposition à la pyramide SDEF, et continuer ainsi indéfiniment : en déduire le volume de la pyramide SABC.

647. Étant donnée une pyramide triangulaire SABC, à quelle distance de la base ABC doit-on mener un plan parallèle *abc*, pour que le rapport des volumes de la pyramide S*abc* et du tronc de pyramide ABC*abc* soit égal à *m*?

648. Étant données trois droites parallèles non situées dans un même plan, on porte sur l'une d'elles une longueur AB donnée, et l'on prend arbitrairement un point C sur la seconde droite, un point D sur la troisième; démontrer :

1° Que le volume de la pyramide triangulaire ABCD est constant, quelles que soient les positions des points C et D et la parallèle sur laquelle on porte la longueur AB; 2° que ce volume est proportionnel à AB.

649. On donne l'arête A d'un prisme triangulaire quelconque; sur l'une des arêtes, on prend à partir de la base une longueur x; sur la seconde arête, on prend de même une longueur a, et sur la troisième une longueur b. Par les trois points ainsi déterminés, on fait passer un plan qui divise le prisme en deux parties. Pour quelle valeur de x ces parties sont-elles équivalentes?

650. Trouver le volume du corps limité par quatre plans parallèles deux à deux, une face parallélogramme et un quadrilatère gauche ayant pour plan directeur cette face parallélogramme.

651. Étant donnés quatre polygones plans disposés d'une manière quelconque dans l'espace, trouver un point tel, qu'en le donnant pour sommet commun aux pyramides ayant pour bases ces polygones, les volumes de ces pyramides soient entre eux comme quatre droites ou quatre nombres donnés.

652. Couper un tétraèdre par un plan parallèle à deux arêtes opposées, de manière que la section soit maximum.

653. Par la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre, on peut faire passer une infinité de plans : quel est celui qui détermine la section minimum?

654. Dans une pyramide SABCD dont la base ABCD est un trapèze, on donne la face SAD en grandeur et en position, son inclinaison sur la base ABCD, la direction des arêtes parallèles AB et CD, les angles de la base SBC, et l'on demande de construire la pyramide. — Même problème, en supposant qu'on donne la face SAD en grandeur et en position, son inclinaison sur le plan donné de la face SBC et les angles de cette dernière face.

655. Étant donné un prisme triangulaire, le couper par un plan tel, que la section soit semblable à un triangle donné.

656. Partager une pyramide quadrangulaire régulière en deux parties équivalentes, par un plan mené par l'un des côtés de la base.

657. Construire le parallélipipède circonscrit à une pyramide triangulaire.

658. Le volume d'un tétraèdre est le tiers du volume du parallélipipède circonscrit.

659. Trouver le volume du tétraèdre régulier par la considération du parallélipipède circonscrit.

660. Tout tétraèdre n'a qu'un seul parallélipipède circonscrit; mais tout parallélipipède correspond à deux tétraèdres inscrits, qu'on peut appeler conjugués et qui sont équivalents; l'un de ces tétraèdres étant donné, construire le second.

661. Calculer le volume du noyau octaèdre commun aux deux tétraèdres conjugués d'un même parallélipipède.

662. Si l'on prolonge indéfiniment les arêtes de l'un des tétraèdres conjugués d'un parallélipipède, et si l'on considère quatre de ces arêtes opposées deux à deux, il existe toujours un plan, susceptible de deux inclinaisons différentes, qui, en se mouvant parallèlement à lui-même, coupe ces arêtes en quatre points situés sur une même circonférence. Dans quelle position du plan sécant le diamètre variable de cette circonférence est-il minimum?

663. Si l'on prolonge indéfiniment les arêtes des deux tétraèdres conjugués d'un parallélipipède, et si l'on considère huit de ces arêtes situées dans quatre faces du parallélipipède et parallèles entre elles deux à deux, il existe toujours un plan, susceptible de deux inclinaisons différentes, qui, en se mouvant parallèlement à lui-même, coupe ces arêtes en huit points situés sur une circonférence.

664. Par un point S pris sur le prolongement de l'axe d'un prisme hexagonal régulier et par les côtés du triangle équilatéral obtenu en joignant de deux en deux les sommets de sa base supérieure, on fait passer des plans qui détachent du prisme trois tétraèdres et les remplacent par un tétraèdre unique reposant sur sa base supérieure : déterminer la position du point S qui rend minimum l'aire du décaèdre ainsi construit (alvéole des abeilles).

665. Sur une première droite AA', on donne deux points fixes a et b; sur une seconde droite quelconque BB', deux points mobiles c et d restent à une distance constante : chercher pour quelle position du segment cd l'aire de la pyramide $abcd$ est minimum.

§§ V, VI. — Figures symétriques. — Polyèdres semblables.

666. Déterminer les arêtes d'un parallélipipède rectangle, sachant qu'elles sont proportionnelles aux nombres a, b, c, et que le volume du parallélipipède est V.

667. Chercher le rapport des volumes de deux tétraèdres, dont l'un a été formé en menant par les sommets de l'autre des plans parallèles aux faces opposées.

668. Deux tétraèdres sont semblables : 1° lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées; 2° lorsqu'ils ont une face semblable adjacente à trois angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés; 3° lorsqu'ils ont trois faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées; 4° lorsqu'ils ont cinq angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.

669. Les carrés des volumes de deux polyèdres semblables sont proportionnels aux cubes de deux faces homologues.

670. Une droite comprise entre deux faces d'un polyèdre donné est divisée en plusieurs segments; sur chaque segment, considéré comme l'homologue de la droite donnée, on construit un polyèdre semblable au polyèdre donné : démontrer que l'aire de ce polyèdre est égale au carré de la somme des racines carrées des aires des polyèdres segmentaires, et que son volume est égal au cube de la somme des racines cubiques des volumes de ces mêmes polyèdres.

671. Construire deux droites qui soient dans le même rapport que deux cubes donnés.

672. Démontrer que le tétraèdre formé en joignant les points de rencontre des médianes des faces d'un tétraèdre donné est semblable au symétrique de ce tétraèdre; chercher le rapport des volumes de ces deux tétraèdres.

673. On nomme *centre de symétrie* d'un système de points un point O tel, qu'en le joignant à un point quelconque A du système et en prolongeant la droite AO d'une quantité égale à elle-même, le point A′ ainsi obtenu soit aussi un point du système proposé. — Démontrer d'après cela que, dans tout système de points limité, il ne peut exister qu'un centre de symétrie.

674. On nomme *axe de symétrie* d'un système de points une droite telle, qu'en faisant tourner le système d'un certain angle autour de cette droite, la nouvelle position de chaque point du système soit l'ancienne

position d'un certain point du même système. — Démontrer que le plus petit des angles capables de restituer ainsi le lieu des points du système, dans la rotation de ce système autour d'un axe de symétrie, est une partie aliquote $\frac{1}{q}$ de 360 degrés. Suivant que q est égal à 2, 3, 4, ..., l'axe de symétrie est *binaire, ternaire, quaternaire, ...; q* est *l'ordre de symétrie.*

675. On nomme *plan de symétrie* d'un système de points un plan tel, qu'en abaissant d'un point quelconque du système une perpendiculaire sur ce plan et en prolongeant cette perpendiculaire d'une quantité égale à elle-même, l'extrémité ainsi obtenue soit encore un point du système. — Démontrer que, si un système possède divers axes et divers plans de symétrie, tous ces axes et tous ces plans doivent se couper en un même point.

676. Dans tout système possédant un plan et un centre de symétrie, la droite menée par le centre normalement au plan est un axe de symétrie d'ordre pair.

677. Lorsqu'un système possède deux plans de symétrie, l'intersection de ces plans est un axe de symétrie.

678. Un système dépourvu d'axe de symétrie ne peut posséder à la fois un centre et un plan de symétrie.

679. Lorsqu'un système possède deux plans de symétrie non rectangulaires, il en possède un troisième.

680. Lorsqu'un système possède un plan P de symétrie et un axe L de symétrie oblique à ce plan, la droite L' homologue de L par rapport au plan P est un nouvel axe de symétrie.

681. Lorsqu'il existe dans un système deux axes de symétrie binaires, la perpendiculaire menée au plan de ces axes par leur point d'intersection est un axe de symétrie.

682. Lorsqu'un système possède trois axes quaternaires rectangulaires entre eux, il possède en même temps quatre axes ternaires.

APPENDICE DU SIXIÈME LIVRE.

683. Étudier les polyèdres considérés dans le VIe Livre, sous le rapport de leurs centres, de leurs axes et de leurs plans de symétrie.

684. Soit un polyèdre divisé en P autres polyèdres quelconques; soient S le nombre des sommets de ces différents polyèdres y compris le premier,

F le nombre de leurs faces, A le nombre de leurs arêtes; on aura la formule

$$A + P + 1 = F + S.$$

685. En se reportant à l'exercice précédent, quelle est la relation entre les nombres d'arêtes, de faces et de sommets appartenant à la surface extérieure du polyèdre proposé, et les nombres d'éléments analogues situés à l'intérieur de ce polyèdre?

686. Étant données autant de droites qu'on voudra passant par un même point O, trouver le lieu des points tels, qu'en abaissant de ces points des perpendiculaires sur les droites données, la somme des produits des distances du point O à ces perpendiculaires par des droites données soit égale à un carré donné m^2.

687. Étant donnés autant de plans qu'on voudra passant par un même point, trouver le lieu des points tels, que la somme des produits de leurs distances aux plans donnés par des droites données soit constante.

688. La somme des carrés des cosinus des angles qu'une droite ou un plan forme avec trois axes ou trois plans perpendiculaires entre eux est égale à l'unité.

689. Le carré d'une droite ou d'une aire plane quelconque est égal à la somme des carrés de ses projections sur trois axes ou sur trois plans perpendiculaires entre eux.

690. Si A et A′ sont les aires de deux figures situées dans un même plan, P et P′, Q et Q′, R et R′, les projections de ces deux figures sur trois plans perpendiculaires entre eux, on a

$$AA' = PP' + QQ' + RR'.$$

691. Étant donnés les angles que deux droites ou deux plans forment respectivement avec trois axes ou trois plans rectangulaires, trouver l'angle de ces deux droites ou de ces deux plans.

692. Étant données les projections d'une droite ou d'une aire plane sur trois axes ou sur trois plans rectangulaires, trouver sa projection sur un quatrième axe ou un quatrième plan qui fait des angles connus avec les trois premiers.

693. La somme des carrés des projections d'autant de droites ou d'autant d'aires planes qu'on voudra sur trois axes ou sur trois plans rectangulaires quelconques est constante.

694. Trouver l'axe ou le plan sur lequel la somme des projections de droites ou d'aires planes données est un maximum. — Cette même somme est constante lorsqu'on projette sur des axes ou des plans faisant le même angle avec l'axe ou le plan sur lequel la projection est un maximum.

695. Dans un polygone quelconque, la somme des projections de tous les côtés sur un axe quelconque est égale à zéro. — Dans tout polygone convexe, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés de tous les autres, moins deux fois la somme des produits obtenus en multipliant ces mêmes côtés deux à deux et par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.

696. Dans un polyèdre convexe quelconque : 1° la somme des projections de toutes les faces sur un plan quelconque est égale à zéro; 2° le carré de l'une des faces est égal à la somme des carrés de toutes les autres, moins deux fois la somme des produits obtenus en multipliant ces mêmes faces deux à deux et par le cosinus du dièdre qu'elles comprennent.

697. Lorsque le volume d'un tronc de prisme et l'une des bases A restent fixes, le plan de l'autre base B passe par un point fixe, et l'aire de cette base B est minimum lorsque son plan est perpendiculaire aux arêtes du tronc.

698. De toutes les pyramides de n faces latérales, qui ont même hauteur et des bases équivalentes, c'est la pyramide régulière qui a la plus petite aire latérale. — De toutes les pyramides dont la base a n côtés et dont les aires latérales sont équivalentes, c'est la pyramide régulière qui a le plus grand volume.

699. De tous les tétraèdres dont les aires sont équivalentes, le tétraèdre régulier a le plus grand volume.

700. La base d'un tétraèdre est semblable à un triangle donné; la somme de cette base et d'une face latérale est constante; enfin les deux autres faces sont perpendiculaires à la base : de tous les tétraèdres qui remplissent ces conditions, celui dont la base équivaut au quart de la somme donnée a le plus grand volume.

701. La base β d'une pyramide a n côtés et est semblable à un polygone donné; la somme $\beta + \alpha$ de cette base et d'une face latérale α est constante : le volume de la pyramide est maximum lorsque, α étant égal à 2β, la face latérale α est perpendiculaire à la base β.

702. Trouver : 1° le centre de gravité d'un arc de cercle; 2° le centre de gravité d'un secteur circulaire (on nomme *centre de gravité d'une ligne courbe* ou *d'une aire terminée par une ligne courbe* la limite des positions du centre de gravité du contour ou de l'aire d'une ligne polygonale inscrite ou d'un secteur polygonal inscrit).

703. Trouver le centre de gravité d'un tronc de pyramide à bases parallèles.

704. La somme de trois faces latérales d'un tétraèdre étant donnée, son

volume est maximum lorsque ces faces latérales sont des triangles rectangles isocèles, perpendiculaires entre eux.

705. Parmi toutes les pyramides limitées latéralement par les faces d'un angle polyèdre S et dont la base est déterminée par un plan qui passe par un point fixe P situé dans l'intérieur de l'angle S, celle dont le volume est maximum a le point P pour centre de gravité de sa base.

706. 1° Parmi toutes les pyramides équivalentes limitées latéralement par les faces d'un même angle polyèdre, celle dont la hauteur passe par le centre de gravité de la base a la base minimum;

2° De toutes les pyramides limitées latéralement par le même angle polyèdre et qui ont des bases équivalentes, la pyramide de volume maximum est celle dont le sommet se projette orthogonalement au centre de gravité de la base;

3° Enfin, de toutes les pyramides de même hauteur, limitées latéralement par le même angle polyèdre, la pyramide de volume minimum est celle dont la hauteur passe par le centre de gravité de la base.

707. Dans deux figures homologiques, le rapport des distances de deux points homologues quelconques m et m' au centre d'homologie est au rapport des distances de ces deux points m et m' à deux droites homologues D et D' quelconques dans une raison constante. — Que devient ce théorème : 1° lorsque l'une des droites D et D' est l'axe d'homologie? 2° lorsque la droite D est à l'infini? 3° lorsque, la droite D étant à l'infini, la droite D' se confond avec la droite de la première figure qui correspond aux points de la seconde situés à l'infini?

708. Étant données deux droites parallèles dans le plan d'une figure, si d'un point fixe on mène un rayon à chaque point m de cette figure, et que sur ce rayon on prenne un point m' tel, que le produit des distances des points m et m' aux deux parallèles soit constant, le point m' décrit une figure homologique à la proposée.

709. Quand deux figures sont homologiques, si l'on fait tourner l'une d'elles autour de l'axe d'homologie, de manière à faire coïncider de nouveau son plan avec celui de l'autre figure, les deux figures, dans leur nouvelle position relative, sont encore homologiques, mais leur centre d'homologie est différent.

710. Quand deux figures sont homologiques, si l'on fait tourner l'une d'elles dans son plan autour du centre d'homologie, après une rotation de 180 degrés, les deux figures sont encore homologiques, mais avec un axe d'homologie différent.

LIVRE VII.

LES CORPS RONDS.

§§ I, II. — Cylindre et cône de révolution.

711. 1° Quel est le rapport des volumes de deux cylindres dont les aires convexes sont équivalentes? 2° quel est le rapport des aires convexes de deux cylindres qui ont le même volume?

712. Les volumes engendrés par un rectangle tournant successivement autour de ses côtés adjacents sont de a mètres cubes et de b mètres cubes : trouver la longueur de la diagonale de ce rectangle.

713. Calculer l'aire convexe, l'aire totale et le volume d'un cône équilatéral en fonction de son côté. — Pour quelle valeur de ce côté l'aire totale du cône est-elle 1 mètre carré ou son volume 1 mètre cube?

714. Partager l'aire latérale d'un cône de révolution en n parties équivalentes par des plans parallèles à sa base.

715. La hauteur d'un tronc de cône de révolution étant 3 mètres et ses bases ayant pour rayons 2 mètres et 1 mètre, partager son volume en trois parties proportionnelles aux nombres 2, 3 et 7, par deux plans parallèles aux bases.

716. Le volume d'un tronc de cône de révolution étant $41^{mc},328$, sa hauteur $1^{m},817$, le rayon d'une de ses bases $2^{m},698$, on demande de calculer à $0^{m},001$ près le rayon de sa seconde base.

717. Calculer à 0,001 près le rapport que doivent présenter les rayons des bases d'un tronc de cône de révolution pour que son volume soit la moitié de celui du cylindre de même hauteur élevé sur la base inférieure du tronc.

718. Quel est le rapport des volumes engendrés par un parallélogramme tournant successivement autour de ses deux côtés adjacents?

719. Soit ABCDEF un hexagone régulier circonscrit à un cercle de centre O et de rayon R. On mène la diagonale FC et les droites AC et BF qui se coupent en I sur le rayon OH perpendiculaire à FC, et l'on demande

de calculer, en fonction de R, les volumes et les aires des cônes engendrés par les triangles IHA, IOF, en tournant autour de OH pris pour axe.

720. Soit B'C' la projection du diamètre BC d'un cercle OA sur la tangente TT' au point A : chercher pour quelle position de BC le rapport du cercle OA à l'aire totale du tronc de cône engendré par la rotation du trapèze BCB'C' autour de TT' est égal à m; discussion.

721. Calculer les rayons des bases d'un tronc de cône de révolution, connaissant sa hauteur, son côté et son aire ou son volume.

722. Un tronc de cône de révolution d'une substance dont le poids spécifique est d est plongé verticalement dans un liquide dont le poids spécifique est d'; les rayons de ses bases sont R et r, sa hauteur est h. On demande de calculer la hauteur de la partie immergée et le rayon de la section déterminée dans le tronc de cône par la surface de niveau du liquide.

723. Quel est le volume maximum d'un cône de révolution dont le côté est donné?

724. Parmi tous les cylindres ou tous les cônes qui ont même aire totale, quel est le cylindre ou le cône de volume maximum? — Parmi tous les cylindres ou tous les cônes équivalents, quel est le cylindre ou le cône d'aire totale minimum?

725. Inscrire dans un cône donné un cylindre de volume donné; discussion. — Circonscrire à un cylindre donné un cône de volume donné: discussion.

§§ III, IV, V, VI. — Premières notions sur la sphère. — Propriétés des triangles sphériques. — Aire et volume de la sphère.

726. Trouver le lieu des points qui sont à la distance a d'un point A et à la distance b d'un point B.

727. Par une droite donnée, mener un plan tangent à une sphère donnée.

728. Par une droite donnée, mener à une sphère donnée un plan sécant qui détermine une section de rayon donné.

729. Lorsque trois sphères se coupent deux à deux, les plans des trois cercles d'intersection se coupent suivant une même droite perpendiculaire au plan déterminé par les centres des trois sphères.

730. Trouver le lieu des centres des sections faites dans une sphère donnée par tous les plans sécants qui passent par une droite donnée ou par un point donné.

731. Connaissant les rayons de deux sections parallèles faites dans une sphère et la distance de ces sections, trouver le rayon de la sphère.

732. Trouver la plus courte et la plus grande distance d'un point donné à une surface sphérique. — Trouver le lieu des points qui sont à une distance donnée d'une sphère donnée.

733. Trouver la plus courte distance d'une droite donnée ou d'un plan donné à une surface sphérique.

734. Si d'un point de la surface sphérique comme pôle on trace un cercle avec un rayon sphérique égal au cinquième ou au tiers d'un quadrant, le rayon du cercle obtenu est la moitié du rayon de la sphère ou le plus grand segment de ce rayon divisé en moyenne et extrême raison.

735. La somme des carrés des cordes interceptées par une sphère donnée sur trois droites rectangulaires partant d'un point donné est constante, ainsi que la somme des carrés des six segments déterminés sur ces trois cordes par le point donné.

736. Trouver le diamètre de la sphère circonscrite à une pyramide triangulaire dont trois faces sont perpendiculaires entre elles.

737. Si, d'un point de l'espace, on mène des sécantes à une sphère donnée, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la sphère est constant.

738. Mener dans une sphère donnée trois cordes perpendiculaires entre elles, qui passent par un point donné et qui soient proportionnelles à des nombres donnés. — Mener dans une sphère donnée trois plans perpendiculaires entre eux, qui passent par un point donné et qui déterminent trois cercles dont les aires soient proportionnelles à des nombres donnés.

739. Si deux cercles de l'espace sont tels, que leurs centres soient les projections d'un même point et que les tangentes menées à ces cercles par un point de l'intersection de leurs plans soient égales, ces deux cercles sont situés sur une même sphère.

740. La somme des carrés des projections de trois rayons d'une sphère perpendiculaires entre eux sur un plan quelconque est égale au double du carré du rayon de la sphère.

741. Étant données deux sphères solides, trouver la distance de leurs centres par une construction plane.

742. Trouver le lieu des points de l'espace dont le rapport des distances à deux points fixes est constant. — Trouver le lieu des points de l'espace également éclairés par deux lumières données.

743. Trouver le lieu des points dont la somme des carrés des distances

à deux points donnés est constante. — Trois points étant donnés, trouver le lieu des points dont la somme des carrés des distances est à la fois constante par rapport au premier et au second point, par rapport au premier et au troisième.

744. Trouver le lieu des points d'où l'on voit une sphère donnée, deux sphères données ou trois sphères données, sous un angle donné.

745. Indiquer le lieu des points d'où l'on voit une droite donnée sous un angle donné, ou deux droites données issues d'un même point, sous des angles respectivement donnés.

746. Trouver le lieu des centres des sphères qui coupent deux sphères données ou trois sphères données suivant des grands cercles.

747. Quelle est la condition pour que quatre points de la surface sphérique appartiennent à un même plan?

748. Construire une sphère :

1° De rayon donné, qui passe par trois points donnés;

2° De rayon donné, passant par deux points donnés et tangente à un plan ou à une sphère donnée;

3° De rayon donné, passant par un point donné et tangente à deux plans ou à deux sphères données;

4° De rayon donné, tangente à trois plans ou à trois sphères données;

5° De rayon donné, passant par un point donné et tangente à un plan et à une sphère donnés;

6° De rayon donné, tangente à deux plans et à une sphère donnés;

7° De rayon donné, tangente à un plan et à deux sphères donnés.

749. Connaissant les latitudes et les longitudes de deux lieux de la surface terrestre supposée parfaitement sphérique, trouver, à l'aide d'opérations exécutées sur un globe, la distance de ces deux lieux en degrés.

750. Construire un triangle sphérique, connaissant :

1° Un angle, un côté adjacent et la somme ou la différence des deux autres côtés;

2° Un côté, un angle adjacent et la somme ou la différence des deux autres angles;

3° Deux côtés et la hauteur correspondant à l'un d'eux;

4° Un angle, un côté et la hauteur qui lui correspond;

5° Son aire, un angle et l'un des côtés adjacents.

751. Inscrire un cercle dans un triangle sphérique.

752. Transformer un polygone sphérique en un triangle sphérique équivalent.

753. Trouver une aire plane équivalente à celle d'un triangle sphérique donné.

754. Les côtés opposés d'un quadrilatère sphérique étant égaux : 1° les quatre angles du quadrilatère sont égaux, ses diagonales sont égales et se coupent mutuellement en parties égales, ses sommets sont dans un même plan et les cordes correspondantes forment un rectangle; 2° l'aire de ce quadrilatère a pour mesure quatre fois l'excès de son angle sur un droit.

755. Dans un losange sphérique, les diagonales se coupent à angle droit.

756. Un cône à base circulaire étant inscrit dans une sphère, toute section faite dans ce cône par un plan perpendiculaire au diamètre qui passe par son sommet, est un cercle.

757. L'enveloppe sur une même sphère des bases de tous les triangles sphériques qui ont un angle commun et même périmètre est un cercle de la sphère. — Même problème sur le plan.

758. Dans tout polyèdre convexe, le nombre d'angles dièdres droits contenus dans la somme des angles dièdres, moins la moitié du nombre d'angles trièdres trirectangles contenus dans la somme des angles polyèdres, est égal à deux fois le nombre des faces du polyèdre diminué de deux.

759. Dans tout polyèdre convexe, la somme des angles polyèdres supplémentaires de ceux du polyèdre proposé est égale à huit angles trièdres trirectangles.

760. Si de chaque sommet d'un parallélipipède comme centre on décrit des sphères égales, toutes ces sphères réunies interceptent une portion du volume du parallélipipède égale à l'une d'elles.

761. Si P est le pôle d'un arc de grand cercle DE passant par les milieux D et E des côtés AB et AC d'un triangle sphérique BAC, l'angle BPC est le double de l'angle DPE.

762. Si trois petits cercles sont inscrits dans un triangle sphérique dont chaque angle est égal à 120 degrés, de manière que chacun de ces cercles touche à la fois les deux autres et deux côtés du triangle, leur rayon sphérique est égal à 30 degrés et leurs centres sont les sommets du triangle polaire du triangle donné.

763. Calculer en myriamètres carrés l'aire de l'une des deux zones glaciales, sachant que le petit cercle qui lui sert de base est à 23°30′ du pôle.

764. Dans une sphère de rayon donné, mener un plan sécant AIB tel,

que le rapport de la calotte sphérique qu'il détermine à l'aire latérale du cône qui a pour base le cercle AIB et pour sommet le centre de la sphère, soit égal à m; discussion.

765. Inscrire dans une sphère un cône dont l'aire latérale soit équivalente à celle de la calotte sphérique terminée au même cercle.

766. Si l'on divise une demi-circonférence en trois parties égales et si on la fait tourner autour de son diamètre, la zone engendrée par l'arc du milieu est équivalente à la somme des zones engendrées par les deux arcs extrêmes.

767. Diviser une zone en moyenne et extrême raison par un plan parallèle à ses bases.

768. La calotte interceptée par une sphère fixe sur une sphère sécante de rayon variable et qui passe toujours par son centre a une aire constante. — La zone interceptée par deux sphères fixes concentriques sur une sphère sécante de rayon variable et qui passe toujours par leur centre commun a une aire constante.

769. Placer sur le cercle générateur d'une sphère l'arc générateur d'une zone dont on connaît l'arc et la hauteur.

770. Placer sur une sphère donnée une calotte sphérique dont l'aire soit double de celle engendrée par la corde de l'arc générateur de la calotte.

771. Couper une sphère par un plan tel, que l'aire de la section soit égale à la différence des deux zones que ce plan détermine.

772. Un cylindre inscrit dans une sphère de 1 mètre de rayon a pour aire latérale la moitié de l'aire d'un grand cercle de la sphère : calculer son volume.

773. L'aire totale d'une chaudière cylindrique terminée par deux hémisphères est de a^2 mètres carrés, toute section passant par l'axe a un périmètre de b mètres : calculer la hauteur et le rayon de la partie cylindrique de la chaudière; discussion.

774. Le poids de 1 décimètre cube de fonte étant $7^{kg},2$, calculer avec la plus grande approximation possible le diamètre d'un boulet en fonte du poids de 24^{kg}. — En déduire celui d'un boulet de 8^{kg}.

775. Ayant mené la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle, on le fait tourner autour de son troisième côté pris pour axe : quel est le rapport des volumes engendrés par les deux parties du triangle?

776. Dans une sphère de rayon donné, mener un plan sécant AIB tel, que le rapport du segment à une base qu'il détermine, au secteur sphé-

rique ayant pour base la même calotte sphérique, soit égal à m; discussion.

777. On prolonge l'un des côtés a d'un triangle équilatéral d'une longueur égale à a et, par l'extrémité obtenue, on élève une perpendiculaire à ce côté : calculer le volume engendré par le triangle équilatéral en tournant autour de cette perpendiculaire.

778. Inscrire dans une sphère donnée un cône de révolution tel, que les sections faites par un plan donné parallèle à sa base, dans le cône et dans la sphère, soient dans un rapport donné.

779. Étant donnée une série de cercles concentriques, on mène dans ces cercles des cordes toutes égales entre elles et parallèles à un diamètre commun : les volumes engendrés par les segments correspondants en tournant autour de ce diamètre sont équivalents.

780. Étant donné sur une sphère de rayon R un cercle de rayon r, mener un second cercle parallèle au premier tel, que le rapport du segment compris entre ces deux cercles au cône qui a pour base le second cercle et qui a pour sommet le centre du premier soit égal à m; discussion.

781. Les volumes d'un cône de révolution, d'une sphère et d'un cylindre de révolution, de même hauteur, sont proportionnels aux nombres 1, 2, 3, lorsque le cône et le cylindre ont pour bases un grand cercle de la sphère.

782. L'aire totale ou le volume du cylindre équilatéral inscrit ou circonscrit à une sphère est moyenne proportionnelle entre l'aire ou le volume de cette sphère et l'aire totale ou le volume du cône équilatéral inscrit ou circonscrit.

783. Calculer en fonction de leurs côtés les aires et les volumes engendrés par les polygones réguliers les plus simples, depuis le triangle jusqu'au dodécagone, lorsqu'ils tournent autour d'un de leurs côtés pris pour axe. — Même question, en prenant pour axe de rotation une perpendiculaire menée à l'extrémité d'un des diamètres du cercle circonscrit qui aboutit à un sommet du polygone considéré.

784. On prend un point B sur le prolongement du rayon OA d'un cercle donné, et l'on mène par ce point au cercle la tangente BT : chercher pour quelle position du point B les aires décrites par la droite BT et l'arc AT, lorsqu'on fait tourner la figure autour de l'axe OAB, sont dans un rapport donné; discussion.

785. Étant donné un triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle, trouver le rapport du volume ou de l'aire qu'il engendre, lorsque la

figure tourne autour du diamètre du demi-cercle, au volume ou à l'aire de la sphère engendrée par ce demi-cercle. — Cas où le triangle rectangle donné est isocèle.

786. Inscrire ou circonscrire à une sphère donnée un cône ou un cylindre dont l'aire totale ou le volume soit à l'aire ou au volume de la sphère dans un rapport donné; discussion.

787. La longueur de l'axe d'une chaudière cylindrique terminée par deux hémisphères étant donnée, calculer les dimensions de la partie cylindrique de manière que la capacité de la chaudière ait une valeur donnée; discussion.

788. Étant donné le volume d'un secteur sphérique appartenant à une sphère de rayon R, chercher le maximum de son aire totale.

789. On donne les volumes engendrés par un triangle en tournant successivement autour de chacun de ses côtés : calculer les trois côtés du triangle.

790. Construire un triangle, connaissant deux côtés et sachant que le volume engendré par ce triangle en tournant autour du troisième côté est égal à la somme des volumes qu'il engendre en tournant successivement autour des deux côtés donnés.

791. D'un point B extérieur à une circonférence O, on lui mène deux tangentes BA, BC, et l'on projette le point de contact C sur le rayon OA en D : démontrer que, si l'on fait tourner la figure autour de l'axe AOD, le volume engendré par le triangle mixtiligne ABC est équivalent au cône engendré par le triangle rectangle BAD, et le segment sphérique engendré par le triangle mixtiligne DAC équivalent au volume engendré par le triangle BCD.

792. On donne un cône de révolution et deux sphères inscrites dans ce cône et tangentes extérieurement l'une à l'autre; le volume compris entre le cône et les deux sphères proposées est la moitié du volume compris entre ce même cône et la sphère qui passe par ses deux cercles de contact avec les sphères données.

§ VII. — Généralités sur les surfaces.

793. Indiquer le lieu des points qui sont : 1° à la distance a d'une droite A et à la distance b d'une droite B; 2° à la distance a d'une droite A et à la distance p d'un plan P; 3° à la distance a d'une droite A et à la distance b d'un point B.

794. Étant donnés dans l'espace un point et une surface conique ou

cylindrique de révolution, trouver la plus courte distance du point à la surface.

795. Trouver le lieu des points dont les distances à un point donné et à une droite donnée passant par ce point sont dans un rapport donné.

796. Un point et deux droites passant par ce point étant donnés, trouver le lieu des points dont les distances respectives au point donné et aux droites données sont proportionnelles à trois longueurs données.

797. Mener un plan tangent à une surface cylindrique ou à une surface conique de révolution : 1° par un point donné de la surface ; 2° par un point extérieur donné ; 3° parallèlement à une droite donnée.

798. Étant donnés un nombre quelconque de plans et deux points A et B pris sur deux d'entre eux, trouver le plus court chemin qui conduit du point A au point B, sans sortir des plans proposés. — Application à la recherche du plus court chemin entre deux points sur une surface cylindrique ou conique.

799. Trouver le lieu des points tels, que les plans tangents menés de chacun d'eux à un cylindre ou à un cône donné se coupent sous un angle donné.

800. Deux cylindres de révolution dont les axes sont parallèles ou deux cônes ayant même sommet étant donnés, trouver le lieu des points tels, que les plans tangents menés de chacun d'eux à l'une des surfaces fassent le même angle que les plans tangents menés du même point à l'autre surface.

801. Construire un cône ou un cylindre de révolution, connaissant trois génératrices.

802. Construire un cône de révolution, connaissant : 1° l'axe, le sommet et le rapport des distances d'un point de la surface au sommet et à l'axe ; 2° l'axe, le sommet et un plan tangent à la surface ; 3° le sommet, un plan dans lequel se trouve l'axe et deux plans tangents à la surface ; 4° trois plans tangents à la surface.

803. La Lune et le Soleil étant supposés parfaitement sphériques et le volume du Soleil étant environ 63000000 de fois celui de la Lune, calculer le rapport des distances des centres de ces deux astres à la Terre, lorsqu'ils ont le même diamètre apparent, c'est-à-dire lorsqu'ils sont vus sous le même angle.

804. Les rayons de la Lune, de la Terre et du Soleil étant proportionnels aux nombres $\frac{3}{11}$, 1 et 108,5, trouver le rapport des distances du centre de la Terre aux centres des deux autres astres, lorsqu'on suppose

les centres de ces trois globes sur l'axe d'un cône de révolution qui leur est tangent; considérer le cas où les trois astres sont tangents à une même nappe, et celui où, la Terre étant située dans une nappe, les deux autres astres sont dans la nappe opposée.

APPENDICE DU SEPTIÈME LIVRE.

805. Partager la surface sphérique en parties égales par des polygones égaux et réguliers.

806. Le volume d'un cube est égal à six fois le volume de l'octaèdre régulier qui a ses sommets aux centres des faces du cube.

807. Les milieux des arêtes d'un tétraèdre régulier sont les sommets d'un octaèdre régulier.

808. Trouver l'aire et le volume d'un polyèdre régulier.

809. Connaissant le rayon d'une sphère, trouver l'aire et le volume des polyèdres réguliers inscrits.

810. Mener par un point donné un plan tangent à deux sphères données.

811. Mener un plan tangent à trois sphères données.

812. Si l'on donne une sphère et deux points quelconques dans l'espace, les distances de ces points au centre de la sphère sont proportionnelles aux distances respectives de chacun d'eux au plan polaire de l'autre.

813. Soient AA_1A_2 un triangle sphérique et O un point de la sphère correspondante. Si l'on élève sur l'arc de grand cercle OA un arc de grand cercle perpendiculaire qui vient rencontrer le côté opposé A_1A_2 en B, et si l'on détermine de la même manière B_1 sur AA_2 et B_2 sur AA_1, les trois points B, B_1, B_2, sont sur une même circonférence de grand cercle.

814. Construire une sphère :

1° Respectivement tangente à trois droites données en un point donné de chacune d'elles;

2° Passant par trois points donnés et tangente à un plan ou à une sphère donnée;

3° Passant par deux points donnés et tangente à deux plans ou à deux sphères données;

4° Passant par un point donné et tangente à trois plans ou à trois sphères données;

5° Tangente à trois plans donnés et à une sphère donnée;

6° Tangente à un plan donné et à trois sphères données;

7° Tangente à deux plans donnés et à deux sphères données.

815. Mener par une droite donnée un plan qui coupe deux sphères données suivant des cercles de rayons proportionnels à ceux des sphères.

816. Mener par un point donné un plan qui coupe trois sphères données suivant des cercles de rayons proportionnels à ceux des sphères.

817. De tous les triangles sphériques formés avec deux côtés donnés, le triangle d'aire maximum est celui dans lequel l'angle compris entre ces côtés est égal à la somme des deux autres angles.

818. De tous les triangles sphériques isopérimètres et de même base, le triangle isocèle est un maximum.

819. Deux triangles et un point étant donnés dans un plan, mener par le point une droite telle, que les volumes engendrés par les triangles tournant autour de cette droite soient dans un rapport donné. — Même problème pour deux cercles donnés.— Même problème pour trois triangles ou trois cercles donnés.

820. Étant donnés un cercle et un point intérieur, est-il possible de le projeter centralement suivant un cercle qui ait pour centre la projection du point donné?

821. Les trois arcs de grand cercle qui, passant par chaque sommet d'un triangle sphérique, le divisent en deux parties équivalentes, se coupent aux deux mêmes points.

822. On peut toujours transformer un groupe de trois sphères données en un groupe de trois autres sphères de rayons égaux: quel est le lieu des pôles de transformation?

823. Trouver le lieu des points dont les puissances par rapport à trois sphères données sont entre elles comme les rayons de ces sphères.

824. Peut-on, par la méthode des rayons vecteurs réciproques, ramener le problème de la sphère tangente à quatre sphères données au problème de la sphère tangente à une sphère et à trois plans? Quel point faut-il choisir pour pôle de transformation?

825. Étant données quatre sphères de rayons $r_1+\rho$, $r_2+\rho$, $r_3+\rho$, $r_4+\rho$, trouver le lieu que décrit leur centre radical quand on fait varier ρ.—Quel est le problème analogue de Géométrie plane?

826. Par deux points A et B donnés sur la surface de la sphère, on fait passer des cercles auxquels on mène ensuite des grands cercles tangents par un point C pris sur l'arc de grand cercle AB prolongé: quel est le lieu des points de contact?

827. Étant donnés un cercle et deux points de la sphère, mener par ces deux points un second cercle qui coupe le premier en deux points distants d'une longueur donnée.

828. Étant donnés sur une sphère deux grands cercles et un petit cercle A, mener aux deux grands cercles un cercle tangent B tel, que, si l'on mène ensuite aux deux cercles A et B deux tangentes communes sphériques, leur angle soit égal à un angle donné.

829. Étant donnés sur une sphère deux points et un grand cercle, trouver sur ce cercle un point tel, que la somme de ses distances sphériques aux deux points donnés soit égale à un arc donné.

830. Étant donnés sur une sphère un point et deux grands cercles, mener par le point un cercle qui coupe les deux autres sous des angles dont la somme soit donnée.

831. Construire un triangle sphérique, connaissant son aire, un angle et un point par lequel doit passer le côté opposé à cet angle.

832. Construire un triangle sphérique, connaissant un angle, le côté opposé et le cercle inscrit au triangle.

833. Étant donnés sur un cercle de la sphère deux points A et B, trouver sur ce cercle un troisième point C tel, que les deux grands cercles CA et CB se coupent sous un angle donné.

834. Les arcs qui, menés par les sommets d'un triangle sphérique, partagent respectivement son aire en deux parties équivalentes, se coupent au même point.

835. Décrire sur une sphère donnée un cercle qui soit tangent à deux cercles donnés et qui coupe en deux parties égales la circonférence d'un troisième cercle donné.

836. Décrire sur une sphère donnée un cercle qui coupe trois cercles donnés A, B, C, chacun en deux points diamétralement opposés.

837. Décrire sur une sphère donnée un cercle qui coupe deux cercles donnés sous des angles donnés et qui rencontre un troisième cercle donné en deux points diamétralement opposés.

838. Si plusieurs triangles sphériques ont un côté commun, les circonférences de grand cercle passant par les milieux des deux autres côtés de chacun de ces triangles concourent en un même point.

839. Par un point donné sur une sphère, mener un cercle qui coupe trois cercles donnés sous des angles égaux.

840. Décrire sur une sphère donnée un cercle qui coupe quatre cercles donnés sous des angles égaux.

841. Une sphère variable, mais assujettie à passer par deux points fixes,

touche une sphère fixe en une suite de points formant une circonférence de cercle.

842. Une sphère variable, mais assujettie à passer par trois points fixes, coupe une sphère fixe suivant une série de cercles dont les plans passent par une même droite.

843. Quels sont sur la sphère les théorèmes analogues à ceux de Pascal et de Brianchon (*voir* les n°s 328 et 329)?

LIVRE VIII.

LES COURBES USUELLES.

§§ I, II. — Propriétés fondamentales de l'ellipse et de l'hyperbole.

844. Quelle est la plus courte et la plus grande distance du centre de l'ellipse à un point de la courbe ?

845. Quel est le lieu du centre d'une ellipse qui glisse entre deux axes rectangulaires ?

846. Deux ellipses dont les grands axes sont égaux et qui ont un foyer commun ne peuvent se couper qu'en deux points.

847. Quel est le lieu des points également distants de deux circonférences intérieures ou extérieures l'une à l'autre ?

848. Quel est le lieu des centres des cercles tangents à deux cercles donnés ? — On examinera les différents cas possibles.

849. Sur les deux tangentes PM, PM', à une ellipse ou à une hyperbole dont les foyers sont F et F', on prend des longueurs PQ, PQ', respectivement égales à PF et à PF' : démontrer que la droite QQ' est égale au grand axe de l'ellipse ou à l'axe transverse de l'hyperbole.

850. Le grand axe de l'ellipse ou l'axe transverse de l'hyperbole et une tangente quelconque interceptent, sur les deux tangentes menées aux extrémités de l'axe de la courbe, des longueurs dont le produit est constant.

851. Des cercles touchent une droite AB en un point fixe C, et des points fixes A et B on mène des tangentes à ces cercles : trouver le lieu des points d'intersection de ces tangentes.— Le point C peut être entre A et B ou sur AB prolongée.

852. Soient les deux tangentes menées à l'ellipse ou à l'hyperbole par un point extérieur et une troisième tangente quelconque : démontrer que la longueur interceptée sur cette troisième tangente par les deux premières est vue de chaque foyer sous un angle constant.

853. Démontrer directement que, si l'on mène à une hyperbole deux

tangentes PM, PM', par un même point extérieur P, les angles PFM, PFM' sont égaux ou supplémentaires, suivant que les points de contact M et M' appartiennent ou non à la même moitié de la courbe.

854. Trouver le lieu des centres des ellipses dont le grand axe a la même longueur, qui ont un foyer commun et qui touchent une droite donnée.

855. Quels sont les lieux géométriques : 1° des sommets ; 2° des points de rencontre des côtés non parallèles; 3° des points d'intersection des diagonales, des trapèzes construits sur une base fixe, et dans lesquels la longueur de l'autre base est donnée, ainsi que la somme ou la différence des côtés non parallèles ?

856. Construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant : 1° ses foyers et un point; 2° ses foyers et une tangente; 3° un foyer, deux points et une tangente; 4° un foyer, un sommet et une tangente; 5° un foyer, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles; 6° un foyer et trois tangentes; 7° le centre, deux tangentes et la longueur du grand axe ou de l'axe transverse.

857. On donne les positions d'un foyer et d'un point d'une ellipse, ainsi que les longueurs des axes : déterminer son centre.

858. Le cercle qui a pour diamètre la portion d'une tangente quelconque à l'hyperbole interceptée par les tangentes menées aux extrémités de l'axe transverse passe par les foyers de la courbe.

§ III. — Propriétés fondamentales de la parabole.

859. La perpendiculaire abaissée du foyer de la parabole sur une tangente à la courbe est moyenne proportionnelle entre le rayon vecteur du point de contact et la moitié du paramètre p.

860. Si PM et PM' sont les deux tangentes menées à la parabole par un point extérieur P, les triangles FPM, FPM', sont semblables, et FP est la moyenne proportionnelle des rayons vecteurs FM, FM', des deux points de contact.

861. Si PM et PM' sont les deux tangentes menées à la parabole par un point extérieur P, démontrer que la parallèle menée à l'axe par le point P passe par le milieu de la corde MM', et que la tangente au point où cette parallèle rencontre la courbe est elle-même parallèle à la corde MM'.

862. Si l'on rapporte la parabole à une tangente et au diamètre mené par son point de contact pris comme axes coordonnés, le carré de l'or-

donnée d'un point de la courbe est égal à quatre fois le produit du rayon vecteur de l'extrémité du diamètre par l'abscisse du point considéré.

863. Si deux cordes de la parabole se coupent, les produits de leurs segments sont dans le rapport des rayons vecteurs des extrémités des diamètres qui leur sont conjugués.

864. MN étant une tangente commune à la parabole et au cercle décrit sur la corde menée perpendiculairement à l'axe par le foyer comme diamètre, démontrer que les droites FM et FN sont également inclinées sur cette corde.

865. La tangente en un point de la parabole rencontre la directrice et la corde menée par le foyer, perpendiculairement à l'axe, en des points équidistants du foyer.

866. Si l'ordonnée d'un point M de la parabole passe par le milieu de la sous-normale qui correspond à un point M', l'ordonnée du point M est égale à la normale qui correspond au point M'.

867. Si d'un point pris sur une tangente à la parabole on mène une autre tangente à la courbe, l'angle compris entre cette tangente et la droite menée du même point au foyer est constant.

868. Construire une parabole qui touche un cercle donné en un point donné, et dont l'axe soit tangent au même cercle en un autre point donné.

869. Si par le point de contact d'une tangente à la parabole on tire une corde, puis qu'on trace une autre droite parallèle à l'axe, la portion de cette droite comprise entre la tangente et la corde sera divisée par son point de rencontre avec la courbe dans le même rapport que cette droite elle-même divise la corde.

870. Si le diamètre de la parabole menée par le point M rencontre la directrice en K et la corde menée par le foyer parallèlement à la tangente MT en H, on a

$$MK = MH.$$

871. Quel est le lieu du point d'intersection du diamètre mené en un point de la parabole avec la corde tracée par le foyer parallèlement à la tangente au même point?

872. AB et AC étant deux droites rectangulaires, on mène la droite quelconque AR et la parallèle fixe CR à AB, puis, on prend sur AR un point M tel que son ordonnée MQ par rapport à AB soit égale à CR : quel est le lieu du point M ?

873. On considère dans un cercle un diamètre fixe AOB et un rayon quelconque OC; D étant le milieu de la corde CE menée parallèlement

au diamètre fixe, on demande le lieu du point d'intersection des droites OC et AD.

874. Si deux tangentes égales à la parabole sont coupées par une troisième, les segments déterminés sur ces tangentes sont égaux, mais les segments égaux ne sont pas placés de même sur les deux tangentes.

875. Le cercle déterminé par les points d'intersection de trois tangentes à la parabole passe par le foyer.

876. MFN étant une corde quelconque menée par le foyer de la parabole, si l'on trace du sommet S les droites SM et SN, elles rencontrent la corde focale perpendiculaire à l'axe en deux points P et Q dont les distances au foyer sont égales aux ordonnées des points N et M.

877. Si d'un point O pris sur l'axe de la parabole on mène une corde, la distance SO du sommet S au point O est la moyenne proportionnelle des abscisses des extrémités de la corde.

878. Du sommet S, on mène deux droites rectangulaires qui viennent rencontrer la parabole aux points M et M'; le paramètre $2p$ est la moyenne proportionnelle des abscisses des points M et M'.

879. Quel est le lieu du centre du cercle inscrit dans le secteur circulaire AOB, dont l'un des rayons OA est fixe et dont l'autre OB est mobile ?

880. Sur une corde de la parabole comme diamètre, on décrit un cercle qui coupe la parabole en deux autres points; si l'on joint ces points, les deux cordes considérées interceptent sur l'axe de la courbe une longueur égale au paramètre $2p$.

881. Deux paraboles égales qui ont un même foyer et leurs axes dirigés en sens contraires se coupent à angle droit.

882. Si un triangle est inscrit dans une parabole, les points où ses côtés prolongés viennent rencontrer les tangentes menées à la courbe par les sommets opposés sont en ligne droite.

883. Si les tangentes PM, PM', à la parabole sont coupées en Q et en Q' par une troisième tangente, on a

$$\frac{PQ}{QM} = \frac{Q'M'}{PQ'}.$$

884. Si l'on tire par le sommet de la parabole des cordes à angle droit l'une sur l'autre, et qu'on construise sur ces cordes un rectangle, quel est le lieu de son quatrième sommet ?

885. Si une parabole roule sur une autre parabole égale, les sommets

étant d'abord confondus, le foyer de chaque courbe trace la directrice de l'autre.

886. Quel est le lieu des points également distants d'une droite et d'une circonférence données ?

887. Quel est le lieu des points dont la somme ou la différence des distances à un point fixe et à une droite fixe est constante ?

888. Des extrémités d'une corde focale de la parabole on abaisse des perpendiculaires sur une droite quelconque de son plan ; la somme des rapports de chaque ordonnée au rayon vecteur correspondant est constante.

889. Les carrés des perpendiculaires abaissées du foyer de la parabole sur deux tangentes sont proportionnels aux rayons vecteurs des points de contact.

890. Construire une parabole, connaissant : 1° le foyer ou la directrice et deux points ; 2° le foyer ou la directrice, un point et une tangente ; 3° le foyer ou la directrice, une tangente et son point de contact ; 4° le foyer ou la directrice et deux tangentes ; 5° trois tangentes, parmi lesquelles la tangente au sommet ; 6° quatre tangentes.

§§ IV, V, VI. — Ellipse considérée comme projection orthogonale du cercle. — Parabole considérée comme limite de l'ellipse. — Ellipse, Hyperbole et Parabole, considérées comme sections planes du cône de révolution.

891. La demi-corde focale de l'ellipse ou de l'hyperbole, perpendiculaire au grand axe ou à l'axe transverse de la courbe, est égale à $\frac{b^2}{a}$.

892. Les tangentes aux extrémités d'une corde focale se coupent sur la directrice correspondante.

893. Si la tangente en M à l'ellipse ou à l'hyperbole de centre C rencontre en T le grand axe ou l'axe transverse de la courbe, MP étant l'ordonnée du point M par rapport à cet axe, on a

$$CT.CP = a^2.$$

894. Les tangentes fixes aux sommets A et A′ d'une ellipse de centre C étant rencontrées par une tangente mobile en M et en M′, on projette M′ sur CM en P ; démontrer que le lieu du point P est un cercle passant par C.

895. Dans l'ellipse ou l'hyperbole, la distance d'un foyer au pied d'une normale sur le grand axe ou sur l'axe transverse de la courbe est au rayon vecteur correspondant du point de contact dans un rapport égal à l'excentricité de la courbe.

896. On mène l'ordonnée d'un point de l'ellipse ou de l'hyperbole et la normale au même point; le rapport des distances du pied de l'ordonnée au pied de la normale sur le grand axe, ou sur l'axe transverse et au centre, est égal à $\frac{b^2}{a^2}$.

897. MP étant l'ordonnée d'un point de l'ellipse ou de l'hyperbole dont le grand axe ou l'axe transverse est AA', on a

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{AP}.\overline{A'P}} = \frac{b^2}{a^2}.$$

898. Si une tangente en M à l'ellipse ou à l'hyperbole rencontre le petit axe ou l'axe non transverse en U, et si Q est la projection de M sur le même axe, C étant le centre de la courbe, on a

$$CU.CQ = b^2.$$

899. Si deux tangentes PM, PM', à l'ellipse partent d'un même point P, le centre de la courbe étant C, et la droite CP coupant la courbe en R et la corde de contact MM' en H, on a

$$\overline{CR}^2 = CH.CP.$$

900. Les normales en deux points M et M' d'une ellipse rencontrant l'un des axes en P et P', la perpendiculaire élevée au milieu de MM' passe par le milieu de PP'.

901. Une tangente mobile rencontrant en M et en M' les tangentes fixes aux sommets A et A' d'une ellipse, le point d'intersection P des droites AM' et A'M décrit une ellipse concentrique à la première.

902. Si l'on rapporte une ellipse ou une hyperbole à deux diamètres conjugués DD' et EE', de longueurs $2a'$ et $2b'$, pris comme axes coordonnés, MP étant l'ordonnée d'un point M de la courbe, on a

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{DP}.\overline{D'P}} = \frac{b'^2}{a'^2}.$$

903. Si CD et CE sont deux diamètres conjugués de l'ellipse ou de l'hyperbole, et que la perpendiculaire EK à CD rencontre le grand axe ou l'axe transverse de la courbe en G, on a

$$EK.EG = b^2.$$

904. Si CD et CE sont deux diamètres conjugués de l'ellipse ou de l'hyperbole, on a

$$FE.F'E = \overline{CD}^2.$$

905. Si deux cordes se coupent dans l'ellipse ou l'hyperbole, les produits de leurs segments sont proportionnels aux carrés des diamètres parallèles à ces cordes.

906. La distance du centre de l'hyperbole au point où une asymptote coupe une directrice est égale au demi-axe transverse. — La perpendiculaire abaissée d'un foyer sur une asymptote est égale au demi-axe non transverse. — Si une asymptote rencontre la tangente au sommet A en H et la directrice correspondante en I, AI est parallèle à FH.

907. Soit un point K de l'asymptote d'une hyperbole, dont l'ordonnée et l'abscisse par rapport aux axes de la courbe sont KP et KR; si KP coupe l'hyperbole en M et si KR coupe l'hyperbole conjuguée en N, on a

$$KP^2 - MP^2 = b^2 \quad \text{et} \quad KR^2 - NR^2 = a^2.$$

De plus, la droite MN est parallèle à la seconde asymptote de l'hyperbole.

908. La directrice d'une hyperbole joint les projections du foyer correspondant sur les asymptotes.

909. Si par le point M d'une hyperbole on tire une sécante quelconque qui coupe les deux asymptotes en P et P', la tangente parallèle à cette sécante et limitée aux deux asymptotes étant LQL', on a

$$MP.MP' = \overline{QL}^2.$$

910. Deux hyperboles conjuguées interceptent sur une sécante quelconque des longueurs égales.

911. Tout point de l'hyperbole est également distant d'un foyer et de la directrice correspondante, cette dernière distance étant comptée parallèlement à une asymptote.

912. Si une tangente LQL' coupe les asymptotes en L et en L', l'aire du triangle CLL' est égale à ab.

913. Si M et N sont les points de rencontre de deux hyperboles conjuguées avec l'ordonnée et l'abscisse d'un point d'une de leurs asymptotes, les tangentes menées aux deux courbes en M et en N sont respectivement parallèles à CN et à CM.

914. Soit un point M de l'hyperbole; si MP est l'ordonnée de ce point par rapport au diamètre CD (c'est-à-dire la parallèle menée par M à la tangente en D) et si la tangente en M coupe CD en T, on a

$$CP.CT = \overline{CD}^2.$$

915. Si MT est une tangente à l'ellipse au point M, rencontrant le grand axe AA' au point T, et si la perpendiculaire élevée en T au grand axe rencontre en Q et en Q' les droites MA et MA', on a

$$QT = Q'T.$$

916. Soit MFM' une corde focale de l'ellipse dont le grand axe est AA'; si l'on prolonge MA et M'A jusqu'à leurs points de rencontre Q et Q' avec la directrice qui correspond au foyer F, l'angle QFQ' est droit.

917. Dans l'ellipse, la somme des carrés des deux normales menées aux extrémités de deux demi-diamètres conjugués est constante (on prend pour longueur d'une normale la distance du point de contact au pied de la normale sur le grand axe).

918. Soient dans l'ellipse deux demi-diamètres conjugués CD et CE; sur la normale en D, on prend DP égale à CE: quel est le lieu du point P?

919. M et M' sont deux points de l'ellipse dont le grand axe est AA': AM' et A'M' coupant l'ordonnée MP du point M en deux points Q et Q', on a

$$\overline{MP}^2 = PQ.PQ'.$$

920. Soient dans l'ellipse la normale MG et la perpendiculaire GL abaissée du point G sur le rayon vecteur FM; le rapport de GL à l'ordonnée MP du point M est égal à l'excentricité de la courbe.

921. Si l'ordonnée MP d'un point M de l'ellipse rencontre en Q la tangente menée à l'extrémité de la corde focale principale, on a

$$QP = FM.$$

922. M étant un point fixe d'une ellipse et QQ' une corde quelconque conjuguée au diamètre CM, le cercle QMQ' rencontre l'ellipse proposée en un point fixe.

923. M étant un point de l'ellipse, on tire la corde MM' parallèle au grand axe, et, par le point M', on mène les cordes M'Q, M'Q', faisant des angles égaux avec le grand axe : démontrer que la droite QQ' est parallèle à la tangente en M.

924. Quel est le parallélogramme d'aire minimum circonscrit à l'ellipse ?

925. Quand la somme de deux diamètres conjugués de l'ellipse est-elle minimum ?

926. Si du point M de l'ellipse on tire des droites aux extrémités d'un diamètre DD', lesquelles coupent son conjugué EE' aux points P et P', on a

$$CP.CP' = \overline{CD}^2.$$

927. Si CD et CE sont deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse, on a

$$(FD - a)^2 + (FE - a)^2 = c^2.$$

928. Soient CD et CE deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse dont les axes sont AA' et BB'; traçons les droites BD et BE, ainsi que les droites A'D et AE qui se coupent en O : démontrer que le quadrilatère BDOE est un parallélogramme, et chercher dans quel cas son aire est maximum.

929. Si MFM', NCN', sont deux cordes parallèles menées par le foyer et par le centre d'une ellipse, démontrer qu'on a

$$\frac{FM.FM'}{CN.CN'} = \frac{b^2}{a^2}.$$

930. Si la tangente au sommet A de l'ellipse est coupée par deux diamètres conjugués en T et en U, on a

$$AT.AU = b^2.$$

931. Si les tangentes en trois points P, Q, R, de l'ellipse se coupent deux à deux aux points R', Q' et P', on a

$$PR'.QP'.RQ' = PQ'.QR'.RP'.$$

932. Si des extrémités des axes d'une ellipse on tire dans une direction quelconque quatre droites parallèles, les points où elles rencontrent la courbe sont les extrémités de deux diamètres conjugués.

933. Si MFM' est une corde focale de l'ellipse et X le pied de la directrice correspondante, les droites XM et XM' sont également inclinées sur les axes de la courbe.

934. PM et PM' étant deux tangentes menées à l'ellipse par un même point P, et la corde MM' coupant les directrices en R et en R', on a

$$\frac{RM.R'M}{RM'.R'M'} = \frac{\overline{PM}^2}{\overline{PM'}^2}$$

935. CD et CE étant deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse, et CE rencontrant les rayons vecteurs FD et F'D en H et en H', on a

$$FH = F'H'.$$

936. Quel est le lieu des milieux des cordes focales d'une ellipse?

937. M étant un point quelconque de l'ellipse ou de l'hyperbole, quels sont les lieux décrits par les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle FMF'?

938. Si du foyer F de l'ellipse on abaisse des perpendiculaires sur les diamètres conjugués DD' et EE', ces perpendiculaires prolongées coupent EE' et DD' sur la directrice correspondant au foyer F.

939. M étant un point de l'ellipse de grand axe AA', quel est le lieu des points d'intersection des perpendiculaires élevées en A et en A' aux droites AM et A'M?

940. Si MP et CP sont l'ordonnée et l'abscisse du point M d'un cercle de centre C rapporté à deux diamètres rectangulaires comme axes coordonnés, et si la droite PQ prise égale à MP est inclinée sur elle d'un angle constant, quel est le lieu du point Q?

941. Soient un triangle PQR et une ellipse enveloppante ayant son centre C au point de rencontre des médianes du triangle; CP, CQ, CR, prolongées, rencontrent l'ellipse aux points P', Q', R' : démontrer que les tangentes en ces points forment un triangle semblable au triangle PQR et d'une aire quatre fois plus grande.

942. Une tangente mobile rencontre en M et N les tangentes fixes aux sommets A et B d'une ellipse; le lieu du point d'intersection des parallèles menées par M et N aux axes de l'ellipse est une hyperbole équilatère.

943. Quel est le lieu des points d'intersection des perpendiculaires abaissées des foyers d'une ellipse sur deux diamètres conjugués?

944. Construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant : 1° ses directrices et un point; 2° ses directrices et une tangente; 3° une directrice, deux points et une tangente; 4° une directrice, un sommet et une tangente; 5° une directrice, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles; 6° une directrice et trois tangentes; 7° un foyer, la directrice correspondante et une tangente; 8° un foyer ou une directrice et trois points.

945. Soient MP l'ordonnée d'un point de l'hyperbole dont le centre est C et PQ une tangente au cercle principal; si l'on trace jusqu'à l'axe transverse MN parallèle à CQ, on a

$$PN = b.$$

946. Soient MP l'ordonnée d'un point M de l'ellipse ou de l'hyperbole, C le centre de la courbe, A l'un des sommets situés sur le grand axe ou l'axe transverse; menons PQ parallèle à AM jusqu'à la rencontre de CM: démontrer que AQ est parallèle à la tangente en M.

947. Si l'on mène deux tangentes quelconques à l'hyperbole, les droites déterminées par leurs points d'intersection avec les asymptotes sont parallèles.

948. Dans l'hyperbole équilatère, les diamètres conjugués sont égaux entre eux, et la portion de normale comprise entre le point de contact et l'axe transverse est égale à la distance du centre au point de contact.

949. Si l'on tire une droite par un sommet de l'hyperbole, son second point de rencontre avec la courbe divise en deux parties égales la portion de cette droite interceptée par les parallèles menées de l'autre sommet de l'hyperbole à ses asymptotes.

950. Les asymptotes de l'hyperbole divisent en parties égales les droites qui unissent les extrémités de deux diamètres conjugués.

951. CD et CE étant deux demi-diamètres conjugués de l'hyperbole, on a

$$F'E - ED = a - b.$$

952. Dans l'hyperbole équilatère, les cordes focales parallèles à deux diamètres conjugués sont égales.

953. Le rayon du cercle qui touche une hyperbole et ses asymptotes est égal à la portion de la corde focale principale prolongée comprise entre la courbe et ses asymptotes.

954. MM' étant une corde de l'hyperbole et CP le demi-diamètre correspondant, si l'on tire par les points M, P, M', des parallèles MH, PK, M'H', à l'une des asymptotes jusqu'à la rencontre de l'autre en H, K, H', on a

$$CH.CH' = \overline{CK}^2.$$

955. Soient un cercle de diamètre AA' et une corde PQ perpendiculaire à AA': trouver le lieu des points d'intersection des droites AP et A'Q.

956. Si deux hyperboles équilatères égales sont décrites de manière que les axes de l'une soit les asymptotes de l'autre, elles se coupent à angle droit.

957. Quel est le lieu des points qui sont au tiers des arcs de tous les segments de cercle qu'on peut décrire sur une droite donnée?

958. Si deux tangentes partant d'un même point P coupent l'une des

asymptotes de l'hyperbole en R et en S, l'autre asymptote en r et en s, on a

$$PR.PS = Pr.Ps.$$

959. MM′ étant la double ordonnée d'une ellipse de grand axe AA′, quel est le lieu des points de rencontre des droites AM et A′M′?

960. Si la tangente au point M d'une hyperbole équilatère coupe ses asymptotes en L et en L′, et si MG est la normale en M, l'angle LGL′ est droit.

961. Soit la corde MM′ d'une hyperbole rencontrant ses asymptotes en R et en R′, et la tangente RN à la courbe; si les parallèles MH, NK, M′H′, à l'une des asymptotes, rencontrent l'autre asymptote aux points H, K, H′, on a

$$MH + M'H' = 2NK.$$

962. Si par les points M et M′ d'une hyperbole on mène des droites parallèles aux asymptotes, on forme un parallélogramme dont MM′ est une diagonale : démontrer que l'autre diagonale passe par le centre de la courbe.

963. Quel est le lieu décrit par le milieu d'une droite qui se meut en formant avec deux axes rectangulaires un triangle d'aire constante?

964. Si par le point M d'une hyperbole de centre C on mène des parallèles MD et ME à chaque asymptote, jusqu'à la rencontre de l'autre, et si l'on construit une ellipse ayant CD et CE pour demi-diamètres conjugués, CM coupant l'ellipse en N, les tangentes aux deux courbes en M et en N sont parallèles.

965. On fait passer un cercle par un point quelconque M d'une hyperbole et les extrémités A et A′ de son axe transverse : trouver le lieu du point Q où l'ordonnée MP prolongée rencontre ce cercle.

966. On donne une série d'ellipses tangentes à une hyperbole équilatère et ayant leurs axes dirigés suivant ses asymptotes : démontrer que le produit des axes de ces ellipses est constant.

967. Sur deux diamètres conjugués d'une ellipse comme asymptotes, on construit deux hyperboles conjuguées l'une à l'autre : démontrer que, si l'une de ces hyperboles touche l'ellipse, il en est de même de l'autre, et que les diamètres tirés aux points de contact sont conjugués aussi bien dans l'ellipse que dans l'hyperbole.

968. Trouver l'angle des asymptotes de l'hyperbole obtenue en coupant un cône de révolution par un plan. — Cas où le plan sécant est parallèle à l'axe du cône.

969. Deux cônes de révolution qui ont même sommet, même génératrice et leurs axes rectangulaires sont coupés par deux plans menés parallèlement à leurs axes d'un même point de la génératrice commune, suivant des hyperboles conjuguées.

970. Quel est le lieu des foyers de toutes les sections paraboliques d'un cône de révolution donné ?

971. Quel est le lieu des foyers de toutes les sections elliptiques de même excentricité dans un cône de révolution donné ?

972. Quel est le lieu des extrémités des petits axes de toutes les sections elliptiques parallèles d'un cône de révolution donné ?

973. Dans quel cas un plan peut-il couper un cône de révolution donné suivant une hyperbole équilatère ?

974. Construire une hyperbole, connaissant : 1° un foyer ou une directrice, la longueur de l'axe transverse et une asymptote; 2° un foyer ou une directrice, une tangente et une asymptote; 3° trois points et une asymptote.

975. Trouver le lieu des sommets des cônes de révolution qui passent par une ellipse ou une hyperbole donnée de position et de grandeur.

§ VII. — Propriétés fondamentales de l'hélice.

976. Par deux points d'une surface cylindrique, on peut faire passer une infinité d'hélices.

977. Quel est le plus court chemin entre deux points d'une surface cylindrique, mesuré sur cette surface elle-même ?

978. Deux hélices tracées sur un cylindre de révolution se coupent orthogonalement; on donne le rayon du cylindre et le pas de l'une des hélices, trouver le pas de l'autre.

979. Des extrémités A et A′ d'un diamètre de la section droite d'un cylindre de révolution partent deux hélices orthogonales dont le premier point d'intersection est en M: trouver, en fonction du pas h de la première hélice et du rayon R du cylindre, l'aire mixtiligne AMA′. — Quel doit être le pas h pour que l'aire AMA′ soit maximum ? Le rayon du cylindre étant un décimètre, évaluer à un millimètre carré près cette aire maximum.

980. Étant donnée une hélice tracée sur un cylindre de révolution, une droite glisse sur cette hélice et sur l'axe du cylindre en restant normale à cet axe; quelle est la section de la surface ainsi engendrée : 1° par

un cylindre concentrique au premier ? 2° par un cylindre de révolution dont une arête est l'axe même du premier cylindre ?

981. Étant donnée une hélice tracée sur un cylindre de révolution, une droite glisse sur cette hélice et sur l'axe du cylindre en faisant un angle constant avec cet axe : démontrer que la normale à la courbe tracée par cette droite sur un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, intercepte une longueur constante sur la perpendiculaire élevée par le pied de l'axe dans le plan considéré au rayon vecteur issu du même point.

APPENDICE DU HUITIÈME LIVRE.

982. Démontrer que l'homographie de deux divisions peut s'exprimer par l'une quelconque des formules

$$\frac{am}{bm} = \lambda \frac{a'm'}{b'm'}, \quad \lambda \frac{am}{bm} + \mu \frac{a'm'}{b'm'} = 1.$$

983. Deux divisions homographiques étant données, on peut toujours prendre à partir d'un point donné de la première deux segments qui soient respectivement égaux à leurs homologues de la seconde, mais l'un avec le même signe, l'autre avec un signe contraire.

984. Deux droites divisées homographiquement peuvent toujours être placées l'une sur l'autre de manière que les deux divisions soient en involution.

985. Dans deux divisions homographiques de même base, le rapport des distances d'un point quelconque de la première division aux deux points doubles est proportionnel au rapport des distances du point homologue de la seconde division aux deux mêmes points doubles.

986. Quand deux faisceaux homographiques concentriques ont leurs rayons doubles imaginaires, on peut les projeter suivant deux faisceaux dont les rayons homologues fassent entre eux des angles égaux et de même sens.

987. Étant donnés dans une involution deux points conjugués, le point central et le milieu de deux autres points conjugués, on demande de déterminer ces derniers points.

988. Dans deux faisceaux en involution, il existe toujours deux rayons homologues également inclinés sur un rayon donné, et il n'y en a que deux.

989. Étant donnés deux faisceaux homographiques non concentriques, on peut les couper par une droite suivant deux divisions en involution.

Toutes les transversales qui remplissent cette condition passent par un même point.

990. Dans toute proportion harmonique $ab\,a'b'$, le conjugué harmonique du milieu de bb' par rapport à a et a' coïncide avec le conjugué harmonique de aa' par rapport à b et b', et ce point est le point central de l'involution déterminée par les deux couples (a, a') et (b, b').

991. Lorsqu'un point décrit une hyperbole, les droites qui joignent ce point à deux points fixes interceptent sur une asymptote un segment de longueur constante.

992. Quel est le lieu des points dont le produit des distances à deux droites fixes est constant?

993. Dans tout triangle circonscrit à une conique, les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés concourent en un même point.

994. Le sommet d'un angle de grandeur constante décrit une droite fixe, tandis que l'un des côtés passe par un point fixe. Quelle est l'enveloppe de l'autre côté?

995. Démontrer que, lorsque deux triangles sont inscrits à une conique, les six côtés touchent une autre conique.

996. Deux angles de grandeur constante tournent autour de leurs sommets; deux de leurs côtés se coupent sur une droite fixe : quel est le lieu décrit par l'intersection des deux autres côtés? — Quel est le théorème corrélatif?

997. Un polygone plan se déforme de telle sorte, que ses côtés pivotent autour de points fixes et que ses sommets moins un glissent sur des droites fixes; quel est le lieu décrit par le dernier sommet? — Quel est le lieu décrit par l'intersection de deux côtés non contigus quelconques? — Quel est enfin le théorème corrélatif?

998. Si deux cordes d'une conique se divisent mutuellement en deux parties égales, ces cordes passent par le centre.

999. Dans l'hyperbole équilatère, les droites menées d'un point de la courbe aux extrémités d'un diamètre sont également inclinées sur une asymptote.

1000. Étant données une conique et deux tangentes parallèles, les droites menées du centre aux points où une troisième tangente rencontre les deux premières sont deux diamètres conjugués.

1001. Une hyperbole qui a pour asymptotes deux diamètres conjugues d'une conique la coupe sur deux autres diamètres conjugués.

1002. Trouver dans le plan d'une conique le lieu du point M tel, que les rayons vecteurs FP et F'P', menés des foyers aux points de contact des tangentes issues de ce point, soient parallèles et de même sens.

1003. La figure restant la même qu'au numéro précédent, trouver le lieu du point de rencontre des diagonales du trapèze FPP'F'.

1004. Si une droite fixe rencontre une série de coniques ayant même foyer et même directrice, les tangentes à ces coniques aux points où elles rencontrent la droite fixe enveloppent une conique qui a même foyer que les proposées, et qui touche à la fois leur directrice commune et la droite fixe.

1005. Si l'abscisse d'un point d'une parabole est égale au rayon vecteur mené du foyer à un autre point, l'ordonnée du premier point est égale à la normale relative au second.

1006. Transformer par la méthode de projection les théorèmes suivants :

1° Dans le cercle, la tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon du point de contact;

2° Les tangentes menées par un point extérieur à un système de coniques confocales font des angles égaux avec les droites qui joignent ce point aux deux foyers ;

3° Le lieu des centres d'un cercle qui touche de la même manière deux cercles donnés est une hyperbole qui a pour foyers les centres des deux cercles donnés.

1007. Étant donnés cinq points d'une hyperbole, construire ses asymptotes.

1008. Étant données cinq tangentes à une conique, construire les deux tangentes qui passent par un point donné.

1009. Construire une conique, connaissant le centre et trois points.

1010. Construire une conique, connaissant un point et les directions de deux couples de diamètres conjugués.

1011. Étant données deux coniques et une droite, construire une troisième conique tangente à la droite et passant par les quatre points communs aux deux premières.

1012. Construire une conique homothétique à une conique donnée, et passant par trois points donnés ou tangente à trois droites données.

1013. Tout plan mené par deux arêtes d'un cône du second ordre coupe les plans cycliques suivant deux droites qui font respectivement avec ces deux arêtes deux angles égaux. — Quel est le théorème corrélatif ?

1014. Deux plans tangents à un cône du second ordre suivant deux arêtes quelconques coupent les deux plans cycliques suivant quatre droites qui sont les génératrices d'un même cône de révolution dont l'axe est perpendiculaire au plan des deux arêtes de contact. — Théorème corrélatif.

1015. Dans tout cône du second ordre, chaque plan tangent coupe les deux plans cycliques suivant deux droites telles, que le produit des tangentes des demi-angles qu'elles font avec l'intersection des deux plans cycliques est constant. — Théorème corrélatif.

1016. Dans tout cône du second ordre, le produit des sinus des angles que chaque arête fait avec les deux plans cycliques est constant.— Théorème corrélatif.

1017. Les projections orthogonales des deux focales d'un cône du second ordre sur les plans tangents au cône forment un nouveau cône du second ordre ayant un double contact avec le premier et dont les plans cycliques sont normaux aux focales du premier. — Théorème corrélatif.

1018. Quand deux cônes du second ordre ont même sommet et mêmes plans cycliques, si on leur mène un plan tangent commun, les deux arêtes de contact sont rectangulaires. — Théorème corrélatif.

1019. Autour de deux points fixes pris sur une sphère, on fait tourner les côtés d'un angle sphérique de grandeur variable et tel, que le segment intercepté entre ses côtés sur un arc de grand cercle donné ait une longueur constante : quel est le lieu du sommet de cet angle ?

1020. On donne sur une sphère deux arcs fixes, et l'on demande le lieu des points de cette sphère dont le produit des distances à ces deux arcs est constant.

1021. Quelle est la courbe sphérique dont chaque point est équidistant d'un point de la sphère et d'un arc de grand cercle de cette sphère ?

QUESTIONS DIVERSES
DE GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

1022. Construire un triangle sphérique, connaissant son aire, un côté et le cercle circonscrit.

1023. Construire un triangle sphérique, connaissant son aire, sa base et sa hauteur.

1024. La sphère variable assujettie à couper deux sphères fixes suivant leurs grands cercles passe par deux points fixes.

1025. Les milieux des arêtes d'un tétraèdre ne sont sur une même sphère que si les hauteurs du tétraèdre passent par un même point, et alors la sphère qui les contient passe par les pieds des plus courtes distances des arêtes opposées.

1026. Si une sphère variable coupe trois sphères fixes sous des angles égaux, mais indéterminés, son centre ne sort pas d'un certain plan.

1027. Si une sphère variable coupe quatre sphères donnécs sous des angles égaux, mais variables simultanément, son centre décrit une droite.

1028. Mener une sphère qui coupe quatre sphères données suivant leurs grands cercles.

1029. Dans un tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent en un même point, les centres de gravité des faces, les pieds des quatre hauteurs et les points situés aux deux tiers des droites qui joignent chaque sommet au point de rencontre des hauteurs sont sur une même sphère, dont le rayon est égal au tiers du rayon de la sphère circonscrite et dont le centre est au milieu de la droite qui joint le point de concours des hauteurs au point de concours des perpendiculaires élevées sur chaque face par son centre de gravité.

1030. Mener une sphère qui en coupe cinq autres sous des angles égaux.

1031. En joignant un point de l'espace aux sommets d'un tétraèdre,

on obtient une figure dont les plans des faces opposées se coupent deux à deux suivant trois droites comprises dans un même plan; la diagonale issue d'un sommet, divisée par la longueur de son prolongement jusqu'à ce plan, est égale à la somme des trois côtés adjacents à ce sommet, divisés respectivement par les longueurs de leurs prolongements jusqu'au même plan.

1032. Une série d'ellipses ont leurs diamètres conjugués égaux de même longueur; l'un de ces diamètres est fixe et commun à toutes les ellipses, l'autre varie de position quand on passe d'une ellipse à la suivante. Si l'on prend un point fixe sur le diamètre fixe prolongé et si l'on mène de ce point des tangentes aux ellipses considérées, quel est le lieu des points de contact de toutes ces tangentes ?

1033. Si l'on décrit une ellipse sur le grand côté d'un rectangle comme grand axe, de manière qu'elle passe par le point d'intersection des diagonales, et si l'on joint un point de l'ellipse extérieur à ce rectangle aux extrémités du côté opposé au grand axe, les droites ainsi déterminées divisent le grand axe en segments qui sont en progression géométrique.

1034. Le produit des segments déterminés par son point de contact sur une tangente à l'ellipse, limitée à ses points de rencontre avec les axes, est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente.

1035. Quel est le lieu du second foyer des ellipses qui ont un foyer commun et deux tangentes communes ?

1036. Quel est le lieu des milieux de toutes les cordes d'une ellipse qui vont converger en un point fixe ?

1037. Si deux diamètres conjugués d'une ellipse sont en même temps les asymptotes d'une hyperbole, les points de contact des tangentes communes à l'ellipse et à l'hyperbole sont sur une ellipse semblable à la proposée.

1038. La base AB du triangle ABC reste fixe, tandis que le sommet C décrit une hyperbole équilatère passant par les points A et B : P et Q étant les points où AC et BC rencontrent le cercle décrit sur AB comme diamètre, trouver le lieu des points d'intersection de AQ et de BP.

1039. Quel est le lieu du second foyer des ellipses qui ont un foyer commun et qui passent par deux points donnés ?

1040. Quel est le lieu des centres des hyperboles équilatères qui passent par trois points donnés ?

1041. Si l'on joint aux deux foyers de l'hyperbole les points de ren-

contre d'une tangente à la courbe avec les asymptotes, on obtient un quadrilatère inscriptible.

1042. Si l'on prend sur la corde focale principale d'une parabole deux points également distants du foyer, le trapèze formé en abaissant de ces points des perpendiculaires sur une tangente quelconque à la courbe a une aire constante.

1043. Les produits des distances du foyer d'une parabole aux sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à la courbe sont égaux.

1044. Étant données deux tangentes à la parabole, si on leur mène des parallèles par un point quelconque de leur corde de contact, la diagonale du parallélogramme ainsi formé, qui est opposée au point choisi sur la corde de contact, est tangente à la courbe.

1045. En un point P de la parabole, la corde du cercle de courbure, qui est menée parallèlement à l'axe de la courbe, est égale à quatre fois le rayon vecteur du point P.

1046. La corde PH du cercle de courbure au point P de l'ellipse ou de l'hyperbole, qui est menée par le centre C de la courbe, satisfait à la relation $PH.CP = 2\overline{CD}^2$, CD étant le conjugué du diamètre CP.

1047. Étant donnés deux triangles, projeter le premier sur un plan de telle sorte que sa projection soit semblable au second triangle.

1048. Couper un cône de révolution donné suivant une ellipse d'excentricité donnée.

1049. Deux cônes de révolution qui se coupent ont même axe, et l'angle au sommet du cône intérieur est de 60 degrés : démontrer que le sommet de ce cône est un foyer commun de toutes les sections déterminées sur le cône extérieur par les plans tangents au cône intérieur.

1050. Construire une sphère admettant avec quatre sphères données des tangentes communes de longueurs données.

1051. On appelle *homocycliques* deux cônes qui ont même sommet et mêmes plans cycliques. Démontrer que, lorsqu'un plan mené par le sommet commun de deux cônes homocycliques coupe ces cônes suivant quatre arêtes, les deux arêtes de l'un font respectivement deux angles égaux avec les deux arêtes de l'autre. — Qu'arrive-t-il en particulier lorsque le plan considéré coupe l'un des cônes et touche l'autre ?

1052. Quand un plan touche deux cônes homocycliques, les deux arêtes de contact sont rectangulaires.

1053. SA et SB étant deux arêtes rectangulaires prises sur deux cônes homocycliques, le plan ASB coupe les deux cônes suivant deux autres

arêtes SA′ et SB′ qui sont encore perpendiculaires l'une à l'autre; les quatre droites suivant lesquelles se coupent les plans tangents au premier cône suivant SA et SA′, et les plans tangents au second cône suivant SB et SB′, appartiennent à un troisième cône homocyclique avec les deux premiers ; ce troisième cône reste le même, quelles que soient les deux arêtes rectangulaires primitives SA et SB.

1054. Quand deux cônes sont homocycliques, deux plans tangents au premier cône coupent l'autre cône suivant quatre arêtes appartenant à un cône de révolution dont l'axe est normal aux arêtes de contact des deux plans tangents.

1055. Étant donnés un cône à base circulaire et deux plans fixes tangents à ce cône, si un autre plan tangent roule sur le cône, ses intersections avec les deux plans fixes sont telles, que les plans menés par chacune d'elles et une ligne focale font un angle constant.

1056. Pour qu'un quadrilatère gauche ait ses quatre côtés sur un hyperboloïde de révolution, il faut et il suffit que la somme de deux quelconques de ses côtés soit égale à celle des deux autres.

1057. Toute section plane du tore est le lieu d'un point tel que le produit des longueurs des tangentes menées de ce point à deux cercles soit proportionnel à la distance de ce point à une droite. — Que devient ce théorème, lorsque le plan de la section est parallèle à l'axe du tore?

1058. Un polygone plan se déforme de telle sorte que ses sommets, moins un, glissent sur des droites fixes, tous ses côtés étant vus d'autant de points fixes sous des angles donnés: trouver le lieu du dernier sommet. — Quel est le théorème corrélatif?

1059. Sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet, on prend trois couples de points qui divisent harmoniquement ces trois droites: démontrer que les six points considérés sont sur une conique. — Quel est le théorème corrélatif?

1060. On donne une conique et un triangle situé dans son plan ; démontrer : 1° que les droites qui joignent les sommets du triangle aux pôles des côtés opposés par rapport à la conique concourent en un même point; 2° que les côtés rencontrent les polaires des sommets opposés en trois points en ligne droite.

1061. Si autour d'un point fixe on fait tourner une sécante qui rencontre une conique aux points a et a', la somme algébrique des inverses des distances des points a et a' à la polaire du point fixe est constante.

1062. Construire la conique déterminée par cinq points, dont quatre sont imaginaires.

1063. Construire la conique déterminée par cinq tangentes, dont quatre sont imaginaires.

1064. Projeter une conique suivant une hyperbole équilatère.

1065. La polaire réciproque d'une parabole par rapport à un point de la directrice est une hyperbole équilatère.

1066. Les hauteurs d'un triangle circonscrit à la parabole se coupent sur la directrice.

1067. Les hauteurs d'un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère se coupent sur la courbe.

1068. Inscrire dans une conique un polygone dont les côtés passent par autant de points fixes.

1069. Construire une conique tangente à trois droites et ayant un double contact avec une conique donnée.

1070. Trouver le lieu des milieux des cordes d'une conique issues d'un point fixe. — Généraliser par projection.

1071. Trouver l'enveloppe des cordes d'une conique qui ont leurs milieux sur une droite donnée. — Généraliser par projection.

1072. ABC étant un triangle circonscrit à une conique, et α, β, γ, les points de contact de BC, CA, AB, on joint un point quelconque P du plan aux sommets B et C; si l'on désigne par I et K les points où la corde $\beta\gamma$ rencontre respectivement CP et BP, les trois droites $P\alpha$, BI et CK concourent en un même point. Déduire de là le moyen de trouver le point de contact d'une tangente à une conique qui touche en des points donnés les côtés d'un angle donné.

1073. Si, sur les rayons menés d'une origine fixe O aux divers points d'un plan P on porte des longueurs proportionnelles aux valeurs inverses de ces rayons, les plans conduits perpendiculairement à ces droites par leurs extrémités passent tous par un même point p. Lorsque, l'origine O restant fixe, le plan P se déplace en passant sans cesse par un même point, le point p ne sort pas d'un certain plan.

1074. Une droite glisse sur trois droites fixes prises à volonté dans l'espace. — Quel est le lieu décrit par la trace de cette droite sur un plan fixe quelconque?

1075. La somme des angles d'un quadrilatère gauche est moindre que quatre angles droits.

1076. On peut couper un tétraèdre régulier suivant un carré. — Démontrer que le contour apparent du tétraèdre régulier projeté sur un

plan parallèle à une section carrée, est à la fois un carré et le contour apparent maximum du tétraèdre projeté sur un plan.

1077. Lorsqu'on projette orthogonalement un cube sur un plan perpendiculaire à une de ses diagonales, le contour apparent obtenu est à la fois un hexagone régulier partagé en trois losanges et le contour apparent maximum du cube projeté sur un plan.

1078. On peut projeter l'octaèdre régulier de manière à obtenir un contour apparent hexagonal régulier.

1079. Le centre de gravité du périmètre ou de l'aire d'un polygone régulier convexe d'un nombre impair de côtés, est le centre du polygone.

1080. Si deux systèmes de points ABCDE...., A'B'C'D'E'...., sont tels, que toute distance BD soit égale à la distance correspondante B'D', le système A'B'C'D'E'.... est superposable au système ABCDE.... ou à son symétrique.

1081. Si une figure occupe différentes positions dans l'espace, on peut toujours l'amener d'une position à une autre par une rotation autour d'un certain axe et par une translation suivant cet axe.

1082. Trouver l'aire latérale et le volume d'un tronc de cylindre.

1083. Si un cône de révolution est inscrit dans un angle trièdre formé par trois plans tangents, les plans menés par chaque génératrice de contact et l'arête opposée de l'angle trièdre se coupent suivant une même droite.

1084. Toute section d'un cône oblique à base circulaire, perpendiculaire au plan principal, appartient à un cône droit.

1085. Étant donnés trois points ou trois arcs tangents et un arc cyclique d'une conique sphérique, déterminer le pôle de cet arc.

1086. Étant donnés trois points et un arc cyclique d'une conique sphérique, déterminer le second arc cyclique de cette courbe.

1087. Étant donnés trois arcs tangents et un foyer d'une conique sphérique, déterminer le second foyer de cette courbe.

1088. Quelle est la surface polaire d'une conique par rapport à une sphère? — Examiner le cas particulier où la conique est un cercle. — (On nomme surface polaire d'une ligne l'enveloppe des plans polaires de ses divers points.)

1089. Si deux cônes du second ordre ont une ligne focale commune, ils se coupent suivant deux courbes planes.

1090. Quelle est la surface polaire d'une sphère par rapport à une sphère?

1091. Une conique tourne autour de son axe focal. Quelle est la section de la surface de révolution ainsi engendrée par un plan passant par un foyer de la conique donnée?

1092. Quelle est la projection d'une section plane d'une surface de révolution du second ordre, sur un plan perpendiculaire au rayon vecteur mené d'un foyer de la surface à l'extrémité du diamètre qui passe par le centre de la section?

1093. Circonscrire un tétraèdre à une surface de révolution du second ordre, dont un foyer est donné.

1094. Deux surfaces de révolution du second ordre, qui ont un foyer commun, se coupent suivant deux courbes planes; les plans de ces courbes et les deux plans directeurs forment un faisceau harmonique.

1095. D'un point de l'espace, on peut généralement mener six normales à une surface du second ordre; ces six droites sont sur un cône du second degré, qui passe par le centre de la surface et contient les trois axes principaux du cône circonscrit à la surface, qui a pour sommet le point donné.

1096. Les notations étant les mêmes que dans le théorème d'Euler (688), démontrer les inégalités :

$$6F - 12 \geq 2A \geq 3F - A + 6,$$
$$6S - 12 \geq 2A \geq 3S - A + 6,$$
$$4F - 8 \leq 2S \leq F + 4,$$
$$4S - 8 \leq 2F \leq S + 4.$$

1097. Le volume du parallélipipède construit sur trois génératrices quelconques de même système d'un hyperboloïde est constant.

1098. Inscrire dans une sphère donnée un polygone dont chaque côté passe par un point donné.

NOTES.

NOTES.

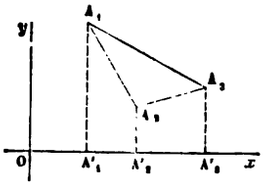
NOTE I.

SUR L'APPLICATION DES DÉTERMINANTS A LA GÉOMÉTRIE.

1. *Aire du triangle en fonction :* 1° *des coordonnées des sommets;* 2° *des longueurs des côtés.*

Soient Ox et Oy deux axes de coordonnées rectangulaires situés dans le plan du triangle $A_1A_2A_3$; x_1 et y_1, x_2 et y_2, x_3 et y_3, les coordonnées respectives des sommets A_1, A_2, A_3; et d_{12}, d_{23}, d_{31}, les carrés des longueurs des côtés A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1. L'aire S du triangle est l'excès

Fig. 624.



(*fig.* 624) du trapèze $A_1A_3A'_3A'_1$ sur la somme des trapèzes $A_1A_2A'_2A'_1$ et $A_2A_3A'_3A'_2$. On a donc

$$\begin{aligned} 2S &= (x_3 - x_1)(y_3 + y_1) - (x_2 - x_2)(y_3 + y_2) - (x_2 - x_1)(y_2 + y_1) \\ &= (x_2y_3 - x_2y_1) - (x_1y_3 - x_2y_1) + (x_1y_2 - x_2y_1), \end{aligned}$$

ou

$$(1) \qquad 2S = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

On peut mettre ce déterminant sous les deux formes suivantes :

$$2S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad 2S = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 \end{vmatrix};$$

en multipliant membre à membre, on trouve alors, d'après la règle de multiplication des déterminants,

$$4S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1^2+y_1^2 & x_2x_1+y_2y_1 & x_3x_1+y_3y_1 \\ 1 & x_1x_2+y_1y_2 & x_2^2+y_2^2 & x_3x_2+y_3y_2 \\ 1 & x_1x_3+y_1y_3 & x_2x_3+y_2y_3 & x_3^2+y_3^2 \end{vmatrix}.$$

Multiplions les trois dernières horizontales par -2, puis divisons la première verticale par -2; le déterminant sera multiplié par 4. Cela fait, aux trois dernières horizontales, ajoutons la première successivement multipliée par $x_1^2+y_1^2$, $x_2^2+y_2^2$, $x_3^2+y_3^2$, et de même, aux trois dernières verticales, ajoutons la première successivement multipliée par les mêmes facteurs; la valeur du déterminant ne sera pas altérée par ces dernières transformations, et si l'on se rappelle la formule bien connue

$$d_{ik} = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2,$$

on aura finalement

$$16S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{21} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & 0 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

2. *Volume de la pyramide triangulaire en fonction :* 1° *des coordonnées des sommets;* 2° *des longueurs des arêtes.*

Soient : ox, oy, oz, trois axes de coordonnées rectangulaires; (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4), les coordonnées des sommets A_1, A_2, A_3, A_4 : d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{23}, d_{24}, d_{34}, les carrés des longueurs des six arêtes.

La marche est absolument pareille à celle que nous avons suivie pour le triangle. En projetant les sommets sur le plan xoy, on verra que le volume du tétraèdre est la somme algébrique de troncs de prismes triangulaires dont les bases ou sections droites s'évalueront à l'aide de la for-

mule (1), et l'on obtiendra pour le volume V du tétraèdre

$$(3)\qquad 6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix};$$

puis, en opérant sur ce déterminant comme nous l'avons fait sur le déterminant (1), et observant que

$$d_{ik} = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2,$$

on trouvera

$$(4)\qquad 288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix}.$$

En égalant à zéro les déterminants (2) et (4), on obtient évidemment les *conditions pour que trois points soient en ligne droite ou pour que quatre points soient dans un même plan*. Les formules (2) et (4), abstraction faite de la notation des déterminants, ont été données par Euler, dans les *Mémoires de Pétersbourg*.

3. *Relation entre les distances mutuelles : 1° de quatre points situés sur un même cercle; 2° de cinq points situés sur une même sphère.*

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), les coordonnées rectangulaires des quatre points A_1, A_2, A_3, A_4; et $d_{12}, d_{13}, \ldots, d_{23}, \ldots$, les carrés de leurs distances mutuelles. Ces points étant sur un même cercle, on a, d'après la Géométrie analytique,

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + a + bx_1 + cy_1 &= 0, \\ x_2^2 + y_2^2 + a + bx_2 + cy_2 &= 0, \\ x_3^2 + y_3^2 + a + bx_3 + cy_3 &= 0, \\ x_4^2 + y_4^2 + a + bx_4 + cy_4 &= 0. \end{aligned}$$

On a, par suite, en éliminant a, b, c,

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 + y_2^2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 + y_3^2 & 1 & x_3 & y_3 \\ x_4^2 + y_4^2 & 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 + y_1^2 & -2x_1 & -2y_1 \\ 1 & x_2^2 + y_2^2 & -2x_2 & -2y_2 \\ 1 & x_3^2 + y_3^2 & -2x_3 & -2y_3 \\ 1 & x_4^2 + y_4^2 & -2x_4 & -2y_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Or, il suffit de multiplier ces deux derniers déterminants par la règle connue et d'égaler le résultat à zéro pour avoir la relation cherchée

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Un calcul tout à fait analogue donne

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} & d_{35} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 & d_{45} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

pour cinq points situés sur une même sphère.

La relation (5) revient au fond au théorème de Ptolémée (240); la relation (6) a été donnée sous une autre forme par Feuerbach. — Nous avons suivi la marche indiquée par M. Cayley dans le tome II du *Journal de Cambridge*.

En développant par rapport aux éléments de la première verticale le premier des déterminants considérés dans ce numéro, et désignant par O_1 l'origine des coordonnées, qui est d'ailleurs un point quelconque du plan du quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$, on a, eu égard à la formule (2), la relation

$$\overline{O_1A_1}^2(A_2A_3A_4) - \overline{O_1A_2}^2(A_3A_4A_1) + \overline{O_1A_3}^2(A_4A_1A_2) - \overline{O_1A_4}^2(A_1A_2A_3) = 0$$

qu'on énonce de la manière suivante : *Dans tout quadrilatère inscriptible, si on multiplie l'aire du triangle formé par trois des sommets par le carré de la distance du quatrième sommet à un point quelconque du plan, la somme des produits relatifs aux deux triangles séparés par une diagonale est égale à la somme des produits relatifs aux deux triangles séparés par l'autre diagonale.* Cette proposition, due à M. Luchterhandt (*Journal de Crelle*, t. XXIII), comprend comme cas particuliers les théorèmes (240, 242) relatifs au produit et au rapport des diagonales du quadrilatère inscriptible. Pour les en déduire, il suffit de remplacer l'aire de chaque triangle par le produit des trois côtés divisé par quatre fois le rayon du cercle circonscrit et de placer le point O_1, dans le premier cas à l'un des sommets du quadrilatère, dans le second cas au centre du cercle.

En éliminant les parenthèses $(A_2A_3A_4)$, ... entre l'équation précédente et les trois analogues que fourniraient trois autres points O_2, O_3, O_4 pris

à volonté dans le plan, on obtient une relation

$$\begin{vmatrix} \overline{O_1A_1}^2 & \overline{O_1A_2}^2 & \overline{O_1A_3}^2 & \overline{O_1A_4}^2 \\ \overline{O_2A_1}^2 & \overline{O_2A_2}^2 & \overline{O_2A_3}^2 & \overline{O_2A_4}^2 \\ \overline{O_3A_1}^2 & \overline{O_3A_2}^2 & \overline{O_3A_3}^2 & \overline{O_3A_4}^2 \\ \overline{O_4A_1}^2 & \overline{O_4A_2}^2 & \overline{O_4A_3}^2 & \overline{O_4A_4}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

entre les distances respectives de quatre points d'un cercle à quatre points quelconques de son plan. Cette relation comprend comme cas particulier la relation (5) qui, en outre, se trouve ainsi démontrée sans le secours de la règle de multiplication des déterminants (ANTOMARI, *Nouv. Ann.*, 1882).

4. *Relation entre les distances mutuelles de cinq points situés d'une manière quelconque dans l'espace.*

Il suffit d'égaler à zéro le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_5^2+y_5^2+z_5^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & 1 & -2x_1 & -2y_1 & -2z_1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_5^2+y_5^2+z_5^2 & 1 & -2x_5 & -2y_5 & -2z_5 & 0 \end{vmatrix},$$

pour obtenir la relation demandée, due à Lagrange,

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ 1 & d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} & d_{35} \\ 1 & d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 & d_{45} \\ 1 & d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En remplaçant, avant de les multiplier, dans chacun des deux déterminants, l'expression $x_i^2+y_i^2+z_i^2$, où i a les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, par $x_i^2+y_i^2+z_i^2-r_i^2$, on obtient la relation

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} & \delta_{15} \\ 1 & \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} & \delta_{25} \\ 1 & \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} & \delta_{35} \\ 1 & \delta_{41} & \delta_{42} & \delta_{43} & \delta_{44} & \delta_{45} \\ 1 & \delta_{51} & \delta_{52} & \delta_{53} & \delta_{54} & \delta_{55} \end{vmatrix} = 0,$$

dans laquelle δ_{ik} désigne la quantité $r_i^2 + r_k^2 - d_{ik}$, et qui est une généralisation de la formule précédente, puisqu'elle renferme, outre les distances mutuelles d_{ik} des cinq points, cinq nouvelles quantités r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, arbitraires.

5. *Rayons des sphères qui coupent quatre sphères données sous des angles donnés.*

Supposons que, des cinq points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, que nous venons de considérer, les quatre premiers soient les centres de quatre sphères dont les rayons r_1, r_2, r_3, r_4, sont donnés; désignons par ρ le rayon et par A_5 le centre d'une sphère qui coupe les quatre premières respectivement sous les angles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.

En faisant, dans la relation (8), les substitutions

$$r_5 = \rho,$$

$$\delta_{i5} = r_i^2 + \rho^2 - d_{i5}$$
$$= r_i^2 + \rho^2 - (r_i^2 + \rho^2 - 2\rho r_i \cos\varphi_i) = 2\rho r_i \cos\varphi_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

puis amenant au premier rang la dernière horizontale et la dernière verticale, préalablement divisées par ρ, et enfin divisant par 2 chaque horizontale, sauf la seconde, et multipliant par 2 la seconde verticale, on obtient pour déterminer ρ l'équation du second degré

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\rho} & r_1\cos\varphi_1 & r_2\cos\varphi_2 & r_3\cos\varphi_3 & r_4\cos\varphi_4 \\ \frac{1}{\rho} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1\cos\varphi_1 & 1 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ r_2\cos\varphi_2 & 1 & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ r_3\cos\varphi_3 & 1 & c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ r_4\cos\varphi_4 & 1 & c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

où c_{ik} désigne la quantité $\frac{1}{2}(r_i^2 + r_k^2 - d_{ik})$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

Cette équation ne change pas quand on y change simultanément les signes de r_1, r_2, r_3, r_4. D'après cela, à chaque combinaison de signes pour r_1, r_2, r_3, r_4, et à la combinaison opposée, répondent les deux racines de la même équation du second degré. En faisant varier les signes de r_1, r_2, r_3, r_4, on trouve les seize solutions du problème.

En procédant d'une manière analogue, on obtiendrait une équation donnant *les rayons des cercles coupant trois cercles* situés dans un même plan, *sous des angles respectivement donnés*. Cette équation est d'ailleurs celle qu'on obtient en supprimant dans le déterminant (9) la dernière horizontale et la dernière verticale; en faisant varier les signes, on aurait les huit solutions du problème groupées deux à deux.

L'équation (9), dans laquelle on remplace les cosinus par l'unité, donne les *rayons des sphères tangentes à quatre sphères données*, et celle qui en résulterait en supprimant la dernière horizontale et la dernière verticale donnerait pareillement les *rayons des cercles tangents à trois cercles donnés*.

Enfin, comme dernière application de cette relation (9), nous allons en déduire le *rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre*; il faut, dans ce cas, supposer $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$, et par suite $c_{ik} = -\frac{1}{2} d_{ik}$; l'équation devient

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 0 & 1 & d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 0 & 1 & d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ 0 & 1 & d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on déduit, en ajoutant à la deuxième horizontale la première multipliée par $\frac{1}{\rho}$ et ayant égard à la relation (6),

$$(10)\quad 576\,V^2\rho^2 = -\begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{14}d_{23} & d_{13}d_{24} \\ 1 & d_{14}d_{23} & 0 & d_{12}d_{34} \\ 1 & d_{13}d_{24} & d_{12}d_{34} & 0 \end{vmatrix},$$

En comparant le dernier déterminant au déterminant (2) et désignant par T l'aire du triangle dont les côtés seraient égaux aux produits des couples d'arêtes opposées du tétraèdre, on voit qu'on a définitivement pour le rayon de la sphère circonscrite.

$$\rho = \frac{T}{6V}.$$

Cette expression remarquable est due à Crelle (*Sammlung mathematischer Aufsätze*).

Ces notions doivent suffire pour inspirer au lecteur le désir de lire les Mémoires originaux sur l'application des déterminants à la Géométrie. Les travaux faits sur ce sujet sont fort nombreux : nous citerons les Mémoires de MM. Joachimsthal (*Journal de Crelle*, t. XL), Cayley (*Journal de Cambridge*, t. II), Brioschi (*Journal de Crelle*, t. L), Kronecker (*Journal de Crelle*, t. LXXII), Darboux (*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. I), Bauer (*Journal de Schlömilch*, t. V, et *Mémoires de l'Académie de Munich* pour 1873), Fröbenius (*Journal de Crelle*, t. LXXIX).

NOTE II.

SUR LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

La théorie des parallèles n'a fait aucun progrès depuis Euclide jusqu'au commencement de notre siècle. Tous les efforts pour démontrer le *postulatum* d'Euclide ou une proposition équivalente étaient restés infructueux, lorsque Lobattcheffsky en 1829 et Bolyai en 1832, changeant résolument de voie, conçurent et exécutèrent séparément le projet hardi de supposer que la proposition à démontrer n'était pas vraie et de constituer un nouveau système de géométrie non contradictoire, en poussant jusqu'à ses dernières limites le développement de leur hypothèse. Gauss qui, par ses propres méditations, avait obtenu les mêmes résultats dès 1792, sans toutefois avoir rien publié sur ce sujet, assura par son patronage le succès de l'œuvre de Lobattcheffsky qui, écrivait-il à Schumacher, « avait traité la matière de main de maître ». Depuis lors un grand nombre de géomètres, parmi lesquels il faut surtout citer Riemann et Beltrami, ont considérablement agrandi le champ de ces spéculations qui, on ne saurait le méconnaître, ont jeté une vive lumière sur la véritable origine des vérités géométriques.

L'analyse de ces nombreux travaux (1) serait fort longue; nous nous proposons ici uniquement d'en faciliter la lecture en exposant les principes fondamentaux de cette partie de la Science qui, après avoir été appelée successivement *Géométrie astrale*, *Géométrie imaginaire*, *Pangéométrie*, a reçu définitivement le nom de *Géométrie non euclidienne*.

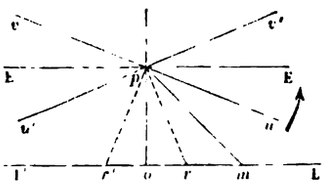
---

(1) LOBATTCHEFFSKY, *Nouveaux principes de Géométrie* (*Mémoires de l'Université de Kasan et Courrier de Kasan*, 1826, 1829, 1836-1838); *Géométrie imaginaire* (J. de Crelle, 1837); *Études géométriques sur la théorie des parallèles* (Berlin, 1840); *Pangéométrie* (Kasan, 1855). — BOLYAI, *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens* (Maros-Vasarhély, 1832). — RIEMANN, *Sur les hypothèses de la Géométrie* (Académie de Göttingue, 1867). — HELMHOLTZ, *Sur les faits fondamentaux de la Géométrie* (Heidelberg, 1868). — BATTAGLINI, *Sur la Géométrie de Lobattcheffsky* (*Giornale*; Naples, 1868). — BELTRAMI, *Interprétation de la Géométrie non euclidienne* (Naples, 1868); *Sur les espaces de courbure constante* (Milan, 1868). — KLEIN, *Sur la Géométrie non euclidienne* (*Math. Annalen*, 1871). — DE TILLY, *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique* (*Mémoires de l'Académie de Bordeaux*, 1879). Plusieurs de ces Mémoires ont été traduits en français par M. Houël.

I.

1° Considérons dans un plan un point p et une droite LL′; soient po la perpendiculaire abaissée de p sur LL′ et EpE′ la perpendiculaire élevée par p sur po (*fig.* 625). On sait (37) que cette perpendiculaire ne rencontre pas LL′. Mais cette droite est-elle, parmi celles qui passent par p, la seule qui jouisse de cette propriété? C'est ce que l'on admettait depuis Euclide. Cependant tout ce qu'on peut affirmer, et c'est là le point de départ de Lobattcheffsky, c'est que, si une droite illimitée tourne autour du point p dans le sens de la flèche, depuis la position po jusqu'à la position E′pE, elle passera nécessairement par une position vpu, telle que toutes les droites contenant le point p et situées dans l'angle upE (et dans son opposé) ne coupent pas LL′, tandis que toutes les droites situées dans l'angle opu (et dans son opposé) coupent oL.

Fig. 625.



D'après cela, en désignant par $v'pu'$ la symétrique de vpu par rapport à po, on voit que toutes les droites menées par le point p dans le plan peuvent être rangées par rapport à LL′ en deux catégories suivant qu'elles coupent LL′ ou qu'elles ne la rencontrent pas; les *sécantes* sont comprises dans les angles upu' et vpv'; les *non-sécantes* dans les angles upv' et vpu'. Les deux lignes de démarcation uv et $u'v'$ sont dites parallèles à LL′ relativement au point p. Ainsi, par chaque point p d'un plan, on peut mener à toute droite LL′ de ce plan deux parallèles, l'une vu pour le côté oL de la droite, l'autre $v'u'$ pour l'autre côté oL′. On désigne par *angle de parallélisme* relatif au point p l'angle opu ou son égal opu'.

2° Ce qui distingue une parallèle vu ou $v'u'$ d'une non-sécante quelconque, c'est que la parallèle devient sécante dès qu'on la dévie en diminuant d'aussi peu qu'on veut son inclinaison opu ou opu' sur la perpendiculaire po.

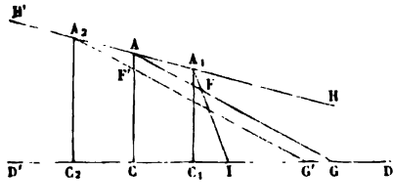
Dans le cas où l'angle de parallélisme est droit, la classe des droites non-sécantes disparaît et les deux parallèles se réduisent à une seule EpE′.

3° Voici maintenant deux propositions qui sont les compléments indispensables de la définition des parallèles.

Une droite conserve le caractère du parallélisme en tous ses points. — En d'autres termes, si H'H est parallèle à D'D relativement au point A, elle est encore parallèle à D'D relativement à tout autre A_1 ou A_2 de ses points (*fig.* 626).

En effet, supposons d'abord un point A_1 situé sur la partie AH de H'H qui fait avec la perpendiculaire AC un angle CAH égal à l'angle de parallélisme. Abaissons A_1C_1 perpendiculaire sur DD', menons A_1F dans l'intérieur de l'angle C_1A_1H, et prenons sur cette droite un point F aussi voisin qu'on pourra de A_1; la droite AF ira couper CD en un certain point G, et l'on aura un triangle ACG dont le contour étant rencontré

Fig. 626.



une première fois en F par la droite A_1F devra être rencontré une deuxième fois par la même droite; or A_1F, d'après sa construction, ne peut couper le côté AC, elle ne peut pas non plus avoir un second point commun avec le côté AG; donc elle coupe le côté CG, et, par suite, A_1H est parallèle à D'D relativement au point A_1, puisque toute droite A_1F, située dans l'angle C_1A_1H, rencontre D'D, si petit que soit l'angle HA_1F.

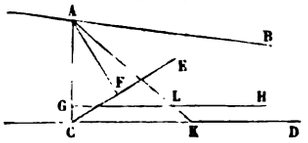
Considérons, en second lieu, un point A_2 situé sur AH', et soit A_2C_2 la perpendiculaire abaissée de A_2 sur D'D; prenons sur AC un point F' aussi voisin de A qu'on voudra, et menons AF faisant avec AH un angle HAF égal à HA_2F'; la droite AF ira couper CD en un certain point G, et la droite A_2F' coupant une première fois, en F', le contour du triangle ACG, devra couper ce contour une seconde fois. Or elle ne peut couper une seconde fois le côté AC; d'autre part, puisque les angles correspondants HAF, HA_2F' sont égaux, A_2F' ne peut rencontrer AF (1); donc A_2F' coupe le côté CD; etc.

(1) Nous admettons ici que, si deux droites AB, CD (*fig.* 43), forment avec une troisième FE des angles correspondants FGB, FHD, égaux, ces deux droites ne peuvent se rencontrer. La démonstration de ce théorème, donnée au n° 64, dépend du postulatum d'Euclide; mais on peut démontrer le fait indépendamment de tout postulatum. En effet, on peut, par une rotation autour du milieu O de GH, amener la figure BGHD sur la figure CHGA, de façon que GB

Le parallélisme de deux droites est réciproque. — En d'autres termes, si AB est parallèle à CD (*fig.* 627), CD est parallèle à AB.

En effet, soit AC une perpendiculaire sur CD; menons dans l'angle ACD une droite CE faisant avec CD un angle DCE aussi petit qu'on voudra; enfin abaissons AF perpendiculaire sur CE; AF sera moindre que AC; prenons sur AC une longueur AG = AF et faisons tourner la figure BAFE autour de A, de façon que AF vienne sur AG; soient GH et AK les positions que prennent FE et AB; AK coupera CD quelque part en K, et l'on aura un triangle ACK dont le contour étant rencontré une première fois, en G, par GH, devra être rencontré une deuxième fois par cette même droite; mais GH étant comme CD perpendiculaire à AC ne peut rencontrer CD; donc GH coupe AK en un certain point L. Donc, en ramenant le triangle LAG en sa position primitive, c'est-à-dire en le faisant tourner autour de A de façon que AG vienne sur AF, AK sur AB et GH sur

Fig. 627.



FE, on voit que CF doit couper AB, quelque petit que soit l'angle DCE; donc (2°) CD est parallèle à AB.

II.

1° *Dans tout triangle rectiligne* ABC, *la somme des angles ne peut surpasser deux angles droits.*

En effet, soit A le plus petit angle du triangle; en prolongeant la médiane AI d'une quantité IE égale à elle-même et joignant EC, on forme un triangle ACE dans lequel (on le voit sans peine) la somme des angles est la même que dans le triangle primitif et la somme des deux plus petits angles est égale à A. Le plus petit angle du nouveau triangle est donc au plus égal à $\frac{1}{2}$ A. En opérant de même sur ce second triangle, puis sur le suivant, etc., on obtient une suite de triangles, dont la somme des angles reste la même et dont le plus petit angle est successivement moindre que $\frac{A}{2}, \frac{A}{4}, \frac{A}{8}, \cdots$ et, par suite, peut devenir aussi petit qu'on

---

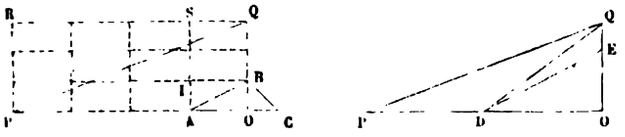
recouvre HC et que DH recouvre GA; si donc GB et HD se rencontraient, HC et GA se rencontreraient aussi, et les deux droites AB, CD auraient deux points communs sans coïncider.

veut. Or, si la somme des angles du triangle primitif surpassait deux droits d'une certaine quantité α, en opérant sur ce triangle, comme nous venons de le dire, on obtiendrait, après un nombre suffisant d'opérations, un triangle ayant son plus petit angle inférieur à α; le triangle suivant aurait à la fois la somme de ses trois angles égale à $2R + \alpha$, R désignant un angle droit, et la somme des deux plus petits angles moindre que α; le troisième angle de ce triangle surpasserait donc $2R$, ce qui est absurde.

2° *Si dans un triangle rectiligne* ABC *la somme des angles est égale à deux angles droits, il en est de même pour tout autre triangle* (*fig.* 628).

En effet, deux au moins des angles du triangle ABC sont alors aigus; soient, par exemple, A et C, ces deux angles; la perpendiculaire BO abaissée du sommet B sur AC partage le triangle ABC en deux triangles rectangles ABO, CBO dans chacun desquels la somme des angles est égale à $2R$, sans quoi la somme totale des angles de ces deux triangles serait

Fig. 628.



(1°) inférieure à $4R$ et, par suite, en retranchant les deux angles en O, qui sont droits, la somme des angles du triangle proposé ABC serait inférieure à $2R$. Il suit de là que, si l'on construit sur AB un triangle BAI, égal à ABO, on aura un quadrilatère AOBI, dont les côtés opposés sont égaux deux à deux et dont les angles sont droits. En superposant q quadrilatères égaux à celui-là et juxtaposant p figures égales à la figure AOQS, ainsi obtenue, on obtient un quadrilatère POQR, dont tous les angles sont droits et dont les côtés opposés, égaux deux à deux, peuvent devenir aussi grands qu'on veut, en prenant les nombres p et q assez grands. Ce quadrilatère sera partagé par la diagonale PQ en deux triangles rectangles égaux et l'on verra, comme ci-dessus, que la somme des angles de chacun de ces triangles est égale à $2R$. Donc on peut construire un triangle rectangle POQ, dans lequel la somme des angles est égale à $2R$ et assez grand pour contenir dans son intérieur tout triangle rectangle donné DOE, lorsqu'on aura fait coïncider les angles droits de ces triangles. Or la droite QD décompose POQ en deux triangles QDP, QDO, dans chacun desquels la somme des angles est égale à $2R$, sans quoi la somme des angles du triangle total POQ serait moindre que $2R$; de même, la droite DE partage QDO en deux triangles DEO, DEQ, dans chacun desquels la

somme des angles est égale à 2R, sans quoi la somme des angles du triangle total QDO serait inférieure à 2R. Il est donc démontré que, par suite de l'hypothèse, la somme des angles serait égale à 2R dans un triangle rectangle quelconque DOE; il en serait de même, par suite, pour tout triangle rectiligne, puisqu'un tel triangle peut toujours être décomposé en deux triangles rectangles.

3° *Par un point donné* A, *extérieur à une droite* BC, *on peut toujours mener une droite faisant avec la première un angle aussi petit qu'on veut* (*fig.* 629).

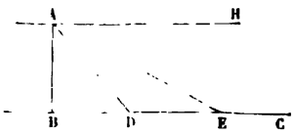
En effet, soit AB perpendiculaire sur BC, D un point pris à volonté sur BC, et DE une longueur égale à AD et portée sur BC à la suite de BD. La somme des angles du triangle ADE ne pouvant surpasser 2R, on a, puisque ce triangle est isocèle,

$$2\,\mathrm{AEB} + (2\mathrm{R} - \mathrm{ADB}) \leqq 2\mathrm{R}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{AEB} \leqq \tfrac{1}{2}\,\mathrm{ADB}.$$

Ainsi, étant donnée une droite AD, coupant BC sous un certain angle, on peut toujours en trouver une autre AE, faisant avec BC un angle au plus égal à la moitié du précédent; en opérant sur cette nouvelle droite comme sur la première et continuant ainsi, on parviendra à une droite faisant avec BC un angle aussi petit qu'on voudra.

4° *Si deux perpendiculaires* AH, BC *à une même droite* AB *sont parallèles, la somme des angles est égale à deux angles droits dans tout triangle rectiligne* (*fig.* 629).

Fig. 629.



En effet, menons dans l'angle BAH une droite AE, faisant avec AH un angle HAE aussi petit qu'on voudra; cette droite AE coupera BC, et l'on peut supposer, d'après le numéro précédent, que l'angle AEB, sous lequel AE coupe BC, soit aussi petit qu'on veut. Cela posé, D étant pris à volonté entre B et E, menons AD et désignons respectivement par $2\mathrm{R} - \alpha$, $2\mathrm{R} - \beta$ les sommes des angles dans les triangles ABD, ADE. La somme des angles du triangle ABE sera $2\mathrm{R} - \alpha - \beta$; on aura donc

$$2\mathrm{R} - \alpha - \beta = \mathrm{R} + \mathrm{AEB} + (\mathrm{R} - \mathrm{HAE}),$$

d'où

$$\alpha + \beta = \mathrm{HAE} - \mathrm{AEB};$$

mais, chacune des parties du second membre pouvant devenir moindre

que toute quantité donnée, on a $\alpha + \beta = 0$, et, par suite, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, puisque α et β ne peuvent être négatifs. C. Q. F. D.

5° Il résulte des propositions précédentes que deux hypothèses sont seules possibles :

Ou bien, dans tous les triangles rectilignes, la somme des angles est égale à deux angles droits ; alors l'angle de parallélisme est toujours droit, et par un point quelconque on ne peut mener qu'une parallèle à une droite.

Ou bien, dans tous les triangles rectilignes, la somme des angles est inférieure à deux angles droits ; alors, par un point quelconque, on peut mener deux parallèles à une droite, et l'angle de parallélisme, toujours aigu, varie avec la distance du point à la droite.

La première hypothèse sert de fondement à la Géométrie ordinaire ou euclidienne. La seconde peut être également admise sans conduire à aucune contradiction; elle est la base de la Géométrie non euclidienne que Lobattcheffsky a établie, jusqu'au développement complet des équations entre les côtés et les angles d'un triangle, soit rectiligne, soit sphérique. compose l'angle C et le côté c, on aura, en vertu des formules (15), marche indiquée par M. Battaglini dans le Mémoire cité plus haut. Cela nous permettra d'ailleurs de retrouver d'abord par une autre voie la conception fondamentale de Lobattscheffsky relativement aux parallèles.

III.

1° Pour ne pas laisser supposer de pétition de principe, il convient de montrer d'abord qu'on peut établir la théorie des fonctions circulaires indépendamment de toute considération géométrique. Nous le ferons très brièvement en renvoyant pour les détails aux Traités d'Analyse.

On *définit* les fonctions circulaires d'une variable z, réelle ou imaginaire, par les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} \cos z = 1 - \dfrac{z^2}{1.2} + \dfrac{z^4}{1.2.3.4} - \dots, \\ \sin z = \dfrac{z}{1} - \dfrac{z^3}{1.2.3} + \dfrac{z^5}{1.2.3.4.5} - \dots, \\ \operatorname{tang} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}; \end{cases}$$

d'où résultent, en vertu de l'équation

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \dots,$$

qui sert de *définition* à la fonction exponentielle e^z, la formule

$$(2)\qquad e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

et, par suite, les expressions

$$(3)\qquad \begin{cases} \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \\ \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \\ i \operatorname{tang} z = \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}. \end{cases}$$

On *définit* en outre le nombre π, indépendamment de toute interprétation géométrique, comme étant la plus petite racine positive de l'équation $e^{iz} = -1$; on a donc

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i,$$

d'où l'on voit, à l'aide de la formule (2), que les racines des équations $\cos z = 0$ et $\sin z = 0$ sont, pour la première, les multiples impairs, et pour la deuxième, les multiples pairs, d'ailleurs positifs ou négatifs, de $\frac{\pi}{2}$. On conclut de là les expressions

$$\cos z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{16\pi^2}\right)\cdots,$$
$$\sin z = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right)\cdots,$$

dont la dernière donne, pour $z = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots}, \quad \text{d'où} \quad \pi = 3,141592\ldots.$$

Dès lors, les relations (3) donnent immédiatement les expressions connues du sinus, du cosinus et de la tangente d'une somme $x + y$, les relations fondamentales

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right), \quad \cot z = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - z\right),$$

et d'une manière générale toutes les formules de la théorie des fonctions circulaires.

De la relation $e^{i\pi} = -1$, on déduit $e^{2i\pi} = 1$ et, par suite, $e^{i(z+2\pi)} = e^{iz}$. La fonction exponentielle e^{iz} admet donc la période 2π, et il résulte alors des formules (3) que $\sin z$ et $\cos z$ admettent cette même période et que $\operatorname{tang} z$ admet la période π.

La fonction $u = e^z$ est une fonction uniforme de z, en d'autres termes, à chaque valeur de z répond une valeur unique de u. Mais la réciproque n'est pas vraie ; d'après la théorie des logarithmes, à une valeur réelle ou

imaginaire de u, répondent pour z une infinité de valeurs données par la formule

$$z = \log\rho + (\omega + 2n\pi)i, \tag{4}$$

ρ et ω désignant le module et l'argument de u, et la caractéristique *log* le logarithme népérien arithmétique. Toutefois, si l'on convient (ce que nous ferons toujours ici) de se borner à celle de ces valeurs que Cauchy a appelée *valeur principale* et qui n'est autre que celle qui résulte de la formule précédente dans l'hypothèse où l'on prend $n = 0$ et ω compris entre $-\pi$ et π, on obtient ainsi une fonction bien déterminée

$$z = \log\rho + \omega i,$$

c'est-à-dire telle que, à chaque valeur de u, ne répond qu'une valeur de z.

Enfin, pour rendre les formules plus claires et plus mnémoniques, nous introduirons les fonctions $C(z)$, $S(z)$, $T(z)$, qu'on nomme *fonctions hyperboliques relatives à la base k* et qui sont définies par les relations

$$\left\{\begin{aligned} C(z) &= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{z}{k}} + e^{-\frac{z}{k}}\right), \\ S(z) &= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{z}{k}} - e^{-\frac{z}{k}}\right), \\ T(z) &= \frac{S(z)}{C(z)} = \frac{e^{\frac{z}{k}} - e^{-\frac{z}{k}}}{e^{\frac{z}{k}} + e^{-\frac{z}{k}}}; \end{aligned}\right. \tag{5}$$

d'où l'on déduit immédiatement les suivantes :

$$C(z)^2 - S(z)^2 = 1,$$
$$S(-z) = -S(z), \quad C(-z) = C(z), \quad T(-z) = -T(z),$$
$$S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x).$$
$$C(x+y) = C(x)C(y) + S(z)S(y),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Les fonctions hyperboliques n'ont qu'une période imaginaire.

2° Cela posé, soient (*fig.* 625), dans un plan, une droite L, un point p extérieur à cette droite, et o le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite; m désignant un point quelconque de la droite L, et z étant la mesure du segment om par rapport à une unité de longueur arbitraire, à chaque position de m répondra une valeur unique $T(z)$; et réciproquement à chaque valeur de $T(z)$ répondra une position unique de m, si l'on convient, comme nous l'avons dit, de ne considérer que la valeur principale des logarithmes.

Imaginons maintenant une droite pm tournant autour du point p, et désignons par θ la mesure de l'angle opm, en prenant pour unité angulaire la $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\text{ième}}$ partie d'un angle droit. A chaque position de la droite pm répondra une valeur unique de $\operatorname{tang}\theta$; et, inversement, à chaque valeur de $\operatorname{tang}\theta$ répondra une position unique de la droite, car, lorsque la droite reprend la même position après avoir tourné de deux angles droits, θ a augmenté de la valeur numérique de deux angles droits, c'est-à-dire de π d'après l'unité angulaire adoptée, et par suite $\operatorname{tang}\theta$ reprend la même valeur.

Or, dans chacune de ses positions, la droite pm, tournant autour de p, coupe la droite L en un point unique m (réel ou imaginaire). Donc les fonctions $T(z)$ et $\operatorname{tang}\theta$ sont telles qu'à chaque valeur de l'une répond une valeur unique et bien déterminée de l'autre, ce qui, d'après la théorie des fonctions, exige qu'il existe entre elles une relation de la forme

$$AT(z)\operatorname{tang}\theta + BT(z) + C\operatorname{tang}\theta + D = 0.$$

On voit immédiatement que D est nul, puisque, lorsque le point m est à l'origine o, z et θ et, par suite, $T(z)$ et $\operatorname{tang}\theta$ s'annulent simultanément. D'autre part, soient r un point pris à volonté sur L, z_0 son abscisse or, et θ_0 l'angle opr; en appliquant successivement la formule précédente, au cas où le point m est d'abord en r, puis au point r' symétrique de r par rapport à l'origine, on a

$$AT(z_0)\operatorname{tang}\theta_0 + BT(z_0) + C\operatorname{tang}\theta_0 = 0,$$
$$AT(z_0)\operatorname{tang}\theta_0 - BT(z_0) - C\operatorname{tang}\theta_0 = 0;$$

d'où l'on conclut, par addition et soustraction,

$$A = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{C}{B} = \frac{T(z_0)}{\operatorname{tang}\theta_0},$$

de sorte que la relation entre $T(z)$ et $\operatorname{tang}\theta$ prend la forme

$$\frac{T(z)}{\operatorname{tang}\theta} = \frac{T(z_0)}{\operatorname{tang}\theta_0} = \text{const.},$$

ou bien

$$T(z) = \frac{\operatorname{tang}\theta}{\operatorname{tang}\Delta}, \tag{6}$$

en posant

$$\operatorname{tang}\Delta = \frac{\operatorname{tang}\theta_0}{T(z_0)}. \tag{7}$$

La signification géométrique de Δ est remarquable, il résulte des formules (5) que $T(z)$ est égal à $+1$ pour $z = +\infty$ et à -1 pour $z = -\infty$.

Donc Δ et $-\Delta$ sont les valeurs de θ pour $z = +\infty$ et $z = -\infty$, d'où l'on conclut que : *par un point p extérieur à une droite* L, *on peut mener deux droites pu et pu' rencontrant* L *à l'infini;* ces deux droites forment avec la perpendiculaire *po*, de part et d'autre, un angle Δ donné par la formule (7).

En général, si l'on considère une droite quelconque *pm* passant par *p* et définie par l'angle $opm = \theta$, on aura l'abscisse z du point m où elle coupe L en résolvant, par rapport à z, l'équation (6), c'est-à-dire l'équation

$$\frac{e^{\frac{z}{k}} - e^{-\frac{z}{k}}}{e^{\frac{z}{k}} + e^{-\frac{z}{k}}} = \frac{\operatorname{tang}\theta}{\operatorname{tang}\Delta},$$

qui donne, pour $\theta < \Delta$, la valeur réelle

$$z = \frac{k}{2} \log \frac{\operatorname{tang}\Delta + \operatorname{tang}\theta}{\operatorname{tang}\Delta - \operatorname{tang}\theta},$$

et, pour $\theta > \Delta$, la valeur imaginaire

$$Z = \frac{k}{2} \log \frac{\operatorname{tang}\theta + \operatorname{tang}\Delta}{\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\Delta} + \frac{k}{2} i\pi.$$

On retombe ainsi sur la conception fondamentale de Lobattcheffsky : les droites passant par *p* se divisent en deux classes, les *sécantes* (situées dans l'angle *upu'*) et les *non-sécantes* (extérieures à cet angle), séparées les unes des autres par deux parallèles *pu* et *pu'*.

Δ est l'*angle de parallélisme* relatif au point *p*; la formule (7) montre qu'il dépend de la distance $\delta = po$. Nous poserons

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\Delta} = \varphi(\delta),$$

et la formule fondamentale (6) deviendra

$$T(z) = \varphi(\delta) \operatorname{tang}\theta. \tag{8}$$

La même formule (7) montre d'ailleurs que Δ devient droit, quel que soit δ, lorsque $T(z_0) = 0$, c'est-à-dire en vertu de la dernière formule (5) lorsque $k = \infty$; alors les non-sécantes disparaissent et la parallèle est unique; c'est le cas de la Géométrie euclidienne; la formule fondamentale (6) doit alors être remplacée par

$$z = \frac{z_0}{\operatorname{tang}\theta_0} \operatorname{tang}\theta,$$

attendu que le rapport $\frac{T(z)}{T(z_0)}$ a pour limite $\frac{z}{z_0}$ lorsque le paramètre k devient infini.

IV.

1° Considérons d'abord un triangle ABC, rectangle en C; nous désignerons comme à l'ordinaire ses angles par A, B, C, et les côtés opposés respectivement par a, b, c.

On aura, en vertu de la formule (8),

$$(9) \qquad T(a) = \varphi(b)\tang A, \quad T(b) = \varphi(a)\tang B;$$

d'où

$$(10) \quad \begin{cases} \sin A = \dfrac{T(a)}{\sqrt{T(a)^2 + \varphi(b)^2}} = \dfrac{S(a)}{\sqrt{S(a)^2 + \varphi(b)^2 + S(a)^2\varphi(b)^2}}, \\ \sin B = \dfrac{T(b)}{\sqrt{T(b)^2 + \varphi(a)^2}} = \dfrac{S(b)}{\sqrt{S(b)^2 + \varphi(a)^2 + S(b)^2\varphi(a)^2}}. \end{cases}$$

Mais, quel que soit C, $\sin A = 0$ entraîne $a = 0$, $\sin B = 0$ entraîne $b = 0$, et $\sin A = 1$ entraîne $a = c$, $\sin B = 1$ entraîne $b = c$; $\sin A$ et $\sin B$ doivent donc être de la forme

$$\sin A = \frac{f(a)}{f(c)}, \quad \sin B = \frac{f(b)}{f(c)},$$

et comme c, et par suite $f(c)$, doit être une fonction symétrique de a et de b, il faut, pour satisfaire à ces conditions, prendre

$$(11) \qquad \varphi(a) = T(a) = f(a), \quad \varphi(b) = T(b) = f(b),$$

ou bien

$$(12) \qquad \varphi(a) = S(a) = f(a), \quad \varphi(b) = S(b) = f(b).$$

Les relations (11) *répondent à la Géométrie euclidienne.* — En effet, de ces équations combinées avec (9) et (10), on déduit d'abord

$$(13) \quad \begin{cases} \sin A = \cos B = \dfrac{T(a)}{T(c)}, \\ \sin B = \cos A = \dfrac{T(b)}{T(a)}, \\ T(c)^2 = T(a)^2 + T(b)^2. \end{cases}$$

Puis, si l'on désigne par α et β les segments, respectivement adjacents à A et B, que la perpendiculaire abaissée du sommet C de l'angle droit détermine sur le côté opposé c, on aura, en vertu de ces relations (13),

$$T(\alpha) = T(b)\cos A = \frac{T(b)^2}{T(c)}, \quad T(\beta) = T(a)\cos B = \frac{T(a)^2}{T(c)},$$

$$T(c) = T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta).$$

Cette dernière équation entraîne

$$S(\alpha)\,S(\beta) = 0,$$

ou, en vertu de (5),

$$\left(\frac{\alpha}{k} + \frac{1}{1.2.3}\frac{\alpha^3}{k^3} + \dots\right)\left(\frac{\beta}{k} + \frac{1}{1.2.3}\frac{\beta^3}{k^3} + \dots\right) = 0,$$

et, par suite, $k = \infty$. D'ailleurs, pour $k = \infty$, le rapport $\frac{T(x)}{T(y)}$ se réduisant à $\frac{x}{y}$, les formules (13) deviennent

$$(14) \qquad \sin A = \cos B = \frac{a}{c}, \quad \sin B = \cos A = \frac{b}{a}, \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

On reconnaît les formules de la Trigonométrie plane ordinaire.

Les relations (12) *répondent à la Géométrie non euclidienne.* — Combinées avec (9) et (10), elles donnent

$$(15) \quad \begin{cases} \sin A = \dfrac{S(a)}{S(c)}, \quad \sin B = \dfrac{S(b)}{S(c)}, \quad \cos A = \dfrac{T(b)}{T(c)}, \quad \cos B = \dfrac{T(a)}{T(c)}, \\ C(c) = C(a)\,C(b) = \dfrac{1}{\operatorname{tang} A \operatorname{tang} B}, \\ C(a) = \dfrac{\cos A}{\sin B}, \quad C(b) = \dfrac{\cos B}{\sin A}, \quad \operatorname{tang} B = \dfrac{T(a)}{S(b)}, \quad \operatorname{tang} B = \dfrac{T(b)}{S(a)}. \end{cases}$$

Remarquons que, d'après (12), on a

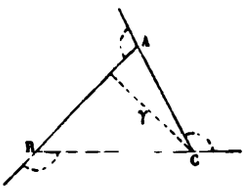
$$\varphi(\delta) = S(\delta),$$

et que, par suite, les fonctions circulaires de l'angle de parallélisme Δ ont pour expression

$$(16) \qquad \operatorname{tang}\Delta = \frac{1}{S(\delta)}, \quad \sin\Delta = \frac{1}{C(\delta)}, \quad \cos\Delta = T(\delta).$$

2° Considérons maintenant un triangle rectiligne quelconque ABC,

Fig. 630.



et supposons qu'on parcoure son contour dans le sens ABC : soient alors

a, b, c les mesures des côtés, et A, B, C les angles *extérieurs*, comme l'indique la *fig.* 630. γ étant la perpendiculaire abaissée de C sur AB, et (C_α, C_β), (c_α, c_β) les parties dans lesquelles cette perpendiculaire décompose l'angle C et le coté c, on aura, en vertu des formules (15),

$$\sin A\,S(b) = \sin B\,S(a) = S(\gamma),$$

$$\operatorname{tang} C_\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tang} A\,C(b)}, \quad \operatorname{tang} C_\beta = -\frac{1}{\operatorname{tang} B\,C(a)},$$

$$\operatorname{tang}(C_\alpha + C_\beta) = -\operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} A\,C(b) + \operatorname{tang} B\,C(a)}{1 - \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B\,C(a)C(b)},$$

$$-\operatorname{tang}(c_\alpha + c_\beta) = T(c) = \frac{T(a)\cos B + T(b)\cos A}{1 + T(a)T(b)\cos A\cos B};$$

d'où l'on tire les relations

$$\frac{S(a)}{\sin A} = \frac{S(b)}{\sin B},$$

$$\operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} A}{C(a)} + \frac{\operatorname{tang} B}{C(b)} + \frac{\operatorname{tang} C}{C(a)C(b)},$$

$$-T(a)T(b)T(c) = \frac{T(a)}{\cos A} + \frac{T(b)}{\cos B} + \frac{T(a)}{\cos A\cos B},$$

qui, combinées avec leurs analogues, donnent enfin

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{S(a)^2}{\sin^2 A} = \dfrac{S(b)^2}{\sin^2 B} = \dfrac{S(c)^2}{\sin^2 C} \\ \qquad = \dfrac{1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C} \\ \qquad = \dfrac{S(a)^2 S(b)^2 S(c)^2}{1 - C(a)^2 - C(b)^2 - C(c)^2 + 2C(a)C(b)C(c)}, \\ C(a) = C(b)C(c) + S(b)S(c)\cos A, \\ C(b) = C(c)C(a) + S(c)S(a)\cos B, \\ C(c) = C(a)C(b) + S(a)S(b)\cos C; \\ \cos A = \cos B\cos C - \sin B\sin C\,C(a), \\ \cos B = \cos C\cos A - \sin C\sin A\,C(b), \\ \cos C = \cos A\cos B - \sin A\sin B\,C(c). \end{cases}$$

Telles sont les formules de la Trigonométrie rectiligne non euclidienne.

V.

Les formules (17) donnent lieu à plusieurs observations :

1° *Elles se réduisent aux formules de la Trigonométrie plane ordinaire*

lorsque les côtés du triangle considéré sont infiniment petits. En effet, si l'on remplace les fonctions S et C par leurs valeurs,

$$S(z) = \frac{z}{k} + \frac{1}{1.2.3}\frac{z^3}{k^3} + \ldots, \quad C(z) = 1 - \frac{1}{1.2}\frac{z^2}{k^2} + \ldots,$$

on trouve : pour le premier groupe,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

et

$$1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 0;$$

pour le deuxième, la formule

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$

et ses analogues; enfin, pour le troisième,

$$\cos A = \cos(B + C)$$

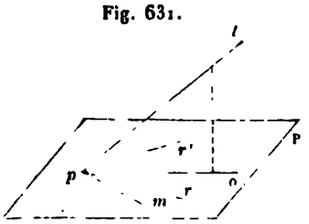
et ses analogues.

2° *La Trigonométrie sphérique est aussi indépendante du postulatum d'Euclide;* elle reste la même, que la somme des angles d'un triangle rectiligne soit égale ou inférieure à deux angles droits.

Au point où nous en sommes, quelques mots suffiront pour le montrer.

Considérons (*fig.* 631) un faisceau de droites *pm* issues d'un point *p* dans un plan P, et une droite *pl* extérieure à ce plan; *po* étant la projection de *pl* sur le plan P, désignons par θ l'angle variable *opm*, et par V le dièdre correspondant formé par les plans *lpo*, *lpm*; *pr* étant un rayon fixe déterminé par un angle donné θ_0, et V_0 désignant l'angle dièdre correspondant formé par les plans *lpo*, *lpr*, on voit par un raisonnement analogue à celui du § III, 2°, qu'on a

Fig. 631.



$$\operatorname{tang}\theta = \frac{1}{\operatorname{tang}\Delta}\operatorname{tang} V,$$

en posant

$$\operatorname{tang}\Delta = \frac{\operatorname{tang} V_0}{\operatorname{tang}\theta_0}.$$

L'angle Δ est une fonction de l'inclinaison $\delta = opl$ de la droite pl sur le plan P ; en posant

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\Delta} = \psi(\delta),$$

et raisonnant comme au § IV, d'abord pour le trièdre dont un dièdre est droit, puis pour un trièdre quelconque, on arrive pour les trièdres ou pour les triangles sphériques à des formules qui ne sont autres que les formules (17) dans lesquelles on aurait remplacé a, b, c par ika, ikb, ikc. Mais la comparaison des formules (1) et (5) montre que

$$\mathrm{S}(ikz) = i\sin z, \quad \mathrm{C}(ikz) = \cos z.$$

On aura donc pour les triangles sphériques

$$\frac{\sin^2 a}{\sin^2 \mathrm{A}} = \frac{\sin^2 b}{\sin^2 \mathrm{B}} = \frac{\sin^2 c}{\sin^2 \mathrm{C}},$$

$$\cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos \mathrm{A},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\cos \mathrm{A} = \cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C} - \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C} \cos a,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On reconnaît les formules ordinaires, sauf le signe du second terme dans le deuxième membre de la seconde formule, ce qui tient à ce que nous avons fait entrer ici (IV, 2°) les angles extérieurs.

VI.

Il résulte de ce qui précède que les relations métriques des figures planes dépendent d'une longueur k, qui ne peut être déterminée *a priori* ; mais si ce paramètre k doit rester indéterminé au point de vue purement *logique et abstrait*, il n'en est plus de même quand on arrive à la pratique ; il faut alors le fixer, et il n'est pas d'autre moyen pour cela que de recourir à l'observation. Une seule expérience suffit ; elle consiste à mesurer les éléments d'un triangle et à porter leurs valeurs numériques dans l'une des équations (17) ou dans une de leurs conséquences ; on aura ainsi une équation numérique d'où l'on tirera la valeur de k. Or tout essai de ce genre conduit à une valeur de k tellement grande qu'elle dépasse tout ce que nous pouvons mesurer. On est donc ramené dans la pratique à la Géométrie euclidienne, qui, comme nous l'avons vu, répond à $k = \infty$.

On peut dire encore, pour rendre la chose peut-être plus sensible, que, d'après les formules (17), la somme des angles d'un triangle diffère d'autant plus de deux droits que les côtés du triangle sont plus grands ;

si donc il existait dans la nature un écart entre la somme des angles d'un triangle et deux angles droits, c'est dans les plus grands triangles que l'écart se manifesterait le mieux ; or on a constaté par de nombreuses observations astronomiques que, dans les plus grands triangles, l'écart n'atteignait jamais un centième de seconde. La Géométrie pratique est donc la Géométrie euclidienne, et *il faut admettre le postulatum comme une vérité expérimentale.*

Nous avons supposé jusqu'ici que la distance de deux points était une grandeur qui peut croître indéfiniment; on pourrait, avec Riemann, supposer que cette distance a une limite supérieure, et l'on ferait alors sortir de là un troisième système de Géométrie qui, comme la Géométrie de Lobattcheffsky, se réduirait à la Géométrie euclidienne, pour une valeur particulière attribuée à un paramètre; mais, pour ne pas dépasser le but, nous renverrons, sur ce sujet, aux travaux déjà cités de M. de Tilly et de M. Klein.

NOTE III (¹).

SUR LA GÉOMÉTRIE RÉCENTE DU TÉTRAÈDRE.

DÉFINITION DES COORDONNÉES.

1. Soit $A_1A_2A_3A_4$ le tétraèdre fondamental.

Désignons par s_1, s_2, s_3, s_4 les aires des faces; par a_1, a_2, a_3 les arêtes A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2; par a_4, a_5, a_6 les arêtes A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3; par α_k le dièdre compris entre les deux faces qui ont l'arête commune a_k.

Les *coordonnées normales* d'un point M sont des équimultiples quelconques de ses coordonnées tétraédriques $x_1, x_2, x_3\, x_4$ (962); celles-ci portent aussi le nom de *coordonnées normales absolues*.

Les *coordonnées barycentriques* de M sont des nombres $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ proportionnels aux volumes des tétraèdres $MA_2A_3A_4$, $MA_3A_4A_1$, $MA_4A_1A_2$, $MA_1A_2A_3$, ces volumes étant affectés des mêmes signes que les coordonnées normales correspondantes. Appelons M_k le point de rencontre du plan s_k avec la droite A_kM, et m_k le point d'intersection de l'arête a_k avec le plan mené par M et par l'arête opposée à a_k. On démontre facilement les relations

$$\frac{A_2m_1}{A_3m_1} = -\frac{\xi_2}{\xi_3}, \quad \frac{Mm_2}{Mm_4} = -\frac{\xi_2+\xi_4}{\xi_2+\xi_3}, \quad \frac{MM_4}{A_4M_4} = \frac{\xi_4}{\xi_1+\xi_2+\xi_3}, \quad \dots$$

Il résulte de là que M est le centre des distances proportionnelles des points A_1, A_2, A_3, A_4 pour les coefficients $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ (710).

Les coordonnées d'un plan λ sont des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ proportionnels aux distances des sommets de tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ à ce plan, ces distances étant précédées du signe + ou — d'après une règle connue (709). Soient $l_1, l_2, \dots$ les points où λ coupe les arêtes $a_1, a_2, \dots$; on a

$$\frac{A_1l_3}{A_2l_3} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \frac{A_4l_4}{A_1l_4} = \frac{\lambda_4}{\lambda_1}, \quad \dots$$

(¹) Dans cette Note, qui est le complément naturel de la Note III de la première Partie, les *renvois* se rapportent au texte du *Traité* et à celui de la Note elle-même; pour éviter toute ambiguïté, nous ferons précéder ceux qui visent les Numéros de cette dernière de la lettre N.

POINTS ET PLANS HARMONIQUEMENT ASSOCIÉS.

THÉORÈME.

2. *Si deux tétraèdres* $A_1A_2A_3A_4$, $A'_1A'_2A'_3A'_4$ *sont tels que les droites joignant les sommets homologues concourent en un même point* S, *les droites* d_1, d_2, d_3, d_4 *suivant lesquelles se coupent les faces homologues sont situées dans un même plan* σ.

En effet, deux arêtes homologues étant situées dans un même plan ont un point d'intersection. Soient $B_1, B_2, \ldots, B_6$ les points où les arêtes du premier tétraèdre sont rencontrées par les arêtes homologues du second. La droite d_4 contient les points B_1, B_2, B_3; la droite d_1 passe par les points B_1, B_5, B_6. Ces lignes ont un point commun B_1; donc elles sont situées dans un même plan σ avec les droites d_2, d_3, qui joignent les points B_2 et B_6, B_3 et B_5.

La démonstration de la réciproque ne présente pas de difficultés.

Les deux tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ sont dits *homologiques*, S est le *centre d'homologie*, σ est le *plan d'homologie* (938).

3. Étant donnés un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ et un point M, appelons μ_k le plan mené par M et l'arête a_k, et ν_k, le plan conjugué harmonique de μ_k par rapport au dièdre α_k du tétraèdre; ces plans coupent l'arête opposée en deux points que nous désignons par les lettres m, n affectées de l'indice propre à cette arête. La droite A_kM rencontre le plan s_k en un point M_k.

Les trois plans μ_4, μ_5, μ_6 se coupent suivant la droite A_4M, et les plans ν_1, ν_2, ν_3 rencontrent cette droite au conjugué harmonique N_4 de M par rapport à A_4M_4. Si $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ sont les coordonnées normales ou barycentriques de M, celles de N_4 sont $\xi_1, \xi_2, \xi_3, -\xi_4$.

Les plans μ_1, μ_4 se rencontrent suivant la droite B_4B_1, qui passe par M. Les plans s_4, s_2, μ_2, ν_2 formant un faisceau harmonique, déterminent sur m_1m_4 une division harmonique $m_1m_4MN'_1$. Les plans ν_3, ν_5, ν_6 passent également par N'_1. Les coordonnées de ce point sont $-\xi_1$, $\xi_2, \xi_3, -\xi_4$.

Nous désignons par N_1, N_2, N_3, N_4 les conjugués harmoniques de M par rapport aux segments A_1M_1, A_2M_2; A_3M_3, A_4M_4; par N'_1, N'_2, N'_3 les conjugués harmoniques de M par rapport aux segments m_1m_4, m_2m_5, m_3m_6. Le Tableau suivant indique les coordonnées de ces points, les plans menés par ces points et les arêtes du tétraèdre, et les droites qui passent par ces points en s'appuyant sur deux arêtes opposées du

tétraèdre :

$M \ldots$	$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6$;	$m_1 m_4, m_2 m_5, m_3 m_6$;	$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \xi_4$.
$N_1 \ldots$	$\nu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \nu_5, \nu_6$;	$m_1 n_4, m_5 n_2, m_6 n_3$;	$-\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \xi_4$.
$N_2 \ldots$	$\mu_1, \nu_2, \mu_3, \nu_4, \mu_5, \nu_6$;	$m_4 n_1, m_2 n_5, m_6 n_3$;	$\xi_1, -\xi_2, \quad \xi_3, \quad \xi_4$.
$N_3 \ldots$	$\mu_1, \mu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \mu_6$;	$m_4 n_1, m_5 n_2, m_3 n_6$;	$\xi_1, \quad \xi_2, -\xi_3, \quad \xi_4$.
$N_4 \ldots$	$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6$;	$m_1 n_4, m_2 n_5, m_3 n_6$;	$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, -\xi_4$.
$N'_1 \ldots$	$\mu_1, \nu_2, \nu_3, \mu_4, \nu_5, \nu_6$;	$m_1 m_4, n_2 n_5, n_3 n_6$;	$-\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, -\xi_4$.
$N'_2 \ldots$	$\nu_1, \mu_2, \nu_3, \nu_4, \mu_5, \nu_6$;	$n_1 n_4, m_2 m_5, m_3 m_6$;	$\xi_1, -\xi_2, \quad \xi_3, -\xi_4$.
$N'_3 \ldots$	$\nu_1, \nu_2, \mu_3, \nu_4, \nu_5, \mu_6$;	$n_1 n_4, n_2 n_5, m_3 m_6$;	$\xi_1, \quad \xi_2, -\xi_3, -\xi_4$.

4. Les droites $A_1 m_1$, $A_2 m_2$, $A_3 m_3$ concourent en M_4; par conséquent, les points n_1, n_2, n_3, conjugués harmoniques de m_1, m_2, m_3 par rapport à $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$, sont situés sur la polaire de M_4 par rapport au triangle $A_1 A_2 A_3$. Pareillement, les triples de points (n_1, n_5, n_6), (n_2, n_4, n_6), (n_1, n_4, n_5) sont situés sur les polaires des points M_1, M_2, M_3 par rapport aux triangles $A_2 A_3 A_4$, $A_3 A_4 A_1$, $A_4 A_1 A_2$. Ces quatre polaires ayant deux à deux un point commun sont situées dans un même plan λ, qu'on appelle *plan polaire* de M par rapport au tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$. Les six points n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6 sont les sommets d'un quadrilatère complet, dont les diagonales se coupent aux points N'_1, N'_2, N'_3. Les coordonnées du plan λ sont inversement proportionnelles aux coordonnées barycentriques du point M.

Les deux tétraèdres $A_1 A_2 A_3 A_4$, $N'_1 N'_2 N'_3 M$ présentent cette particularité que deux arêtes opposées quelconques de l'un, par exemple, $A_1 A_2$ et $A_3 A_4$, sont partagées harmoniquement par les deux arêtes correspondantes $N'_1 N'_2$, N'_3 M de l'autre tétraèdre. On en déduit que chacun de ces tétraèdres est *autopolaire* par rapport à l'autre, c'est-à-dire que chaque sommet de l'un des tétraèdres est le pôle de la face opposée par rapport à l'autre tétraèdre. Ces tétraèdres sont homologiques; N_1 est leur centre d'homologie, $N_2 N_3 N_4$ est leur plan d'homologie.

Le tétraèdre $N_1 N_2 N_3 N_4$ est également autopolaire par rapport à $A_1 A_2 A_3 A_4$; ces deux polyèdres ont M pour centre d'homologie, et leur plan d'homologie est $N'_1 N'_2 N'_3$.

Pour d'autres propriétés intéressantes de la figure, nous renvoyons à un article de M. Stephanos Cyparinos (*Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 1879, p. 434).

Les tétraèdres $A_1 A_2 A_3 A_4$, $M_1 M_2 M_3 M_4$ ont également pour centre d'homologie le point M, et pour plan d'homologie le plan $N'_1 N'_2 N'_3$.

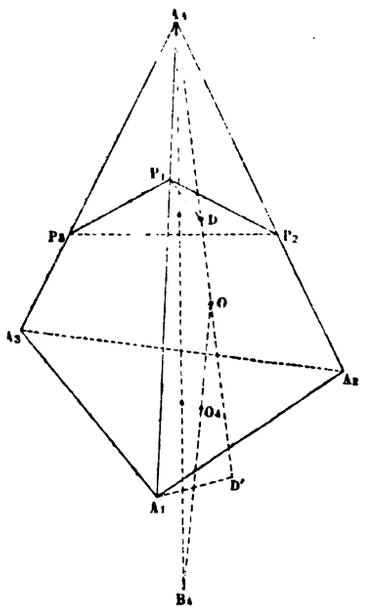
SECTIONS ANTIPARALLÈLES D'UN TÉTRAÈDRE.

RAYON DE LA SPHÈRE CIRCONSCRITE.

5. Désignons par O et R le centre et le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, et par $B_1B_2B_3B_4$ le tétraèdre formé par les plans tangents menés en A_1, A_2, A_3, A_4 à la sphère O (*fig.* 1).

Si un plan parallèle au plan $B_1B_2B_3$ coupe les arêtes A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 aux points P_1, P_2, P_3, nous dirons que le triangle $P_1P_2P_3$ est une *section antiparallèle* du tétraèdre. Les côtés de ce triangle sont parallèles aux tangentes menées en A_4 aux circonférences $A_4A_2A_3$, $A_4A_3A_1$, $A_4A_1A_2$;

Fig. 1.



par conséquent, les six points A_1, A_2, A_3, P_1, P_2, P_3 sont situés sur une même sphère, et l'on a

$$A_4P_1 \cdot a_4 = A_4P_2 \cdot a_5 = A_4P_3 \cdot a_6 = p, \tag{1}$$

p étant la puissance de cette sphère par rapport à A_4. On démontre faci-

lement les relations

$$(2)\qquad \frac{P_2P_3}{a_1a_4}=\frac{P_3P_1}{a_2a_5}=\frac{P_1P_2}{a_3a_6}=\frac{p}{a_4a_5a_6}.$$

Donc *les côtés d'une section antiparallèle menée dans l'un quelconque des quatre trièdres d'un tétraèdre sont proportionnels aux produits des arêtes opposées du tétraèdre.*

Remarquons aussi que *la forme des sections antiparallèles d'un tétraèdre ne change pas quand on soumet les sommets du tétraèdre à une transformation par rayons vecteurs réciproques.*

Les circonférences circonscrites aux triangles $A_1A_2A_3$, $P_1P_2P_3$ appartiennent à un même cône C_4, ayant son sommet en A_4 (878); les plans tangents menés par les arêtes A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 de ce cône forment un trièdre circonscrit tel, que les plans menés par les arêtes de ce trièdre, et respectivement par A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3, se coupent suivant la même droite. Il résulte de là que *les centres des symédianes des triangles* $A_1A_2A_3$, $P_1P_2P_3$ *sont sur une même droite passant par* A_4.

Enfin, rappelons que le centre du cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$ est sur la droite A_4B_4 (880).

6. La considération d'une section antiparallèle conduit aisément à l'expression du rayon de la sphère O. En effet, si D, D' sont les points où le rayon A_4O coupe le plan $P_1P_2P_3$ et la sphère O, on a

$$p=A_4D.A_4D'=2R.A_4D.$$

Soient V, V' les volumes des tétraèdres $A_4P_1P_2P_3$, $A_4A_1A_2A_3$; l'on a (*Exercice* 616)

$$\frac{V'}{V}=\frac{A_4P_1.A_4P_2.A_4P_3}{a_4a_5a_6};$$

d'où, en remplaçant A_4P_1, A_4P_2, A_4P_3 par leurs valeurs tirées de (1),

$$V'=\frac{p^3}{a_4^2a_5^2a_6^2}V.$$

Désignons par T l'aire du triangle dont les côtés ont pour valeurs numériques a_1a_4, a_2a_5, a_3a_6; à cause des égalités (2),

$$\text{aire } P_1P_2P_3=\frac{p^2}{a_4^2a_5^2a_6^2}T;$$

par suite,

$$V'=\frac{1}{3}P_1P_2P_3.A_4D=\frac{p^2T}{3a_4^2a_5^2a_6^2}A_4D.$$

Égalons les deux valeurs de V' et remplaçons p par $2R.A_4D$; il vient

$$6RV = T.$$

Cette démonstration est due à von Standt (*Journal de Crelle*, t. 57, p. 88).

POINTS INVERSES.

THÉORÈME.

7. *Soit μ_k le plan mené par un point donné* M *et par l'arête a_k de tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, et soit ν_k le plan symétrique de μ_k par rapport au plan bissecteur du dièdre α_k du tétraèdre : 1° les plans ν_1, ν_2, ... passent par un même point* N; *2° les coordonnées normales de* N *sont inversement proportionnelles à celles de* M; *3° les projections* (M_1, M_2, M_3, M_4), (N_1, N_2, N_3, N_4) *des points* M et N *sur les faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, sont huit points d'une même sphère*; *4° les deux pentagones complets $MA_1A_2A_3A_4$, $NN_1N_2N_3N_4$ sont tels, que la droite joignant deux sommets de l'un est perpendiculaire au plan passant par les sommets non homologues de l'autre polygone.*

Appelons Q le centre de la sphère $M_1M_2M_3M_4$, N le symétrique de M par rapport à Q, et N_1, N_2, N_3, N_4 les projections de N sur les faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Comme Q se projette au centre du petit cercle suivant lequel le plan s_k coupe la sphère Q, M_kN_k est un diamètre de ce cercle. Donc les points N_1, N_2, ... appartiennent à la sphère Q.

La droite MM_k coupe cette sphère en un point N'_k symétrique de N_k par rapport au centre Q; par conséquent, $NN_k = N'_kM$. Or

$$MM_1.MN'_1 = MM_2.MN'_2 = MM_3.MN'_3 = MM_4.MN'_4 :$$

donc les coordonnées normales de M sont inversement proportionnelles à celles de N. Il résulte de là que les plans $M\alpha_k$. $N\alpha_k$ sont symétriques par rapport au dièdre α_k.

Les droites NN_1, NN_2, NN_3, NN_4 sont déjà perpendiculaires aux plans $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$. Le plan NN_1N_2 est coupé, par la droite A_3A_4 en un point L, et par le plan MA_3A_4 suivant la droite L'L, isogonale de L'N par rapport à l'angle N_1LN_2; donc la droite N_1N_2 est perpendiculaire à la droite LL' et, par suite, au plan MA_3A_4 qui est mené par LL' perpendiculairement au plan NN_1N_2. Les droites N_1N_2, N_1N_3 étant perpendiculaires aux plans MA_3A_4, MA_1A_4, le plan $N_1N_2N_3$ est perpendiculaire à la droite MA_4.

Scolie.

8. 1° Les points M, N sont des *points inverses* par rapport au tétraèdre

$A_1A_2A_3A_4$. Ce sont les foyers d'une surface de révolution du second ordre, touchant les faces du tétraèdre. En effet, construisons, dans un plan quelconque mené par MN, la conique ayant pour foyers les points M, N et pour axe principal le diamètre de la sphère Q qui est dirigé suivant MN : cette courbe, en tournant autour de la droite MN, engendre une surface de révolution S. La sphère Q est le lieu des projections des foyers M, N sur les plans tangents à S. Réciproquement, le plan s_k, perpendiculaire à la droite MM_k, aboutissant à un point M_k de la sphère, touche la surface S.

2° Lorsque le point M est à l'infini, on a le théorème suivant :

Par les arêtes d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, *on mène des plans parallèles à une même droite d; les symétriques de ces plans par rapport aux plans bissecteurs des dièdres correspondants du tétraèdre passent par un même point* N, *dont les projections sur les faces du tétraèdre sont situées dans un même plan* δ *perpendiculaire à d. Ce point est le foyer d'un paraboloïde de révolution touchant les quatre faces du tétraèdre et le plan* δ; *les diamètres de cette surface sont parallèles à d.*

Le plan δ offre quelque analogie avec la droite de Simson d'un point de la circonférence circonscrite à un triangle. Mais nous faisons remarquer que le lieu de N n'est pas la sphère circonscrite au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$; ce lieu est une surface du troisième ordre.

TÉTRAÈDRES ET PENTAGONES ORTHOLOGIQUES.

THÉORÈME.

9. *Si deux tétraèdres* $A_1A_2A_3A_4$, $C_1C_2C_3C_4$ *sont tels, que les perpendiculaires abaissées des sommets du premier sur les faces opposées du second concourent en un même point* A, *les perpendiculaires abaissées des sommets du second tétraèdre sur les faces opposées du premier concourent également en un même point* C.

Voici trois figures où ce théorème s'aperçoit immédiatement :

1° Soit D le point inverse de A par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, et soient D_1, D_2, D_3, D_4 les projections de D sur les faces de ce tétraèdre.

2° Appelons O, O_1, O_2, O_3, O_4 les centres des sphères circonscrites aux tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $AA_2A_3A_4$, $AA_1A_3A_4$, $AA_1A_2A_4$, $AA_1A_2A_3$.

3° Transformons le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ par polaires réciproques en prenant une sphère directrice, de centre A; soit $E_1E_2E_3E_4$ le tétraèdre ainsi obtenu. Les tétraèdres $D_1D_2D_3D_4$, $O_1O_2O_3O_4$, $E_1E_2E_3E_4$ ont leurs faces perpendiculaires aux droites AA_1, AA_2, AA_3, AA_4 et, par suite, sont homothétiques à $C_1C_2C_3C_4$; il résulte de leur construction que les perpendiculaires menées par leurs sommets sur les faces correspondantes du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ concourent en un même point D, O ou A.

SCOLIE.

10. 1° Les tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $C_1C_2C_3C_4$ sont dits *orthologiques;* les points A, C en sont les *métapôles.*

Les *pentagones complets* $AA_1A_2A_3A_4$, $CC_1C_2C_3C_4$ jouissent de la propriété qu'*un côté quelconque de l'un d'eux est perpendiculaire à la face opposée de l'autre;* par exemple, le côté A_3A_4 est perpendiculaire au plan CC_1C_2; les pentagones peuvent, également, être appelés *orthologiques.*

2° *Les distances d'un sommet du premier pentagone aux autres sommets sont inversement proportionnelles aux distances du sommet homologue du second pentagone aux faces non adjacentes de ce polygone.* Cette propriété se voit immédiatement si l'on prend pour $C_1C_2C_3C_4$ le tétraèdre désigné ci-dessus par $D_1D_2D_3D_4$ ou $E_1E_2E_3E_4$.

3° *Deux côtés correspondants* A_1A_2, C_1C_2 *de deux pentagones orthologiques sont divisés dans le même rapport par les faces opposées* AA_3A_4, CC_3C_4.

En effet, appelons a le point de rencontre de A_1A_2 avec le plan AA_3A_4, c celui de C_1C_2 avec le plan CC_3C_4, et soient a', c' les points situés à l'infini sur A_1A_2, C_1C_2. La droite Aa, intersection des plans AA_1A_2, AA_3A_4 qui sont perpendiculaires aux droites C_3C_4, C_1C_2, est perpendiculaire au plan C_3C_4b'. Par conséquent, le faisceau des plans $C_3C_4C_1$, $C_3C_4C_2$, C_3C_4c, C_3C_4c' a même rapport anharmonique que le faisceau des droites AA_2, AA_1, Aa', Aa qui sont perpendiculaires à ces plans. Si l'on coupe ces faisceaux par les transversales C_1C_2, A_1A_2, on obtient

$$(C_1C_2cc') = (A_2A_1a'a) \quad \text{ou} \quad \frac{cC_1}{cC_2} = \frac{aA_1}{aA_2}.$$

Il résulte de là que *deux sommets correspondants de deux pentagones orthologiques ont, respectivement, mêmes coordonnées barycentriques dans les tétraèdres formés par les autres sommets.*

POINT INVERSE DU CENTRE DE GRAVITÉ D'UN TÉTRAÈDRE.

11. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées normales absolues d'un point L par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. On a l'identité

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(s_1^2+s_2^2+s_3^2+s_4^2)-(s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3+s_4x_4)^2$$
$$=(s_1x_2-s_2x_1)^2+(s_1x_3-s_3x_1)^2+\ldots+(s_3x_4-s_4x_3)^2.$$

Le second membre de cette égalité se réduit à zéro, lorsque

$$\frac{x_1}{s_1}=\frac{x_2}{s_2}=\frac{x_3}{s_3}=\frac{x_4}{s_4},$$

et la quantité $s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 + s_4x_4$ a la valeur constante $3V$; par conséquent, *le minimum de la somme* $\sigma = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ *correspond au point L dont les coordonnées normales sont proportionnelles aux aires des faces du tétraèdre.* Les coordonnées du centre de gravité G étant égales aux quarts des hauteurs h_1, h_2, h_3, h_4, *L est l'inverse de G par rapport au tétraèdre; il est le centre de gravité du tétraèdre qui a pour sommets les projections de L sur les faces de* $A_1A_2A_3A_4$ (N., 16, 3°).

Pour le minimum cherché,

$$\sigma = \frac{9V^2}{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2}, \quad \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2}.$$

Le point *L* rappelle, par quelques-unes de ses propriétés, le centre des symédianes d'un triangle; mais l'analogie entre les deux points est loin d'être complète.

QUADRUPLES HYPERBOLOÏDIQUES.

LEMME.

12. *Étant données quatre droites* g_1, g_2, g_3, g_4, *non situées deux à deux dans un même plan, il existe, en général, deux droites s'appuyant sur ces lignes; mais, si l'on peut assigner trois droites s'appuyant sur* g_1, g_2, g_3, g_4, *il en existe une infinité.*

Cette proposition résulte du n° 1212; en voici une démonstration directe. Soit A un point quelconque de g_1; les plans g_2A, g_3A se coupent suivant une droite H s'appuyant sur g_1, g_2, g_3, et ils rencontrent g_4 en deux points B, C, qui sont généralement distincts. Lorsque A parcourt g_1, les plans g_2A, g_3A engendrent deux faisceaux homographiques; par conséquent, les points B, C marquent sur g_4 deux divisions homographiques. Soient E, F les points doubles de ces divisions; les plans g_2E, g_3E se coupent suivant une droite rencontrant g_1, g_2, g_3, g_4, et il en est de même des plans g_2F, g_3F.

Si, dans trois positions de A, les points B, C se confondent, ils coïncident constamment (1104), et toute droite s'appuyant sur g_1, g_2, g_3 rencontre également g_4.

13. Dans la dernière hypothèse, la droite H engendre un hyperboloïde ou un paraboloïde, dont g_1, g_2, g_3, g_4 sont des génératrices du second mode. On dit alors que g_1, g_2, g_3, g_4 constituent un *quadruple hyperboloïdique* ou, plus simplement, que ces *droites sont hyperboloïdiques.*

De tels systèmes de quatre droites se présentent fréquemment dans

la Géométrie du tétraèdre ; ils y remplacent les triples de droites concourantes de la Géométrie plane.

Soient P_1, P_2, P_3, P_4 quatre points pris dans les plans des faces s_1, s_2, s_3, s_4 d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Pour que les quatre lignes A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3, A_4P_4 soient hyperboloïdiques, il suffit de trouver trois droites qui les rencontrent. Par exemple, par le point A_4 de l'une de ces lignes, il doit passer une droite s'appuyant sur les trois autres, ce qui exige que les plans $A_4A_1P_1$, $A_4A_2P_2$, $A_4A_3P_3$ se coupent suivant une même droite ; ou que les droites A_4P_1, A_4P_2, A_4P_3 rencontrent A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 en des points p_1, p_2, p_3 tels, que les droites A_1p_1, A_2p_2, A_3p_3 concourent en un même point. De même, les plans $A_1A_4P_4$, $A_1A_2P_2$, $A_1A_3P_3$ doivent se couper suivant la même droite, etc.

Désignons maintenant par p_1, p_2, p_3, p_4 quatre lignes hyperboloïdiques, situées dans les faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Le plan $A_1A_2A_3$, mené par p_4, coupe p_1, p_2, p_3 en trois points d'une même droite ; autrement dit, les droites p_1, p_2, p_3 rencontrent A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 en trois points qui sont en ligne droite. Une semblable condition doit être remplie par trois faces du tétraèdre.

APPLICATIONS.

14. 1° *Les droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre aux centres des cercles inscrits aux faces opposées sont hyperboloïdiques.* (*Exercice* 575, p. 513.)

2° Soit $B_1B_2B_3B_4$ le tétraèdre formé par les plans tangents menés par les sommets du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ à la sphère circonscrite, et soient K_1, K_2, K_3, K_4 les centres des symédianes des faces de $A_1A_2A_3A_4$.

Si le plan $A_1A_2A_3$ coupe les droites B_4B_1, B_4B_2, B_4B_3 aux points C_1, C_2, C_3, les côtés du triangle $C_1C_2C_3$ touchent en A_1, A_2, A_3 la circonférence circonscrite au triangle $A_1A_2A_3$; donc les plans $B_4B_1A_1$, $B_4B_2A_2$, $B_4B_3A_3$ se coupent suivant la droite joignant B_4 au centre des symédianes de $A_1A_2A_3$. Par conséquent, *les droites* A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 *sont des génératrices d'un même mode*, et *les droites* B_1K_1, B_2K_2, B_3K_3, B_4K_4 *sont des génératrices de l'autre mode d'un hyperboloïde.*

3° Le plan $B_1B_2B_3$ rencontre les côtés du triangle $A_1A_2A_3$ en trois points D_1, D_2, D_3 qui sont les conjugués harmoniques, par rapport à ces côtés, des points où aboutissent les symédianes A_1K_1, A_4K_2, A_4K_3 ; on conclut de là que les plans $A_4A_1K_1$, $A_4A_2K_2$, $A_4A_3K_3$ se coupent suivant une même droite. Par suite, *les droites* A_1K_1, A_2K_2, A_3K_3, A_4K_4 *sont hyperboloïdiques.*

4° Appelons d_1, d_2, d_3, d_4 les intersections des faces homologues des tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$. Le plan $B_4B_2B_3$ rencontre le plan $A_1A_2A_3$ suivant une droite C_2C_3 qui touche en C_1 le cercle $A_1A_2A_3$. Le point

d'intersection E_1 de C_2C_3, A_2A_3 appartient à la ligne d_1; mais les trois points analogues, situés sur les côtés du triangle $A_1A_2A_3$, sont sur la polaire de K_4 par rapport à $A_1A_2A_3$. Donc *les plans homologues des tétraèdres* $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ *se coupent suivant quatre lignes hyperboloïdiques.*

THÉORÈME.

13. *Si les droites joignant les sommets homologues de deux tétraèdres* $A_1A_2A_3A_4$, $E_1E_2E_3E_4$ *sont hyperboloïdiques, les lignes d'intersection des faces correspondantes jouissent de la même propriété.*

Soient F_1, F_2, F_3 les points de rencontre du plan $A_1A_2A_3$ avec les droites E_4E_1, E_4E_2, E_4F_3. Par hypothèse, les plans $E_4E_1A_1$, $E_4E_2A_2$, $E_4E_3A_3$ passent par une même droite; donc les droites E_1A_1, E_2A_2, E_3A_3 concourent en un même point. Les côtés homologues des triangles $E_1E_2E_3$, $A_1A_2A_3$ se coupent donc en trois points G_1, G_2, G_3 d'une même droite. Or, ces points appartiennent, respectivement, aux droites d'intersection des plans $B_4B_2B_3$ et $A_4A_2A_3$, $B_4B_3B_1$ et $A_4A_3A_1$, $B_4B_1B_2$ et $A_4A_1A_2$; donc la droite $G_1G_2G_3$ s'appuie sur les quatre lignes suivant lesquelles se coupent les faces homologues des deux tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$.

La réciproque de ce théorème est également vraie.

THÉORÈME.

16. *Soient* (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3), (P_4, Q_4) *quatre couples de points inverses par rapport aux triangles des faces du tétraèdre* $A_1A_2A_3A_4$. *Si les droites* A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3, A_4P_4 *sont hyperboloïdiques, les droites* A_1Q_1, A_2Q_2, A_3Q_3, A_4Q_4 *le sont également.*

En effet, prenons sur A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 trois longueurs égales $A_4N_1 = A_4N_2 = A_4N_3$; les droites A_4P_1 et A_4Q_1, A_4P_2 et A_4Q_2, A_4P_3 et A_4Q_3 coupent, respectivement, les côtés du triangle $N_1N_2N_3$ en des couples de points isotomiques. Par hypothèse, les plans $A_4A_1P_1$, $A_4A_2P_2$, $A_4A_3P_3$ se coupent suivant une même droite, ou leurs traces sur le plan $N_1N_2N_3$ concourent en un même point; on déduit de là que les traces des plans $A_4A_1Q_1$, $A_4A_2Q_2$, $A_4A_3Q_3$ sont également concourantes, ou que ces plans se coupent suivant une même droite.

SPHÈRES TANGENTES AUX QUATRE FACES D'UN TÉTRAÈDRE.

17. M. Hermary a fait connaître dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VII, p. 138, une solution remarquable du problème de construire une sphère touchant les quatre faces (indéfinies) d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Cette solution va nous donner un complément

de la discussion établie au n° 963 et quelques propriétés des points de contact des faces du tétraèdre avec les différentes sphères résolvant le problème.

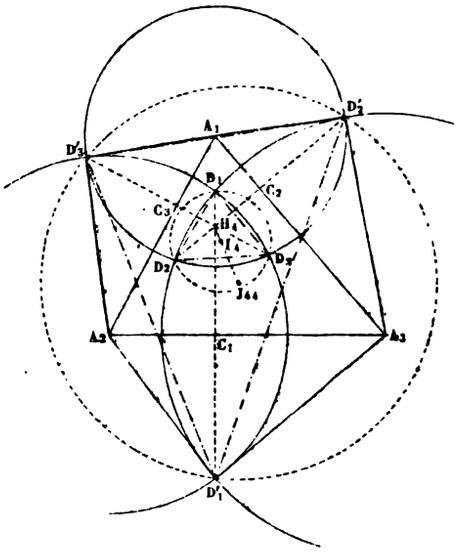
Désignons par μ_1, μ_2, μ_3 les plans bissecteurs *intérieurs* des dièdres (s_4, s_1), (s_4, s_2), (s_4, s_3), et par ν_1, ν_2, ν_3 leurs plans bissecteurs *extérieurs*. Il *peut* y avoir huit sphères touchant les faces du tétraèdre; leurs centres, indiqués par les lettres I, J, J′ sont les intersections des plans suivants :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I} \ldots \mu_1, \mu_2, \mu_3; \quad \mathrm{J}_4 \ldots \nu_1, \nu_2, \nu_3;\\
&\mathrm{J}_1 \ldots \nu_1, \mu_2, \mu_3; \quad \mathrm{J}_2 \ldots \mu_1, \nu_2, \mu_3; \quad \mathrm{J}_3 \ldots \mu_1, \mu_2, \nu_3;\\
&\mathrm{J}'_1 \ldots \mu_1, \nu_2, \nu_3; \quad \mathrm{J}'_2 \ldots \nu_1, \mu_2, \nu_3; \quad \mathrm{J}'_3 \ldots \nu_1, \nu_2, \mu_3;
\end{aligned}$$

leurs points de contact avec le plan $A_1A_2A_3$ seront dénotés par I_4, J_{14}, J_{24}, ..., J'_{14}, ...

Considérons (*fig.* 2) l'une quelconque de ces sphères. Rabattons les

Fig. 2.



plans s_1, s_2, s_3 autour des arêtes a_1, a_2, a_3 sur le plan s_4 dans des sens tels, qu'ils *écrasent* la sphère; leurs points de contact viennent coïncider avec le point de contact du plan s_4 et, comme ils étaient à égale

distance de A_4, le point de contact de s_4 sera le centre de la circonférence passant par les trois rabattements de A_4 sur le plan $A_1A_2A_3$.

D'après cela, nous décrivons dans le plan $A_1A_2A_3$ trois circonférences ayant pour centres les points A_1, A_2, A_3 et pour rayons les distances A_1A_4, A_2A_4, A_3A_4. Soient D_1 et D'_1, D_2 et D'_2, D_3 et D'_3 les intersections de ces courbes deux à deux; ce sont les différents rabattements possibles du sommet A_4 autour des arêtes a_1, a_2, a_3. Si D_1, D_2, D_3 sont situés du même côté de ces arêtes que les sommets opposés A_1, A_2, A_3, les points de contact du plan $A_1A_2A_3$ avec les sphères cherchées sont les centres des circonférences passant par les points suivants :

I_4..... D_1, D_2, D_3; J_{44}.... D'_1, D'_2, D'_3;
J_{14}.... D'_1, D_2, D_3; J_{24}.... D_1, D'_2, D_3; J_{34}... D_1, D_2, D'_3:
J'_{14}... D_1, D'_2, D_3; J'_{24}... D'_1, D_2, D'_3; J'_{34}... D'_1, D'_2, D_3.

Les droites $D_1D'_1$, $D_2D'_2$, $D_3D'_3$ concourent en un même point H_4, qui est la projection de A_4 sur le plan $A_1A_2A_3$. Comme

$$H_4D_1.H_4D'_1 = H_4D_2.H_4D'_2 = H_4D_3.H_4D'_3,$$

les circonférences $D_1D_2D_3$, $D'_1D'_2D'_3$ sont des lignes inverses par rapport au point H_4, et leurs centres I_4, J_{44} sont en ligne droite avec H_4; cette dernière propriété résulte aussi de ce que les plans bissecteurs des dièdres A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 du tétraèdre se coupent suivant une même droite passant par A_4, I, J_4. Les points I_4, J_{44} sont des points inverses par rapport au triangle $A_1A_2A_3$; car les lignes A_1I_4, A_1J_{44}, par exemple, sont perpendiculaires aux lignes D_2D_3, $D'_2D'_3$ qui, étant antiparallèles par rapport aux droites $D_2D'_2$, $D_3D'_3$, le sont aussi par rapport à A_1A_3, A_1A_2. Cette proposition peut se démontrer directement; en effet, si X, Y, Z, X', Y', Z' sont les projections de I_4, J_{44} sur A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, les triangles II_4X et $X'J_{44}J_4$, ... sont semblables, d'où les égalités

$$I_4X.J_{44}X' = I_4Y.J_{44}Y' = I_4Z.J_{44}Z' = II_4.J_4J_{44},$$

de sorte que les coordonnées normales de J_{44} sont inversement proportionnelles à celles de I_4.

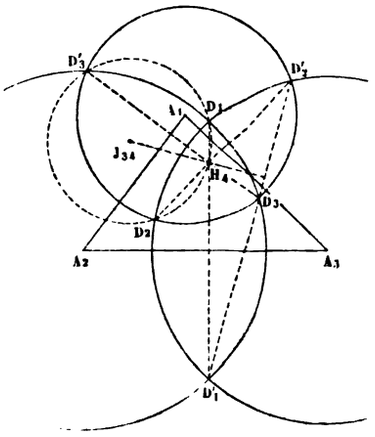
Ainsi, *les points* I_4 *et* J_{44}, J_{14} *et* J'_{14}, J_{24} *et* J'_{24}, J_{34} *et* J'_{34} *sont des points inverses par rapport au triangle* $A_1A_2A_3$; *ils sont situés sur quatre droites passant par* H_4.

18. Les triples de points $D_1D_2D_3$, $D'_1D'_2D'_3$, $D'_1D_2D_3$, $D_1D'_2D_3$, $D_1D_2D'_3$ sont toujours les sommets de triangles proprement dits; par conséquent,

les points I_4, J_{44}, J_{14}, J_{24}, J_{34} sont à distance finie; la sphère inscrite et les sphères exinscrites existent toujours.

Si les points D'_1, D'_2, D_3 sont situés en ligne droite (*fig.* 3), le point J'_{34} se transporte à l'infini dans la direction perpendiculaire à $D'_1 D'_2$, et nous dirons que la sphère J'_3 disparaît à l'infini. La circonférence $D_1 D_2 D'_3$ passe maintenant par H_4 et son centre J_3 est situé sur la circonférence circonscrite au triangle $A_1 A_2 A_3$, à l'intersection avec la perpendiculaire

Fig. 3.



abaissée de H_4 sur $D'_1 D'_2$. Le triangle $D_1 D_2 D'_3$ est symétriquement semblable à $A_1 A_2 A_3$. Le quadrilatère inscrit $D_1 D_2 D'_3 H_4$ donne

$$D_1 D_2 . H_4 D'_3 = D_1 D'_3 . H_4 D_2 + D_2 D'_3 . H_4 D_1$$

ou, en remplaçant les côtés de $D_1 D_2 D'_3$ par ceux de $A_1 A_2 A_3$,

$$A_1 A_2 (C_3 D_3 + C_3 H_4) = A_1 A_3 (C_2 D_2 - C_2 H_4) + A_2 A_3 (C_1 D_1 - C_1 H_4),$$

d'où l'on tire aisément

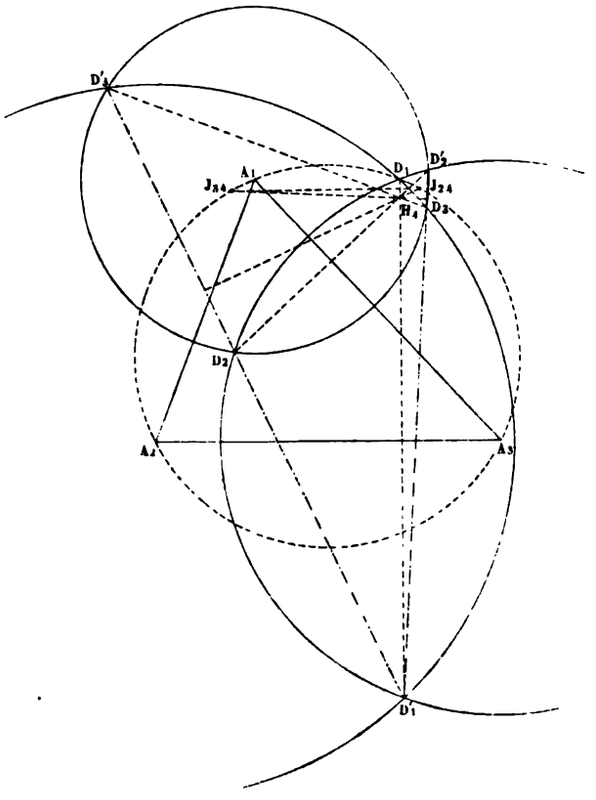
$$s_3 + s_4 = s_1 + s_2.$$

Telle est la condition pour que la sphère J'_3 disparaisse. On peut lui donner d'autres formes. En effet, les angles $D'_2 D_3 D'_1$, $D'_2 D_3 D'_1$ doivent être supplémentaires; mais, dans les deux circonférences ayant pour centres A_1, A_2, ces angles inscrits et les angles aux centres $D'_2 A_1 D'_3$, $D'_2 A_2 D'_1$ sous-tendent des arcs ayant les mêmes extrémités. On conclut

de là que *la somme des angles plans composant les trièdres* A_1, A_2 *du tétraèdre égale quatre droits*, ou que, dans *le quadrilatère gauche* $A_1A_3A_2A_4$, *la somme de deux angles opposés égale celle des autres angles opposés*. Observons également que *le triangle* $D'_2D'_1D'_3$ *est semblable à* $A_1A_2A_4$; l'angle $D'_3D'_2D'_1$, par exemple, étant égal à la moitié de l'angle au centre $D'_3A_1D_3$ qui, dans la circonférence $D'_3D'_2D_3$, sous-tend le même arc.

La combinaison $D'_1D'_2D_3$ conduit à une sphère inscrite dans le comble A_1A_2 ou dans le comble A_3A_4, suivant que la droite $D'_1D'_2$ passe ou non

Fig. 4.



entre les points D_3, D'_3. La somme des angles $D'_3D_3D'_2$, $D'_3D_3D'_1$ est, respectivement, supérieure ou inférieure à deux angles droits et, dans le quadrilatère gauche $A_1A_3A_2A_4$, la somme des angles opposés à la dia-

gonale A_1A_2 est, respectivement, inférieure ou supérieure à celle des angles opposés à la diagonale A_3A_4.

19. Les deux sphères J'_2, J'_3 disparaissent à l'infini, lorsque les points D'_1, D_2, D'_3 sont en ligne droite, ainsi que D'_1, D'_2, D_3. Les deux circonférences $D_1D'_2D_3$, $D_1D_2D'_3$ (*fig.* 4) passent maintenant par H_4; les points J_{24}, J_{34} sont situés à l'intersection de la circonférence $A_1A_2A_3$ avec les perpendiculaires abaissées de H_4 sur les droites $D'_1D'_3$, $D'_1D'_2$, et la droite qui les joint est perpendiculaire au milieu de H_4D_1 et, par suite, parallèle à A_2A_3.

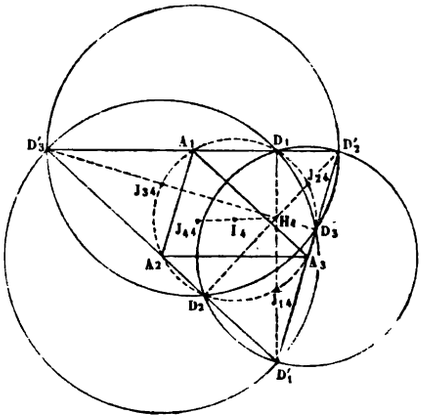
Les deux triangles $D_1D_2D'_3$, $D_1D'_2D_3$ sont symétriquement semblables à $A_1A_2A_3$. Le triangle $D'_1D'_2D'_3$ est équiangle à chacune des faces $A_2A_1A_4$, $A_3A_4A_1$; donc celles-ci sont égales entre elles, et

$$A_1A_2 = A_3A_4, \qquad A_1A_3 = A_2A_4.$$

Ainsi, *deux sphères inscrites dans les combles disparaissent, lorsque le tétraèdre a deux couples d'arêtes opposées égales.*

Le parallélipipède circonscrit au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ est droit et a pour base un parallélogramme obliquangle (p. 523, *exercice* 660). Parmi les trois droites joignant les milieux des arêtes opposées du tétraèdre (ces droites sont appelées *médianes* du tétraèdre), l'une est perpendiculaire sur les deux autres.

Fig. 5.



20. Les trois sphères J'_1, J'_2, J'_3 disparaissent si les trois triples $D'_1D'_2D_3$, $D_1D'_2D'_3$, $D'_1D_2D'_3$ sont sur trois droites (*fig.* 5). Alors les arêtes opposées A_2A_3 et A_1A_4, A_3A_1 et A_2A_4, A_1A_2 et A_3A_4 sont égales, et les quatre faces du tétraèdre sont égales entre elles. Les points A_1, A_2, A_3

sont les milieux des côtés du triangle $D'_1 D'_2 D'_3$; les points D_1, D_2, D_3 sont les pieds des hauteurs du même triangle. Les points J_{14}, J_{24}, J_{34} sont les milieux des segments $D'_1 H_4$, $D'_2 H_4$, $D'_3 H_4$ compris entre les sommets du triangle $D'_1 D'_2 D'_3$ et son orthocentre H_4; I_4 est le centre du cercle $A_1 A_2 A_3$, J_{44} est l'orthocentre du triangle $A_1 A_2 A_3$.

Le tétraèdre particulier que nous venons de considérer a reçu le nom de *tétraèdre équifacial*. Le parallélipipède circonscrit est rectangle; les trois médianes sont perpendiculaires deux à deux et leur point de concours est à la fois le centre de gravité du tétraèdre, le centre de la sphère circonscrite et celui de la sphère inscrite. D'après ce que l'on a vu plus haut, *les points de contact de la sphère inscrite avec les faces sont les centres des cercles circonscrits à ces faces; les points de contact* intérieurs *des sphères exinscrites sont les orthocentres des faces;* enfin, *les points de contact* extérieurs *des sphères exinscrites sont situés sur la sphère circonscrite au tétraèdre. Les centres des sphères exinscrites sont les symétriques des sommets du tétraèdre par rapport au centre de la sphère inscrite;* ce sont donc des sommets du parallélépipède circonscrit au tétraèdre.

21. La proposition (N., **14**, 2°) peut être énoncée ainsi :

Si une sphère touche les faces d'un tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$ *aux points* P_1, P_2, P_3, P_4, *les droites* $A_1 P_1$, $A_2 P_2$, $A_3 P_3$, $A_4 P_4$ *sont des génératrices d'un même mode, d'un hyperboloïde; les droites qui joignent les points* P_1, P_2, P_3, P_4 *aux centres des symédianes des triangles* $P_2 P_3 P_4$, $P_3 P_4 P_1$, $P_4 P_1 P_2$, $P_1 P_2 P_3$ *sont des génératrices du second mode de la même surface.*

De ce théorème et des n^{os} (N., 16 et 17), on déduit que *les droites* $A_1 J_{11}$, $A_2 J_{22}$, $A_3 J_{33}$, $A_4 J_{44}$, *joignant les sommets d'un tétraèdre* $A_1 A_2 A_3 A_4$ *aux points de contact des faces opposées avec les sphères exinscrites correspondantes, forment un quadruple hyperboloïdique. Les droites* $A_1 J_{11}$, $A_2 J'_{12}$, $A_3 J'_{23}$, $A_4 J'_{14}$ *jouissent de la même propriété.*

SUR LES HAUTEURS D'UN TÉTRAÈDRE.

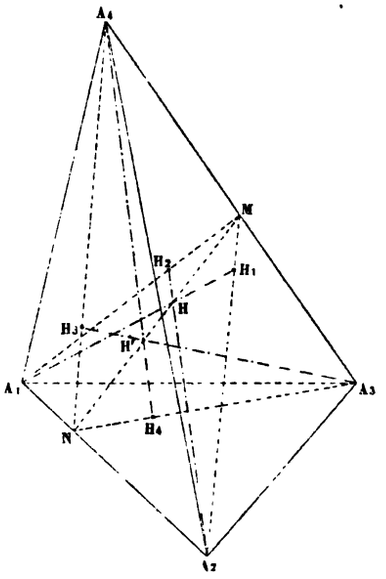
22. Nous désignons (*fig.* 6) par H_1, H_2, H_3, H_4 les projections des sommets du tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$ sur les faces opposées.

Si deux hauteurs $A_1 H_1$, $A_2 H_2$ *se coupent en un point* H, *les arêtes* $A_1 A_2$, $A_3 A_4$ *sont perpendiculaires, et les hauteurs* $A_3 H_3$, $A_4 H_4$ *se coupent également en un point* H'; *les points* H, H' *sont situés sur la plus courte distance* MN *des arêtes* $A_1 A_2$, $A_3 A_4$.

En effet, le plan $A_1 A_2 H$ est perpendiculaire aux plans $A_2 A_3 A_4$, $A_1 A_3 A_4$ et, par suite, à leur intersection $A_3 A_4$ (558, 561); donc $A_1 A_2$, $A_3 A_4$ sont rectangulaires. Réciproquement, si ces arêtes font un angle droit, on peut mener par $A_1 A_2$ un plan α perpendiculaire à $A_3 A_4$, et ce plan con-

tient nécessairement les hauteurs A_1H_1, A_2H_2 (521); de même, le plan α' mené par A_3A_4 perpendiculairement à A_1A_2 contient les droites A_3H_3, A_4H_4. Les plans α, α' se coupent suivant une droite MN, qui est la per-

Fig. 6.



pendiculaire commune à A_1A_2, A_3A_4; cette droite est une hauteur de chacun des triangles A_1A_2M, A_3A_4N.

On trouve facilement les égalités

$$\overline{A_4M}^2 - \overline{A_3M}^2 = \overline{A_4A_2}^2 - \overline{A_3A_2}^2 = \overline{A_4A_1}^2 - \overline{A_3A_1}^2,$$

d'où

$$a_1^2 + a_4^2 = a_2^2 + a_3^2.$$

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées normales d'un point quelconque P de la hauteur A_4H_4; on a

$$x_1 = A_4P\cos\alpha_1, \quad x_2 = A_4P\cos\alpha_2, \quad x_3 = A_4P\cos\alpha_3,$$

d'où

$$\frac{x_1}{\cos\alpha_1} = \frac{x_2}{\cos\alpha_2} = \frac{x_3}{\cos\alpha_3}.$$

De même, pour les coordonnées de tout point de A_3H_3,

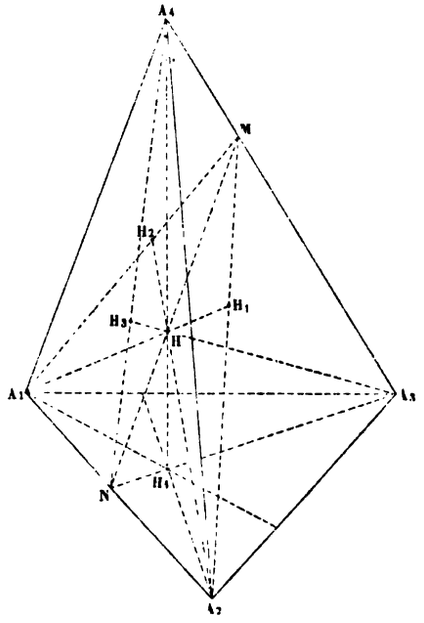
$$\frac{x_1}{\cos\alpha_3} = \frac{x_2}{\cos\alpha_4} = \frac{x_4}{\cos\alpha_3}.$$

Si les hauteurs A_4H_4, A_3H_3 ont un point commun H', on a, nécessairement,

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_4 = \cos\alpha_2\cos\alpha_5.$$

23. Supposons maintenant (*fig.* 7) que les trois hauteurs A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3 concourent en un même point H. Alors, d'après ce qui précède, les arêtes opposées A_1A_2 et A_3A_4, A_2A_3 et A_4A_1, A_3A_1 et A_4A_2 sont perpendiculaires, et

Fig. 7.



$$a_1^2 + a_4^2 = a_2^2 + a_5^2 = a_3^2 + a_6^2,$$

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_4 = \cos\alpha_2\cos\alpha_5 = \cos\alpha_3\cos\alpha_6;$$

de plus, la hauteur A_4H_4 passe également par H. Les plus courtes distances des arêtes opposées se coupent également en H; les pieds de ces droites sont les pieds des hauteurs des faces du tétraèdre, et les points H_1, H_2, H_3, H_4 sont les orthocentres des faces.

Le tétraèdre particulier que nous venons de rencontrer a été appelé *tétraèdre orthocentrique*.

24. *Dans tout tétraèdre orthocentrique* $A_1A_2A_3A_4$, *les milieux des*

arêtes et les pieds des plus courtes distances des arêtes opposées sont douze points d'une même sphère, ayant pour centre le centre de gravité G *du tétraèdre* (première sphère de douze points).

Car, les milieux de deux couples d'arêtes opposées étant les sommets d'un rectangle, les trois médianes du tétraèdre sont égales, et G est le centre d'une sphère passant par les milieux des six arêtes. Cette sphère passe, évidemment, par les circonférences des neuf points des faces du tétraèdre; donc elle contient les pieds des hauteurs de ces faces, et son centre est au milieu de la distance comprise entre l'orthocentre H du tétraèdre et le centre O de la sphère circonscrite (1).

25. *Dans tout tétraèdre orthocentrique* $A_1A_2A_3A_4$, *les centres de gravité des faces, leurs orthocentres et les points qui divisent dans le rapport* 2 : 1 *les segments des hauteurs du tétraèdre compris entre les sommets et leur point de concours* H, *sont douze points d'une même sphère, dont le centre* O' *divise la distance* HO *dans le rapport* 1 : 2 (seconde sphère de douze points).

En effet, les centres de gravité G_1, G_2, G_3, G_4 des faces du tétraèdre sont les sommets d'un tétraèdre homothétique à $A_1A_2A_3A_4$ par rapport à G; les hauteurs de ce nouveau tétraèdre concourent donc en un même point H' de la droite HG, et l'on a $HG = 3GH'$; le centre O' de la sphère $G_1G_2G_3G_4$ divise la distance HO dans le rapport 3 : 1. Comme on a $H_1G_1 = 3G_1O_1$ et, par suite, $HH' = 3H'O$, on voit aisément que

$$HO' = O'H' = H'O.$$

Donc O' est à la rencontre des perpendiculaires élevées sur les faces du tétraèdre par les milieux des segments H_1G_1, H_2G_2, ...; par conséquent, la sphère O' passe également par les points H_1, H_2, ... Enfin, la droite G_kO' coupe A_kH en un point L_k appartenant à la sphère O' et tel, que $L_kH = H'G_k = \frac{1}{3}A_kH$.

Remarque. — Les points H, H' sont des points inverses par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Les droites A_1H', A_2H', A_3H', A_4H' sont perpendiculaires aux faces de tétraèdre $H_1H_2H_3H_4$.

26. *Un tétraèdre orthocentrique* $A_1A_2A_3A_4$ *est autopolaire par rapport à une sphère ayant pour centre l'orthocentre du tétraèdre.*

Car, H étant l'orthocentre des triangles A_1A_2M, ..., on a

$$HA_1.HH_1 = HA_2.HH_2 = HA_3.HH_3 = HA_4.HH_4;$$

donc chaque sommet est le pôle de la face opposée par rapport à la sphère décrite du centre H avec le rayon $\sqrt{HA_1.HH_1}$. Toutefois, pour que cette sphère soit réelle, H doit tomber à l'extérieur du tétraèdre,

(1) Comparer ce qui précède avec les Exercices 639, 640, 641, 1029, 1025 (p. 520, 521, 559).

ce qui exige que l'un des angles solides du tétraèdre soit composé de trois angles plans obtus.

REMARQUE.

Les sphères circonscrites aux tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$ et $H_1H_2H_3H_4$, la première sphère de douze points de $A_1A_2A_3A_4$ et la sphère conjuguée ont pour plan radical commun le plan d'homologie des tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $H_1H_2H_3H_4$.

27. Les points A_1, A_2, A_3, A_4, H sont les sommets d'un *pentagone orthocentrique :* la droite qui joint deux quelconques de ces points est perpendiculaire au plan passant par les trois autres points ; chacun de ces points est l'orthocentre du tétraèdre ayant pour sommets les quatre autres points.

Pour construire un tétraèdre orthocentrique, on peut prendre arbitrairement les sommets A_1, A_2, A_3 ; le quatrième sommet A_4 est un point quelconque de la perpendiculaire menée sur le plan du triangle $A_1A_2A_3$ par son orthocentre. On peut également se donner à volonté un trièdre $A_4A_1A_2A_3$; les plans menés par les arêtes du trièdre perpendiculairement sur les faces opposées (*plans-hauteurs*), se coupent suivant une même droite A_4X, et un plan perpendiculaire à A_4X forme avec le trièdre donné un tétraèdre orthocentrique.

Les arêtes d'un trièdre et l'intersection de ses plans-hauteurs constituent un *quadrarête orthique :* chacune de ces droites est l'intersection des plans-hauteurs du trièdre ayant pour arêtes les trois autres. Un plan perpendiculaire à l'une des droites coupe les quatre lignes aux sommets d'un *quadrangle orthique,* c'est-à-dire en quatre points dont chacun est l'orthocentre du triangle des trois autres sommets.

Les hauteurs d'un tétraèdre orthocentrique forment un quadrarête orthique.

28. On sait que toute conique passant par les sommets d'un triangle et par son orthocentre est une hyperbole équilatère. (*Exercice* 1067, p. 563.)

Un cône du second ordre, circonscrit à un quadrarête orthique $SAA_1A_2A_3$ jouit également de propriétés particulières : *il est capable d'une infinité de trièdres trirectangles, et d'une infinité de quadrarêtes orthiques.*

En effet, un plan α perpendiculaire à la droite SA coupe le cône suivant une conique K, et les droites SA, SA_1, SA_2, SA_3 en des points que nous indiquons par A, A_1, A_2, A_3. Comme A est l'orthocentre du triangle $A_1A_2A_3$, K est une hyperbole équilatère.

Prenons sur K un point quelconque B_1, et menons par S un plan perpendiculaire à la droite SB_1 ; si B_2, B_3 sont les points de rencontre de ce plan avec K, A est l'orthocentre du triangle $B_1B_2B_3$, car ce triangle est inscrit à l'hyperbole équilatère et la droite B_1A est perpendiculaire à B_2B_3. Soient C_1, C_2, C_3 les points où les droites B_1A, B_2A, B_3A

coupent B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2. On a $AB_1 . AC_1 = AB_2 . AC_2 = AB_3 . AC_3$ et, comme $\overline{SA}^2 = -AB_1 . AC_1$, on a aussi $\overline{SA}^2 = -AB_2 . AC_2 = -AB_3 . AC_3$, d'où l'on conclut que les angles B_2SC_2, B_3SC_3 sont droits et que le trièdre $SB_1B_2B_3$ est trirectangle.

Réciproquement, tout cône du second ordre circonscrit à un trièdre trirectangle $SB_1B_2B_3$ jouit de la propriété que les plans-hauteurs de tout trièdre inscrit SAA_1A_2 se coupent sur le cône. Car, si un plan π perpendiculaire à SA coupe les arêtes des deux trièdres en B_1, B_2, B_3, A, A_1, A_2 et le cône suivant la conique K, le point A est, d'après un théorème connu, l'orthocentre du triangle $B_1B_2B_3$; il en résulte que K est une hyperbole équilatère. Soit A_3 le point où la perpendiculaire menée de A sur A_1A_2 coupe l'hyperbole; A est l'orthocentre du triangle $A_1A_2A_3$ et, par suite, SA est l'intersection des plans-hauteurs du trièdre $SA_1A_2A_3$, et SA_3 celle des plans-hauteurs du trièdre SAA_1A_2.

Le cône que nous venons de rencontrer est dit *cône équilatère;* comme une génératrice quelconque SB_1 est une arête d'un trièdre trirectangle inscrit $SB_1B_2B_3$, un plan perpendiculaire à SB_1 coupe le cône suivant une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles à SB_2, SB_3.

29. *Les hauteurs d'un tétraèdre quelconque* $A_1A_2A_3A_4$ *sont des génératrices d'un hyperboloïde équilatère, dont le centre* ω *est symétrique du centre* O *de la sphère circonscrite par rapport au centre de gravité* G.

Soient $A_1H_1, \ldots$, les hauteurs du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, et $h_1, \ldots$, les orthocentres des faces. Les plans $H_1A_1h_4$, $H_2A_2h_4$, $H_3A_3h_4$ sont perpendiculaires au plan $A_1A_2A_3$, car ils contiennent, chacun, deux perpendiculaires à un même côté de triangle $A_1A_2A_3$. Il résulte de là que la perpendiculaire h_4x menée par h_4 sur le plan $A_1A_2A_3$ rencontre les quatre hauteurs du tétraèdre. On peut de même trouver trois autres droites s'appuyant sur A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3, A_4H_4. Les hauteurs sont donc des génératrices d'un même hyperboloïde.

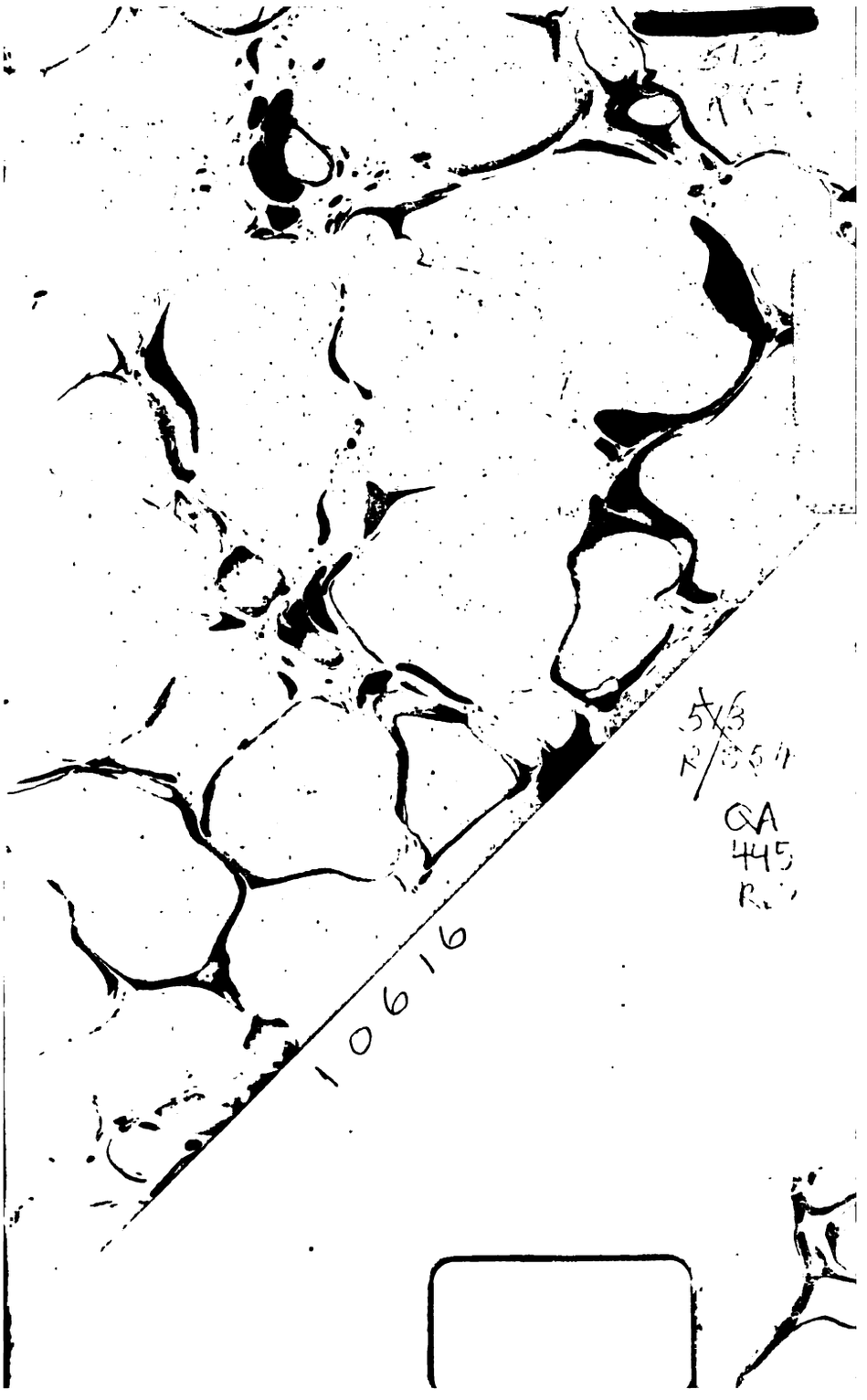
Cette surface est coupée par le plan $A_1A_2A_3$ suivant une hyperbole équilatère K, car les points A_1, A_2, A_3, h_4 appartiennent à la courbe d'intersection. Or, trois génératrices du cône asymptote sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole K et à A_1H_1; ce cône est donc équilatère.

Le centre ω de l'hyperboloïde est équidistant des génératrices parallèles A_4H_4, h_4x. Celles-ci étant contenues dans les plans menés par les points A_4, A_1 perpendiculairement à A_2A_3, ω est situé dans le plan mené par le milieu de A_4A_1 perpendiculairement à A_2A_3, plan qui est symétrique, par rapport à G, du plan perpendiculaire au milieu de A_2A_3. On en conclut que ω et O sont symétriques par rapport à G.

FIN DE LA SECONDE PARTIE.

16717 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

513
285t


10616
QA
445